

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224642**

UNIVERSAL  
LIBRARY



OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No 54153

Accession No. 9132

Author ج. ن.

محمد زید الدین

Title

نہای علم اکمل

This book should be returned on or before the date last marked below.

---





سلسلہ رسائل اسلامیہ علامہ محمد امجد علی عثمانی

# نظری علم اہل

تصنیف

جے۔ ایچ۔ جینس ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتہ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۵۴ھ ۱۳۳۴ھ ۱۹۳۸ء

طبع و اشاعت دارالکتاب اسلامیہ لاہور

یہ کتاب پروفیسر سر جے۔ ایچ جینس، مصنف اور سرز جن ایڈیٹنگنی، بوسٹن  
 (یو۔ ایس۔ اے۔) ناشرین کی اجازت سے ترجمہ کر کے شائع کی گئی ہے۔  
 مصنف کتاب اور ناشرین کتاب نے یہ اجازت بلا معاوضہ بخوشی عطا کی۔  
 ایسی علم دوستی قابلِ قدر اور قابلِ شکر یہ ہے۔

۴۸۶  
۹۲

# فہرست مضمین

## نظری علم الحیئل

صفحہ

مضمون

۱	پہلا باب - سکون اور حرکت
۱	تہید
۴	ایک نقطہ کی حرکت
۸	رفتار
۱۷	اسراع
۲۳	کستی
۳۹	دوسرا باب - قوت اور قوانین حرکت
۳۹	قوانین نیوٹن
۴۹	مکھوائے کافریم
۵۲	ایک ذرہ پر قوانین حرکت کی اطلاق پذیری
۵۴	تیسرا باب - واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں

صفحہ	مضمون
۵۴	✓ قوتوں کی ترکیب اور تحلیل
۵۶	ذره توازن میں
۶۲	✓ قوتوں کے نمونے
۶۲	ذره کا وزن
۶۲	دوری کا تناؤ
۶۸	دو اجسام کے درمیان تعامل
۶۸	رگرہ
۸۸	چوتھا باب - ذروں کے نظاموں کا علم سکون
۹۰	معیار
۹۴	ذروں کے نظامات توازن میں
۹۸	قوتیں ایک مستوی میں
۱۱۰	دوریاں
۱۱۶	بھو لاپل
۱۱۸	زنجیرہ
۱۳۱	پانچواں باب - استوار اجسام کا علم سکون
۱۳۱	استواری
۱۳۴	✓ کسی استوار جسم کے توازن کی شرطیں
۱۳۶	قوت کی انتقال پذیری
۱۳۸	✓ ایک مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کی ترکیب
۱۴۴	✓ متوازی قوتیں
۱۴۴	✓ جفت
۱۵۴	قوتیں فضا میں

صفحہ

مضمون

۱۷۱ ..... چھٹا باب - مرکز ثقل

۱۷۶ ..... پتے کا مرکز ثقل

۱۷۹ ..... مرکز ثقل مکمل سے معلوم کرنا

۱۹۵ ..... اُن رقبوں اور جموں کے مرکز ثقل جو راست

۱۹۵ ..... مکمل سے حاصل ہوں

۲۰۹ ..... ساتواں باب - کام

۲۰۹ ..... پیمائش اور اکائیاں

۲۱۳ ..... متغیر قوت کے خلاف کام

۲۱۳ ..... لچکدار دوری کو تنانے میں کام

۲۱۶ ..... کام کو رقبہ کے ذریعہ تعبیر کرنا

۲۲۲ ..... موہوم کام کا اصول

۲۳۶ ..... توانائی بالقوہ

۳۴۳ ..... توانائی بالحركت

۲۴۸ ..... توانائی کا بقا

۲۵۲ ..... قائم اور غیر قائم توازن

۲۷۲ ..... اٹھواں باب - مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت

۲۷۴ ..... جسم جو جاذبہ کے تحت گرے

۲۷۸ ..... مائل مستوی پر حرکت

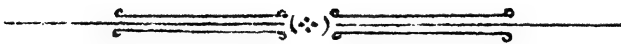
۲۸۳ ..... ایٹوم کی مشین

۲۸۵ ..... متحرک فریم کے حوالے سے حرکت

۲۹۰ ..... متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات

صفحہ	مضمون
۲۹۷	مرمیوں کی پرواز
۳۱۹	نواں باب - ذروں کے نظاموں کی حرکت
۳۱۹	حرکت کی مساواتیں
۳۲۳	معیار حرکت کا بقاء
۳۲۴	مرکز ثقل کی حرکت
۳۳۰	توانائی بالحرکت
۳۳۷	سادہ اسکے والی قوتیں
۳۴۵	پچک
۳۶۸	دسواں باب - متغیر قوت کے تحت ذرہ کی حرکت
۳۶۸	حرکت کی مساوات
۳۷۴	سادہ رقااص
۳۸۱	سادہ موسیقی حرکت
۳۸۴	تذویری رقااص
	قوت کے مرکز کے گرد ذرہ کی حرکت، فاصلہ کے
۳۸۸	متناسب قوت
۳۹۴	قوت کے مرکز کے گرد حرکت کا عام نظریہ
۳۹۹	معکوس مربع کا قانون
۴۱۳	گیارہواں باب - استوار اجسام کی حرکت
۴۱۳	زاویہ رفتار
۴۱۷	توانائی بالحرکت
۴۲۱	گھماؤ کے نصف قطر

صفحہ	مضمون
۴۲۷	۱ معیار حرکت کا معیار
۴۳۷	جمود کے معیاروں کا عام نظریہ
۴۴۰	استوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں
۴۴۴	یولر کی مساواتیں
۴۴۷	سیارہ کی گردش
۴۴۹	لٹو کی حرکت
۴۶۳	بارہواں باب - تقسیم شدہ محدود
۴۶۷	پیمائش کا اصول
۴۷۳	اقل ترین عمل کا اصول
۴۷۴	لگرنج کی مساواتیں
۵۰۱	پھوٹے اہتراز
۵۰۶	قائم توازن
۵۰۷	غیر قائم توازن
۵۰۸	قصری ارتعاش
۵۱۱	آئینی مساواتیں
۵۲۱	اشاریہ







# نظریہ علم الحیل

## پہلا باب

### سکون اور حرکت

#### تمہید

۱۔ فطرت کی یکسانیت۔ اگر ہم پانی میں ایک پتھر چھوڑیں تو وہ نہ تک ڈوب جائے گا، اگر ہم پانی میں ایک کاغذ چھوڑیں تو وہ پانی کی سطح تک اٹھ آئے گا۔ یہ دو بیانات نہ صرف ان پتھروں اور کاغذوں کے لیے درست تسلیم کیے جائیں گے جو ڈوبنے یا تیرنے دیکھے گئے ہیں بلکہ تمام پتھروں اور کاغذوں کے لیے۔ اگر ہمارے پاس ایک پتھر کا ٹکڑا ہو جو کبھی بھی پانی میں نہ ڈالا گیا ہو تو ہمیں یقین ہوتا ہے کہ اگر ہم اسے پانی میں چھوڑیں گے تو وہ پانی میں ڈوبے گا۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ہمیں یہ فرض کرنے کا کیا حق حاصل ہے کہ یہ نیا اور نیا آزمودہ پتھر کا ٹکڑا پانی میں ڈوبے گا۔ ہم جانتے ہیں کہ لاکھوں

پتھر کے ٹکڑے مختلف اوقات پانی میں ڈالے جا چکے ہیں ہم جانتے ہیں کہ ان میں ایک بھی ایسا نہ نکلا جو نہ ڈوبا ہو۔ اس سے ہم یہ مستنت کرتے ہیں کہ فطرت تمام پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ ایکساں سلوک کرتی ہے جبکہ وہ پانی میں ڈالے جاتے ہیں اور اس لیے ہمیں یقین ہوتا ہے کہ ایک نئے اور نا آزمودہ پتھر کے ٹکڑے کے ساتھ بھی تو ایسے فطرت وہی سلوک کریں گی جو وہ بے شمار پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ کرتی دیکھی گئی ہیں اور اس لیے وہ پانی میں دو بیگکا۔ یہ اصول فطرت کی یکسانیت کے طور پر مشہور ہے، جب یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ تو ایسے فطرت نے فلاں کام ایک بار کیا ہے تو ان ہی حالات کے تحت پھر وہ وہی کام کریں گی۔

## ۲۔ قوانین فطرت۔ وہ اصول جو اوپر مذکور ہوا یہ کہنے کے

مراد ہے کہ تو ایسے فطرت کا عمل بعض قوانین کے تحت ہوتا ہے، ان قوانین کو ہم قوانین فطرت کہتے ہیں۔ مثلاً اگر یہ معلوم ہو چکا ہو کہ ہر پتھر جو کبھی پانی میں ڈالا جا چکا ہے پانی میں ڈوبا ہے تو جیسا کہ ہم پہلے کہہ چکے ہیں فطرت کی یکسانیت کا اصول اس مفروض کی رہبری کرتا ہے کہ ہر پتھر جو آئندہ کبھی پانی میں ڈالا جائے گا یہ تک ڈوبے گا اور پھر ہم قانون فطرت کے طور پر اس کا اعلان کر سکتے ہیں کہ ہر پتھر جو پانی میں ڈالا جائے گا یہ تک ڈوبے گا۔ سائنس کا وہ حصہ جس میں قوانین فطرت سے بحث کی جاتی ہے علم الفطرت (Natural Science) کہلاتا ہے۔ یہ دو حصوں میں منقسم ہے ایک تجربی اور دوسرا نظری۔ تجربی سائنس میں قوانین فطرت کی جستجو وقتاً فوقتاً تو ایسے فطرت کے عمل کا مشاہدہ کرنے سے کی جاتی ہے۔ نظری سائنس میں ان قوانین فطرت کو جو تجربی سائنس نے دریافت کئے ہیں مواد کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے، ممکن ہو تو ان قوانین فطرت کو سادہ تر شکلوں میں تحویل کیا جاتا ہے، اور پھر یہ معلوم کیا جاتا ہے کہ ان قوانین سے کیونکر

پیشین گوئی ہو سکتی ہے کہ قوائے فطرت کا عمل اُن صورتوں میں کیا ہوگا جو تجربہ کی کسوٹی پر فی الواقع آزمائے نہیں گئے ہیں۔ مثلاً تجربی سائنس سے معلوم ہوتا ہے کہ پتھر ڈوبتا ہے، کاغذ تیرتا ہے، اور علیٰ ہذا متعدد متشابہ قوانین۔ ان قوانین کی مدد سے نظری سائنس میں وہ سادہ قوانین فطرت ماخوذ ہوتے ہیں جو ڈوبنے یا تیرنے کے تمام مظاہر پر حکمران ہیں اور پھر ایک قدم آگے بڑھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ان قوانین کی مدد سے ہم کس طرح تجربہ کو فی الواقعی عمل میں لانے سے پیشتر پیشین گوئی کر سکتے ہیں کہ ایک دی ہوئی شے ڈوبے گی یا تیرے گی۔ مثلاً تجربی سائنس یہ دریافت نہیں کر سکتی کہ آیا پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز تیرے گا یا ڈوبے گا کیونکہ پچاس ہزار ٹن کا کوئی جہاز موجود نہیں ہے جس سے تجربہ کیا جائے۔ لیکن بحری معمار فطرت کی یکسانیت کے بھروسہ تجربی سائنس سے معلوم شدہ قوانین فطرت کی بنا پر اور ان قوانین کو استعمال کرنے کے اُس طریقہ سے جو نظری سائنس سے معلوم ہو چکا ہے ہزار ٹن کا ایک جہاز بنا سکتا ہے پورے اعتماد کے ساتھ کہ وہ اُسی طریقہ پر پیش آئے گا جس کی پیشین گوئی نظری سائنس نے کی ہے۔

۳۔ علم الحیل۔ سائنس کی اُس شاخ میں جو علم الحیل کے طور پر معروف ہے اجسام کی حرکت پر اور اُن قوائے فطرت پر بحث کی جاتی ہے جو اس حرکت کا سبب ہوتی ہیں یا حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں۔ وہ قوانین فطرت جو ان قوتوں کے عمل اور اجسام کی حرکت پر حاوی ہیں مدت سے معلوم ہیں اور نیوٹن انہیں سادہ ترین شکل میں تحویل کر چکا ہے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تجربی علم الحیل سائنس کی ایک تکمیل یافتہ شاخ ہے۔

اس کتاب میں نظری علم الحیل سے بحث کی جائے گی۔ ہم اُن قوانین سے ابتدا کریں گے جو تجربی علم الحیل نے ہیما کئے ہیں اور (۳)

پھر اس پر بحث کریں گے کہ ان قوانین کو اجسام کی حرکت کے متعلق پیشین گوئی کرنے میں کس طرح استعمال کیا جاسکتا ہے، مثلاً زمین پر اجسام کا گرنا، مریخوں کا پھینکنا، سورج کے گرد زمین کی اور سیاروں کی حرکت وغیرہ۔ سوالات کی ایک اہم جماعت جن پر ہمیں بحث کرنی ہوگی وہ ہونگی جن میں کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی کیونکہ قوانین فطرت جو حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ کوئی حرکت واقع نہیں ہوتی۔ ایسے سکون کو سکون نیاتی کہا جاتا ہے۔

## ایک نقطہ کی حرکت

۴۔ سکون کی حالت۔ کسی جسم کی حرکت پر بحث کرنے سے

بیشتر یہ متعین کرنا ضروری ہے کہ کسی جسم کے سکون سے کیا مراد ہے معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ وہ پٹریوں پر حرکت نہ کر رہی ہو۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ٹرین زمین کے بقیہ حصہ کے اشتراک میں فی الواقع ساکن نہیں ہے بلکہ سورج کے گرد ایک بڑی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ اسی طرح ایک کبھی جو ریل کے ڈبہ کی دیوار پر رینگ رہی ہو ایک لحاظ سے ساکن کہی جاسکتی ہے جبکہ وہ دیوار کے ایک ہی مقام پر پڑھ رہی ہے۔ لیکن کبھی فی الواقع ساکن نہیں ہوگی، وہ دیہات میں ٹرین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گی، دیہات سورج کے گرد زمین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لیں گے، اور سورج فضا میں نظام شمسی کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گا۔

یہ مثالیں اس امر کی متقاضی ہیں کہ سکون اور حرکت کے تصور کو صاف، صریح اور ٹھیک معنی دئے جائیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ہمارے بیانات کافی ٹھیک ہوتے اگر ہم پہلی صورت میں کہتے کہ ٹرین زمین کے لحاظ سے ساکن تھی اور دوسری صورت میں کہتے کہ کبھی ڈبہ کے

لحاظ سے ساکن تھی۔

۵۔ حوالے کا فریم۔ پس سکون اور حرکت پر بحث کرنے سے

پیشتر یہ ضروری معلوم ہوتا ہے کہ حوالے کے فریم کے تصور کا اضافہ کیا جائے۔ زمین نے ٹرین کی حرکت کے لیے حوالہ کا ایک فریم مہیا کیا اور جب ٹرین ٹیڑیوں پر حرکت نہ کر رہی ہو تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ زمین کو حوالے کے فریم کے طور پر لیا گیا ہو۔ اسی طرح (۳) ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ کبھی ساکن تھی جبکہ ڈبہ کو حوالے کا فریم لیا گیا ہو۔ صریحاً کوئی فریم کا ری حقیقی یا خیالی یا کوئی مادی جسم حوالے کے فریم کے طور پر لیا جاسکتا ہے بشرطیکہ وہ استوار ہو یعنی وہ خود اپنی شکل اور جسامت نہ بدل رہا ہو۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک نقطہ بلحاظ کسی حوالے کے فریم کے ساکن ہے جبکہ اس نقطہ کا فاصلہ حوالے کے فریم کے ہر نقطہ سے غیر متبدل رہے۔

۶۔ حوالے کے فریم کے لحاظ سے حرکت۔ حوالے کے

فریم کے تصور کو واضح کر دینے کے بعد اس کے لحاظ سے ہم نہ صرف سکون پر بحث کر سکتے ہیں بلکہ حرکت پر بھی۔ جب ٹرین ٹیڑیوں پر ایک میل حرکت کر لیتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ٹرین اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی زمین کے لحاظ سے ایک میل حرکت کر چکی ہے۔ جب کمی ڈبہ کے فرش سے چھت تک رینگ جاتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی ڈبہ کے لحاظ سے آٹھ فٹ (مثلاً) حرکت کر چکی ہے۔

دو لمحات تہ، تہ کے درمیانی وقفہ میں ٹرین کے لحاظ سے کبھی نہ جو فاصلہ طے کیا ہے اسے مقرر کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ وہ حقیقی نقطہ جہاں سے

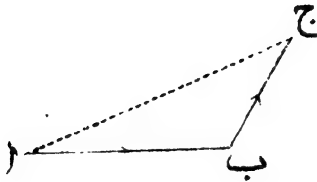
کبھی چلی ہے ٹرین کے موجودہ محل سے (فرض کرو) ایک میل پیچھے ہے لیکن وہ نقطہ جہاں سے ہم پیمائش کرتے ہیں وہ نقطہ ہے جو ڈیہ میں وقت  $t$  پر اُسی جگہ ہے جس جگہ وہ وقت  $t$  پر تھا۔ اس لیے بالعموم ایک دئے ہوئے حوالے کے فریم کے لحاظ سے اوقات  $t$  اور  $t$  کے درمیانی وقفہ میں طے شدہ فاصلہ مقرر کرنے میں ہم اول وہ نقطہ  $A$  معلوم کرتے ہیں جو وقت  $t$  پر حوالے کے فریم کے لحاظ سے اُسی محل میں قائم رہتا ہے جس میں وہ نقطہ جہاں سے متحرک نقطہ وقت  $t$  پر چلا ہے قائم تھا۔ اس نقطہ  $A$  سے نقطہ  $B$  تک جس پر متحرک نقطہ وقت  $t$  پر پہنچا ہے وہ فاصلہ ہو گا جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے طے ہوا ہے۔

ایک ذرہ  $A$  کے لحاظ سے کسی ذرہ  $B$  کی حرکت سے اس کی وہ حرکت مراد ہے جو  $A$  کے ساتھ حرکت کرنے والے حوالے ایک فریم کے لحاظ سے معلوم کی گئی ہو۔

## ۷۔ حرکتوں کی ترکیب۔ فرض کرو کہ ایک دئے ہوئے

وقت میں متحرک نقطہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے ایک خاص فاصلہ طے کرتا ہے اور اس اثناء میں حوالے کا یہ فریم خود ایک دوسرے حوالے کے فریم کے لحاظ سے کوئی اور فاصلہ طے کرتا ہے، چنانچہ ایسی صورت واقع ہوگی اگر کبھی ڈیہ کی دیوار پر چڑھے اور اس اثناء میں ڈیہ خود زمین کے لحاظ سے حرکت کرے۔

فرض کرو کہ اس کاغذ کے مستوی میں جس پر شکل (۱) کھینچی گئی ہے حوالے کا ایک فریم حرکت کر رہا ہے اور کاغذ خود حوالے کا دوسرا فریم (۵) ہے۔ فرض کرو کہ متحرک نقطہ  $A$  سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور اثناء حرکت میں حوالے کے پہلے فریم کا وہ نقطہ جو ابتداً متحرک نقطہ پر منطبق تھا  $A$  سے  $B$  تک حرکت کر چکا ہے اور اس اثناء میں متحرک نقطہ نے  $B$  تک حرکت کی ہے۔ اب خط  $AB$ ،

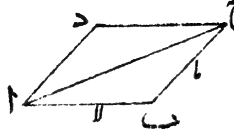
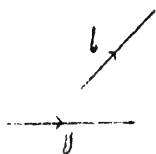


شکل (۱)

فریم ۲ کے لحاظ سے  
فریم ۱ کی حرکت کو تعبیر کرتا  
ہے اور جب ج فریم  
۱ کے لحاظ سے متحرک  
نقطہ کی حرکت کو تعبیر  
کرتا ہے۔ متحرک نقطہ  
کی کل حرکت بلحاظ فریم  
۲ کے ا ج سے تعبیر  
ہوتی ہے۔ حرکت  
ا ج کو دو حرکتوں

ا ب ج کا مرکب یا ان دو حرکتوں کا حاصل کہتے ہیں۔ پس  
اگر ایک نقطہ فریم ۱ کے لحاظ سے فاصلہ ب ج طے کرے اور اس  
اثناء میں فریم ۱ فریم ۲ کے لحاظ سے فاصلہ ا ب طے کرے تو نقطہ کی  
حاصل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے فاصلہ ا ج کے مساوی ہوگی جو دو فاصلوں  
ا ب ج کو لیکر انہیں اس طریقہ سے رکھنے سے حاصل ہوتی ہے کہ نقطہ  
ب جس پر ایک فاصلہ ختم ہوتا ہے وہی نقطہ ہوتا ہے جس پر دوسرا فاصلہ ابتدا کرتا ہے۔

دو حرکتوں کو مرکب کرنے کا ایک اور طریقہ ہے۔ فرض کرو کہ  
لا، ما سے دو حرکتیں تعبیر ہوتی ہیں۔ محصلہ بالا قاعدہ سے معلوم ہوتا ہے  
کہ ہمیں ایک مثلث ا ب ج بنانا چاہئے جس کے اضلاع ا ب ج  
ب ج طول میں لا، ما کے مساوی ہوں تو مطلوبہ حرکت ا ج کے  
مساوی ہوگی۔ ایسا ایک مثلث ا ب ج بنالینے کے بعد فرض کرو کہ  
ہم مثلث کے اضلاع کے متوازی خطوط ا د ج د بنائیں گے متوازی الاضلاع



شکل (۲)

ا ب ج د کی تکمیل

کرتے ہیں۔ اب چونکہ

ا د، ب ج کے مساوی

ہے اس لئے وہ بھی

حرکت ما کو تعبیر کرے گا

اور اس لیے ہم کہہ سکتے

ہیں کہ متوازی الاضلاع

کے وہ دو اضلاع جو ا پر

ملتے ہیں دی ہوئی حرکتوں کو تعبیر کرتے ہیں اور وتر ا ج جو ا میں سے

گزر رہا ہے حاصل حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے دو حرکتوں لا، ما کو

مرکب کرنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے :

ایک متوازی الاضلاع ا ب ج د بناؤ ایسا کہ اضلاع ا ب، ا د جو

(۶)

ا پر ملتے ہیں دی ہوئی دو حرکتوں لا، ما کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے

تعبیر کریں تو وتر ا ج جو ا میں سے گزر رہا ہے اُس حاصل حرکت کو تعبیر کریگا

جو ان دو حرکتوں کو مرکب کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

## رفتار

۸۔ یکساں اور متغیر رفتار۔ رفتار سے مراد صرف حرکت

کی شرح ہے۔ وہ ایکساں ہوگی یا متغیر۔ اگر ایک نقطہ اس طریقہ سے

حرکت کرے کہ اس کی حرکت کے ہر ثانیہ میں خواہ متغیر ثانیہ کوئی ہو

مقررہ فاصلہ ۱ فٹ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی رفتار ۱ فٹ فی ثانیہ

کی ایک ایکساں رفتار ہے۔ لیکن اگر نقطہ ایک ثانیہ میں ۱ فٹ

حرکت کرے، دوسرے ثانیہ میں ۲ فٹ حرکت کرے اور تیسرے میں



ج فٹ اور علیٰ ہذا تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ 'ا' ب' ج' میں سے کسی سے رفتار کی پیمائش ہوتی ہے۔ اس صورت میں رفتار کو متغیر کہا جاتا ہے کیونکہ وہ حرکت کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوتی ہے۔ کسی لمحہ پر رفتار معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کا ایک صغیر وقفہ فرت لیتے ہیں اور فاصلہ فرس کی پیمائش کرتے ہیں جو اس وقفہ میں مرسم ہوا ہے۔ اب ہم نسبت  $\frac{فرس}{وقت}$  کو اس لمحہ پر کی رفتار کہتے ہیں جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے۔ اگر رفتار ایکساں ہے تو  $\frac{فرس}{وقت}$  وہ فاصلہ ہوگا جو اکائی وقت میں مرسم ہوتا ہے اور اس لیے رفتار کی موجودہ تعریف وہی ہو جاتی ہے جو اوپر بیان کی جا چکی ہے۔

اوسط رفتار۔ اگر کوئی نقطہ متغیر رفتار سے حرکت کرے اور ت ثانیوں میں 'ا' فٹ فاصلہ مرسم کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وقت ت میں متحرک نقطہ کی 'اوسط رفتار'  $\frac{ا}{ت}$  ہے۔ یہ اوسط رفتار وہ رفتار ہے جو ایک خیالی نقطہ کی ہوگی جو ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور وقت ت میں وہی فاصلہ طے کرتا ہے جو حقیقی نقطہ متغیر رفتار سے طے کرتا ہے۔

اکائی۔ رفتار کی پیمائش میں طول کی ایک اکائی اور وقت کی ایک اکائی کی ضرورت ہے، مثلاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک نقطہ 'ا' فٹ فی ثانیہ کی رفتار رکھتا ہے تو گویا ہم نے فٹ کو طول کی اکائی اور ثانیہ کو وقت کی اکائی منتخب کیا ہے۔ ہم اسی رفتار کی مقدار کو دوسری اکائیوں میں ایک سادہ تناسب کے ذریعہ (۴) معلوم کر سکتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ 'ا' فٹ فی ثانیہ کی رفتار کو میلوں اور گھنٹوں کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

نقطہ ایک ثانیہ میں ۱ فٹ حرکت کرتا ہے اور اس لیے ایک گھنٹہ میں  
۶۰ × ۶۰ × ۶۰ فٹ حرکت کریگا اور اس لیے ایک گھنٹہ میں

$$\frac{115}{22} = \frac{60 \times 60 \times 60}{1440 \times 3}$$

حرکت کرے گا۔ پس نقطہ کی رفتار  $\frac{115}{22}$  میل فی گھنٹہ ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک ریل گاڑی ۱۸ گھنٹوں میں ۹۱۸ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے۔  
اس کی اوسط رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو۔

۲۔ ایک ٹرین اور ایک موٹر کی رفتاروں کا مقابلہ کرو جبکہ اول الذکر  
۱۰۰ فٹ فی ثانیہ طے کرے اور ثانی الذکر ۵۰۰ گز فی دقیقہ۔

۳۔ ایک آدمی  $\frac{1}{2}$  ۹ ثانیوں میں ۱۰۰ گز دوڑتا ہے۔ اس کی اوسط  
چال میلوں میں فی گھنٹہ کیا ہے۔

۴۔ ایک شہری گھڑی کی دو سوئیاں ۱۰ اور ۷ فٹ لمبی ہیں۔ ان کے  
سروں کی رفتاریں معلوم کرو۔

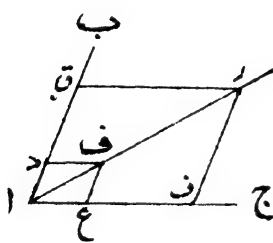
۵۔ زمین کے قطر کو ۹۲۷ میل لیکر معلوم کرو کہ اس آدمی کی رفتار فٹ  
ثانیہ اکائیوں میں کیا ہوگی جو خط استوا پر گھڑا ہے (زمین کے محور کے گرد زمین  
کی یومی گردش کی وجہ سے)۔

۶۔ دو گاڑیاں، علی الترتیب ۲۳۰ اور ۴۴۰ فٹ لمبی، متوازی راستوں پر  
ایک دوسرے سے گذر جاتی ہیں، پہلی گاڑی دوسری سے دو چند رفتار سے حرکت  
کر رہی ہے۔ چھوٹی گاڑی کا ایک مسافر دیکھتا ہے کہ لمبی گاڑی اس سے  
تین ثانیوں میں گذر جاتی ہے۔ دونوں گاڑیوں کی رفتاریں معلوم کرو۔

۹۔ رفتاروں کی ترکیب۔ تمام حرکتیں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں

حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کی جانی چاہئیں۔ پس رفتار یعنی حرکت کی شرح کو بھی حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنا چاہئے۔ ایک نقطہ حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے ایک خاص رفتار رکھ سکتا ہے اور خود حوالے کا فریم ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے ایک دوسری رفتار رکھ سکتا ہے۔ اب اگر متحرک نقطہ کی رفتار دوسرے فریم کے لحاظ سے معلوم کرنی ہو تو اس عمل کو دو رفتاروں کو مرکب کرنے کا عمل کہتے ہیں۔

اس غرض کے لیے ہم ان حرکتوں پر غور کرتے ہیں جو وقت کے ایک ایک صغیر وقفہ فرت میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ پہلے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی رفتار سمت  $\Delta$  ب میں  $v$  ہے اور دوسرے فریم کے لحاظ سے پہلے فریم کی رفتار سمت  $\Delta$  ج میں  $w$  ہے۔ پس متحرک نقطہ پہلے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں  $\Delta$  ب پر فاصلہ  $w$  فرت (فرض کرو  $\Delta$  د) طے کرتا ہے اور اس اثنا میں خود فریم دوسرے فریم کے لحاظ سے  $\Delta$  ج پر فاصلہ  $w$  فرت (فرض کرو  $\Delta$  ع) طے کرتا ہے۔



مثال (۳)

فرض کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا وتر  $\Delta$  ف ہے جس کے دو کنارے  $\Delta$  د،  $\Delta$  ع ہیں تو نقطہ کی حاصل حرکت دوسرے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں  $\Delta$  ف ہوگی۔ اب چونکہ متحرک نقطہ وقت فرت

میں فاصلہ  $\Delta$  ف مرتسم کرتا ہے اس لیے حاصل رفتار  $\frac{\Delta \text{ ف}}{\text{وقت}}$  ہوگی۔

اب فرض کرو کہ ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ رفتاریں خطوط مستقیم سے تعبیر ہوں گی، خط کی سمت رفتار کی سمت کے متوازی ہوگی اور اس کا طول رفتار کی مقدار کے متناسب لیا جائے گا، خطوں کے طول کسی پیمانہ کی بموجب کھینچے جاسکتے ہیں مثلاً ہم طول کے ہر انچ سے ایک فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر کر سکتے ہیں چنانچہ ایسی صورت میں مین فٹ فی ثانیہ کی رفتار تین انچ لمبے خط سے جو حرکت کی سمت کے متوازی کھینچا گیا ہو تعبیر ہوگی۔

شکل (۳) میں فرض کرو کہ 'ا'، 'ق' سے رفتاریں 'و'، 'م' کسی پیمانہ پر تعبیر ہوتی ہیں۔ چونکہ پیمانہ دونوں رفتاروں کے لیے ایک ہی ہے اس لیے

$$\begin{aligned} \text{ا} : \text{ق} &= \text{و} : \text{م} \\ \text{لکین ا} &= \text{و} : \text{ف}، \text{د} = \text{و} : \text{ف} \\ \text{اس لیے ا} &: \text{ع} = \text{د} : \text{م} = \text{و} : \text{م} \end{aligned}$$

اور اس لیے 'ا' : 'ق' = 'ا' : 'ع' = 'د' : 'ا'۔  
اگر ہم متوازی الاضلاع 'ا' : 'ق' کی تکمیل کریں تو دتر ا' : 'ق' میں سے گزرے گا اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} \text{ا} : \text{ق} &= \text{ا} : \text{ع} \\ \text{اگر حاصل رفتار و ہو تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ} \\ \frac{\text{ا}}{\text{ق}} &= \text{و} \end{aligned}$$

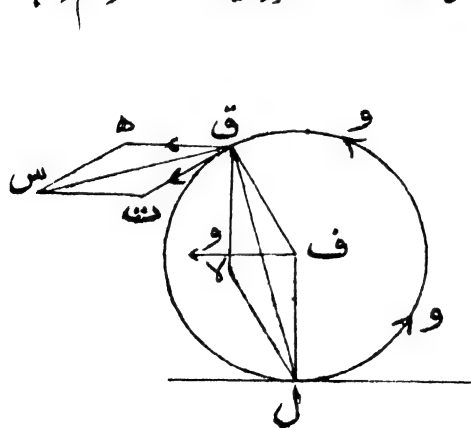
$$\text{اس لیے ا} : \text{ع} = \text{و} : \text{ف}، \text{و} : \text{ف} = \text{و} : \text{م} \quad (۹)$$

اور اس لیے 'ا' : 'ق' = 'و' : 'م'۔  
پس 'ا' : 'ق' کی مقدار کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر 'ا' : 'ق' کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز چونکہ 'ا' : 'ق' حاصل حرکت 'ا' کی سمت

میں ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر رفتار و کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلہ ثابت کر دیا۔  
**مسئلہ**۔ اگر دو رفتاریں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے جو کسی زاویہ سے نکلے ہیں مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مقدار اور سمت میں اُسی پیمانہ پر متوازی الاضلاع کے اُن قریب سے تعبیر ہوگا جو اس نقطہ

یہ مسئلہ رفتاروں کے متوازی الاضلاع کے طور پر مشہور ہے۔  
 ہم اس کا مفہوم دو سادہ مثالوں سے واضح کریں گے۔

۱۔ فرض کرو کہ ایک گاڑی ایک ہموار سڑک پر رفتار و سے حرکت کر رہی ہے۔ ہم حوالہ کا پہلا فریم گاڑی کا جسم لیں گے اور دوسرا فریم سڑک۔ اب فریم ۱ کی رفتار فریم ۲ کے لحاظ سے و ہے۔ فریم ۱ کے لحاظ سے گاڑی کے کسی بھیہ ف کا مرکز ثابت ہے، اس لیے کو ر کا کوئی نقطہ ف کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔



شکل (۴)

فریم ۱ کے لحاظ سے سڑک پیچھے کی طرف رفتار و سے حرکت کر رہی ہے اس لیے اگر پہلے سڑک پر نہ بھیسے تو کو ر پر کے کسی نقطہ کی رفتار فریم ۱ کے لحاظ سے و ہونی چاہیے۔ اس لیے کو ر پر کے کسی نقطہ ق کی رفتار فریم ۱ کے لحاظ سے ماس ق ت پر و ہوگی۔ اس رفتار کو خط ق ت سے تعبیر کرتے

گاڑی کی رفتار سڑک کے لحاظ سے سڑک کے متوازی ایک مساوی خط ق ہ سے تعبیر ہوگی۔ پس نقطہ ق کی حاصل رفتار متوازی الاضلاع ق ہ س ت کے وتر ق میں سے تعبیر ہوگی۔ صریحا اس کی سمت زاویہ ہ ق ت کی تنصیف کرتی ہے۔ فرض کرو کہ پیسہ کا زیر ترین نقطہ ل ہے اور فرض کرو کہ لا سے متوازی الاضلاع ق ف ل کی تکمیل ہوتی ہے۔ صریحا یہ متوازی الاضلاع متوازی الاضلاع ق ت س ہ کے مشابہ ہے کیونکہ دونوں متوازی الاضلاعوں میں متناظر خطوط علی القواہم ہیں۔ اسلئے

(۱۰)

$$ق س : ق ت = ق ل : ق ف$$

اس لیے اس پیمانہ پر جس میں گاڑی کی رفتار مقدار میں، پیسہ کے نصف قطر ق ف سے تعبیر ہوتی ہے نقطہ ق کی رفتار ق ل سے تعبیر ہوگی۔ پس کورپر کے مختلف نقطوں کی رفتاریں ل سے ان کے جو فاصلے ہیں ان کے متناسب ہیں اور رفتاروں کی سمتیں ہر صورت میں اس خط پر عمود ہیں جو نقطہ کو ل سے ملتا ہے۔

۲۔ ایک جنگی جہاز ۱۸ بحری میلوں کی رفتار سے سفر کر رہا ہے اور اس کی توپوں سے بلحاظ جہاز کے ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے فرمیاں فائر کیا جاسکتی ہیں۔ توپوں کو کس سمت میں قائم کرنا چاہیے کہ ان کی ضرب ایک ایسی شے پر پڑے جس کی سمت جہاز سے اس کی حرکت کی سمت پر عمود ہے۔

فرض کرو کہ جہاز کی

حرکت کی سمت ا ب

ہے اور فرض کرو کہ توپ کو

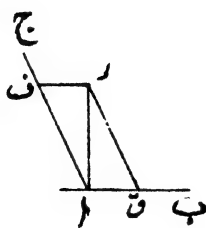
سمت ا ج میں قائم کیا گیا

ہے تو جہاز کے لحاظ سے

گوئے کی جو رفتار ہے اس کو

ا ج پر کے ایک خط ا ن

سے تعبیر کیا جاسکتا ہے اور



شکل (۵)

سمندر کے لحاظ سے جہاز کی جو رفتار ہے اس کو (ب) پر کے ایک خط (ق) سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ متوازی الانضلاع (ف) رقی کی تکمیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ وتر (ر) گولے کی رفتار کو سمندر کے لحاظ سے مقدار اور سمت دونوں میں تعبیر کرے گا۔ اس لیے (ر) کو صوب سوال (ب) کے علی القواکیم ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر زاویہ (ف) (ر) طہ ہو جس میں توپ کو نشانہ کی شے نظر آنے کے بعد گھمانا پڑتا ہے تو

$$\text{جب طہ} = \frac{\text{ف}}{\text{ب}} = \frac{\text{جہاز کی رفتار}}{\text{گولے کی رفتار}}$$

جہاز کی رفتار ۱۸ بحری میل فی گھنٹہ ہے اور ایک بحری میل = ۱۵۱۵ فٹ  
معمولی میل = ۶۰۸۰ فٹ، اس لیے ۱۸ بحری میل کی رفتار ۱۰۹۴۴ فٹ  
فی گھنٹہ کی رفتار کے مساوی ہے یعنی ۳۰۵ فٹ فی ثانیہ۔ پس

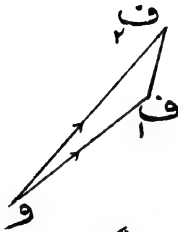
$$\text{جب طہ} = \frac{۳۰۵}{۶۰۸۰} = ۰.۰۵۰۱۵۲ \text{ اور اس لیے طہ} = ۰.۰۵۰۱۵۲ -$$

## رفتاروں کا مثلث

۱۰۔ ہم رفتاروں کو ایک اور قاعدہ سے بھی مرکب کر سکتے ہیں، یہ قاعدہ رفتاروں کے مثلث کے طور پر مشہور ہے۔ شکل (۳) میں دو رفتاریں (ف) (ق) سے تعبیر ہوئی تھیں اور ان کا حاصل (ر) سے۔ لیکن ان دو رفتاروں کو (ف) (ب) سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے اور ان کے حاصل کو (ر) سے۔ پس ہمیں صوب ذیل قاعدہ ملتا ہے:

(۱۱) اگر دو رفتاریں ایک مثلث کے دو ضلعوں سے

جو ترتیب دار لگے ہوں تعبیر ہوں تو ان کا حاصل تیسرے ضلع سے تعبیر ہوگا جبکہ اسے سمت میں پہلے ضلع سے دوسرے ضلع تک لیا جائے  
مثلاً فرض کرو کہ لمحات ۱، ۲، ۳ پر کسی متحرک نقطہ کی رفتاریں کسی پیمانہ پر خطوط



شکل (۶)

و ف اور و ف سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں یہ خطوط  
و میں سے کھینچے گئے ہیں تو ف و ف سے اسی پیمانہ پر  
وہ زاوہ رفتار تعبیر ہوگی جو نقطہ نے اس وقت میں حاصل کی ہے۔  
کیونکہ ہم ایک ایسے فریم کا تصور کر سکتے ہیں جو  
وقت ت پر ذرہ کی یکساں رفتار و ف سے حرکت کر رہا

ہو۔ وقت ت پر کی رفتار و ف کو فریم کی رفتار و ف اور اس کے لحاظ سے ایک رفتار  
ف ف کا مرکب سمجھا جاسکتا ہے۔ صریحاً یہ مؤخر الذکر رفتار رفتار کا اضافہ ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک گاڑی ۴۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے اور ایک شخص  
گاڑی سے ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اُس سمت میں کودتا ہے جو گاڑی کی رفتار کی  
سمت کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ زمین کے لحاظ سے اُس کی رفتار کیا ہے۔  
۲۔ ایک ریلوے ٹرین پر جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت  
کر رہی ہے ایک گولی کی زد پڑتی ہے جس کو افقاً اور ٹرین کے علی القوایم  
۴۴ فٹ کی رفتار سے فائر کیا گیا ہے۔ اُس رفتار کی سمت اور مقدار معلوم  
معلوم کرو جس سے گولی ایک شخص کو جو ٹرین میں ہے ٹرین کی طرف آتی  
نظر آئے گی۔

۳۔ ایک جہاز جس کا سر شمال مشرق کی جانب ہے ۱۲ بحری میل کی شرح  
سے سمندر میں جس کی موجیں جنوب مشرق کی جانب ۵ بحری میل کی شرح  
سے بہہ رہی ہیں حرکت کر رہا ہے۔ ڈھائی گھنٹوں میں جہاز کتنی دور جائیگا۔  
۴۔ ایک ٹرین ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے اور  
انتہائی سے ۳۰° کے زاویہ پر اسی سمت میں جس میں ٹرین حرکت کر رہی ہے  
بارش ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہو رہی ہے۔ ٹرین کی کھڑکیوں پر بارش  
کے قطرے کس سمت میں گرتے نظر آئیں گے۔

۵۔ ایک جہاز کا راستہ جانب جنوب ہے اور اس کی چال ۲۰ بحری میل



ہوا مغرب سے چل رہی ہے لیکن جہاز کے دو دکش سے دھواں شمال سے مشرقی جانب ۳۰ کی سمت میں جاتا ہوا دکھائی دیتا ہے۔ ہوا کی رفتار کیا ہے۔

۶۔ ایک شخص ایک نہر کو جو ایک میل چوڑی ہے عبور کرنا چاہتا ہے۔ وہ بہاؤ کے مخالف کنارے سے ۳۰ کا زاویہ بناتے ہوئے اپنی کشتی کہتا ہے۔ اُسے عبور کرنے میں کتنی دیر لگے گی اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اپنی کشتی چلائے اور بہاؤ کی رفتار بھی ۴ میل فی گھنٹہ ہو۔

۷۔ ایک نہر کے بہاؤ کی رفتار ۱۰ ہے اور ایک شخص اپنی کشتی رفتار ب سے چلا سکتا ہے۔ اس شخص کو اپنی کشتی کس سمت میں چلانی چاہئے اگر وہ ساحل کے ایک ایسے نقطہ پر پہنچنا چاہے جو اُس کی روانگی کے نقطہ کے ٹھیک مقابل ہو۔ نیز اُسے کس سمت میں کشتی کہنی چاہئے کہ وہ نہر کو کم سے کم وقت میں عبور کرے۔

(۱۲) ۸۔ ایک جہاز جس کا سر جانب جنوب ہے ایک نہر میں جس کا بہاؤ جانب مغرب ہے جا رہا ہے۔ دو گھنٹوں کے ختم پر معلوم ہوا کہ جہاز جنوب سے جانب مغرب ۱۵ کی سمت میں ۳۶ میل طے کر چکا ہے۔ جہاز اور نہر کی رفتاریں معلوم کرو۔

۹۔ ایک شخص جو جانب مشرق ۳ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سفر کر رہا ہے معلوم کرتا ہے کہ ہوا ٹھیک شمال سے چلتی ہوئی محسوس ہو رہی ہے۔ لیکن جب وہ اپنی چال دگنی کرتا ہے تو اُسے ہوا شمال مشرق سے چلتی ہوئی معلوم ہوتی ہے۔ ہوا کی سمت اور اس کی رفتار معلوم کرو۔

## اسراع

۱۱۔ اسراع رفتار کے اضافہ کی شرح ہے۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک متحرک نقطہ کی رفتار ایک ثانیہ میں بقدر مقدار ع کے بڑھتی ہے خواہ یہ ثانیہ کوئی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی حرکت میں ایکساں اسراع ع فی ثانیہ ہے۔ مثلاً یہ معلوم ہوا ہے کہ جب ایک پتھر یا کوئی جسم جاذبہ ارتکاب

تحت کرتا ہے تو اس کی رفتار میں ایک خاص مستقل رفتار  $c$  فی ثانیہ کا اضافہ ہوتا ہے جہاں  $c$  سے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر ہوتی ہے۔ پس ہم کہتے ہیں کہ ایک گرتا ہوا پتھر  $c$  فی ثانیہ یعنی تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے۔

بالعموم اسراع ایکساں نہیں ہوگا، رفتار کے اضافہ کی شرح سفر کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوگی۔ کسی لمحہ پر اسراع معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کے ایک صغیر وقفہ فرت میں رفتار کی تبدیلی کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ اگر رفتار کا اضافہ فرو ہو تو ہم کہتے ہیں کہ  $\frac{فرق}{فرت}$  اس لمحہ پر اسراع ہے

جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے۔ اسراع بلاشبہ مقدار اور علامت دونوں رکھے گا کیونکہ رفتار یا تو بڑھ رہی ہوگی یا گھٹ رہی ہوگی۔ جب رفتار گھٹتی ہو تو اسراع کی علامت منفی لینی چاہئے۔ منفی اسراع کو ابطاء کہا جاتا ہے۔ مثلاً ابطاء  $c$  کا مطلب یہ ہوگا کہ رفتار بقدر مقدار  $c$  فی اکائی وقت گھٹتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک فردور ایک مکان کی چھت سے گرا اور ۴۸ ثانیوں میں زمین پر آ رہا۔ اس نے زمین کو کس رفتار سے ضرب لگائی جبکہ جاذبہ کی وجہ سے اسراع ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو۔

۲۔ ایک ٹرین کی رفتار ایک دئے ہوئے لمحہ پر ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے اور وہ ایک فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتی ہے۔ ۲۰ ثانیوں کے بعد اس کی رفتار معلوم کرو۔

۳۔ ایک ٹرین بریک ڈالنے کے دس ثانیوں بعد رکتی ہے۔ اگر ابطاء ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو ٹرین کی رفتار بریک ڈالتے وقت کیا تھی۔

۴۔ ایک جسم ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ابتدا کرتا ہے اور ۶ فٹ فی ثانیہ

فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار حاصل کرنے میں اسے کتنی دیر لگے گی۔

۵۔ دو جسم ایک ہی لمحہ پر علی الترتیب رفتاروں ۷ اور ۱۰ سے ابتدا کرتے ہیں۔ پہلے جسم کی حرکت میں ۷ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا ابطا وقوع پذیر ہوتا ہے اور دوسرے جسم کی حرکت یکساں ہے پہلے جسم کے ساکن ہونے تک دوسرا جسم کتنی دور جائے گا۔

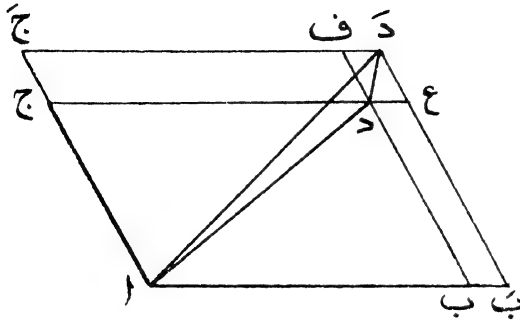
۶۔ ایک جسم سکون سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے اور چار ثانیوں تک ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے ایکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ اگر اس کے بعد اسراع دوگن جائے تو اس کے بعد پانچ ثانیوں میں جسم کتنی دور جائے گا۔

۷۔ ایک ٹرین کی رفتار ۵ ثانیوں میں ۴۰ میل فی گھنٹہ سے ۳۰ میل فی گھنٹہ میں گھٹ جاتی ہے اگر ابطاع یکساں ہو تو ساکن ہونے سے پیشتر ۱۰ اور کتنی دور جائے گی۔

۸۔ ایک جسم جو جذبہ کے تحت گر رہا ہے ۳۲.۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے۔ (اس اسراع کو (ا) سینٹی میٹر ثانیہ اور (ب) میل گھنٹہ کی اکائیوں میں بیان کرو۔

۱۲۔ اسراعوں کا متوازی الاضلاع مسئلہ۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ کی رفتار دو رفتاروں  $u$  و  $v$  سے جو معلومہ سمتوں میں ہیں مرکب ہے اور فرض کرو کہ یہ رفتاریں متغیر ہیں اور انکے اسراع  $a$  و  $b$  ہیں۔ اب اگر رفتاروں کی سمت میں دو خطوط کسی بیانیہ پر  $a$  و  $b$  کو تعبیر کرنے کے لیے کھینچے جائیں تو حاصل اسراع اسی بیانیہ پر اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا جسکے دو کنارے خطوط ہیں

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم نقطہ کی حرکت پر کسی متغیر وقفہ فرت میں غور کرتے ہیں جس میں یہی اسراع  $a$  و  $b$  ہیں۔ شکل میں

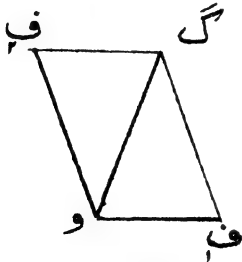


شکل (۷)

فرض کرو کہ اس وقفہ  
کی ابتداء پر 'ا ب'  
اور 'ا ج' سے  
علی الترتیب رفتاریں  
وہ 'د' تبدیل ہوتی ہیں۔  
فرض کرو کہ 'ب ب'  
اور 'ج ج' سے  
اُسی پیمانہ پر وقفہ  
فرت میں ان رفتاروں  
کے صغیر اضافے

تعبیر ہوتے ہیں یعنی وہ 'ع' فرت اور 'ع' فرت کو تعبیر کرتے ہیں۔  
تب 'ا ب'، 'ا ج' وقفہ فرت کے ختم پر رفتاروں کو تعبیر کریں گے۔  
شکل میں خطوط 'ب د'، 'ب ع'، 'ج د'، 'ج ف'، 'د'،  
رفتاروں کو تعبیر کرنے والے خطوں 'ا ب' اور 'ا ج' کے متوازی کھینچو۔  
اس طرح وقفہ فرت کی ابتداء پر حاصل رفتار 'ا د' سے تعبیر ہوگی اور وقفہ  
کے ختم پر 'ا د' سے۔ رفتار 'ا د' کو دو رفتاروں 'ا د'، 'د د' کا مرکب خیال  
کیا جاسکتا ہے اور حسب دفعہ (۱۰) 'د د' سے وقفہ فرت میں رفتار کا اضافہ  
تعبیر ہوتا ہے۔ پس اگر حاصل اسراع 'ع' ہو تو خط 'د د'، رفتار 'ع' فرت  
کو تعبیر کرے گا۔ اُسی پیمانہ پر خطوط 'د ع' اور 'د ف' سے رفتاریں 'ع' فرت

(۱۳)



شکل (۸)

اور 'ع' فرت تعبیر ہوتی ہیں  
اور 'د ع'، 'د ف' ایک  
متوازی الاضلاع ہے۔  
اگر اسراع 'ع' اور 'ع'  
کو 'و' اور 'و' شکل  
(۸) کسی پیمانہ پر تعبیر کریں

اور اگر تکمیل یافتہ متوازی الاضلاع کا وتر وگ ہو تو صریحاً وف : وف  
 = ع : ع، د : د = ع : ع، د : د ف اس لیے متوازی الاضلاع وف : وگ ف  
 (شکل ۸) اور متوازی الاضلاع د : ع د ف (شکل ۷) متشابه اور متشابه  
 واقع ہوں گے۔ اس لیے

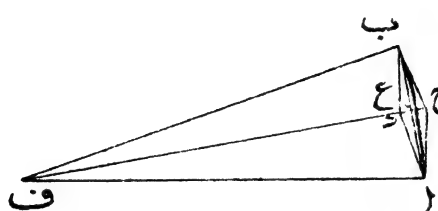
وگ : وف = د : د = ع : ع فرت : ع فرت = ع : ع  
 پس وگ اسراع ع کو اسی پیمانہ پر تغیر کرتا ہے جس پر وف اور وف  
 اسراعوں ع، اور ع کو تغیر کرتے ہیں، نیز وگ چونکہ د کے متوازی ہے  
 اس لیے وہ ع کی سمت کو بھی تغیر کرے گا اور اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔  
 یہ ظاہر ہے کہ کسی لمحہ پر اسراع کا اسی سمت میں ہونا ضروری نہیں  
 ہے جس میں رفتار ہے۔ شکل ۷ میں سمتیں د اور د، وقفہ فرت کی  
 ابتداء اور ختم پر کی رفتاروں کو تغیر کرتے ہیں۔ جب انتہا میں ہم فرت =  
 لیتے ہیں تو یہ خطوط منطبق ہو جاتے ہیں اور رفتار کی سمت اس لمحہ پر جس پر  
 وقفہ فرت لیا گیا ہے د کی سمت ہوتی ہے۔ لیکن اس لمحہ پر اسراع کی  
 سمت د ہے۔

مثلاً ہم ایک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں جو ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے  
 یعنی پہلیہ کے محیط کے کسی نقطہ کی حرکت پر جبکہ پہلیہ اپنے مرکز کے گرد یکساں رفتار و  
 سے گردش کر رہا ہو۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے دو محل دو لمحات پر ا، ب (شکل ۹) ہیں اور  
 ا، ب پر کے ماس نقطہ ج پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ د، متوازی الاضلاع  
 ا، ج ب د کی تکمیل کرتا ہے۔

پہلے لمحہ پر نقطہ کی رفتار، ج پر رفتار و ہے۔ فرض کرو کہ یہ رفتار  
 خود خط ا، ج سے تغیر ہوتی ہے۔ دوسرے لمحہ پر رفتار ج ب پر رفتار و ہے،  
 اس رفتار کو اسی پیمانہ پر خط ج ب سے یا ا د سے تغیر کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ  
 ا، ج اور ا د سے دو لمحوں پر کی رفتاریں تغیر ہوتی ہیں اس لیے خط ج د سے  
 رفتار کا اضافہ ان دو لمحات کے درمیان تغیر ہو گا۔

اب فرض کرو کہ ان دو لمحات کے درمیان ایک صغیر وقفہ فرت کا فرق ہے تو نقطہ ۱، ب ایک دوسرے سے بہت ہی قریب ہونگے اور ان کے درمیان صغیر قوس و فرت کا فاصلہ ہوگا۔ شکل میں ج د، ف میں سے گذرتا ہے خواہ ۱ ب دائرہ پر کہیں ہوں، اس لیے جب ب کو ۱ پر منطبق کیا جاتا ہے تو ج د، دائرہ کے اس نصف قطر پر منطبق ہوتا ہے جو ۱ میں سے گذرتا ہے۔ لیکن اگر



شکل (۹)

۱) پر کاسراع، ۱ میں سے گزرنے والے نصف قطر پر ہے۔  
 یہ وہ صورت ہے جس میں اسراع / رفتار کے علی القوالم ہے۔  
 اسراع کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج = ۵ = ۲ ج ع اور  
 متشابه مثلثوں سے

$\frac{1}{4}$  ع فرت : و = ب ع : ب ف  
 انتہا میں جبکہ ب ا بہت چھوٹا ہو تو ب ع یا  $\frac{1}{4}$  ب ا دائرہ  
 قوس ب ا کے نصف کے مماثل ہو جاتا ہے اور اس لیے  $\frac{1}{4}$  و فرت کے  
 مماثل ہو جاتا ہے۔ پس اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو

$$\frac{1}{4} \text{ عفت : و } = \frac{1}{4} \text{ وفت : ا}$$

یعنی

$$\frac{r}{d} = e$$

## مثالیں

۱۔ ایک ہوائی جہتی کے بادبان طول میں ۲۰ فٹ ہیں اور چکی دس ثانیوں میں ایک بار گھومتی ہے۔ ایک بادبان کے سرے پر کے ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرو۔

۲۔ ۳ فٹ نصف قطر کا ایک پہیہ ۱۰ گردش فی ثانیہ کی شرح سے گھوم رہا ہے اور اسی اثنا میں جاذبہ کی وجہ سے ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے آزادانہ گر رہا ہے۔ پہیہ کے محیط پر کے مختلف نقطوں کے حاصل اسراع معلوم کرو۔

۳۔ زمین کے استوائی قطر کو ۹۲۷۰ میل لیکر زمین کے مرکز کی جانب (۱) ایک نقطہ کا اسراع جو خط استواء پر زمین کے لحاظ سے ساکن ہے، اور (ب) ایک جسم کا اسراع جو جاذبہ کے تحت خط استواء پر ایک ایسے اسراع سے گر رہا ہے جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ۳۲۶۰.۹ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے، معلوم کرو۔ (۱۶)

۴۔ یہ فرض کر کے چاند زمین کے گرد  $\frac{1}{4}$  ۲۹ دنوں میں ۲۴۰۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اس کا اسراع جانب زمین معلوم کرو۔

۵۔ سیارے سورج کے گرد مختلف دوری مدتوں میں دائرے مرتسم کرتے ہیں اس طور پر کہ دوری مدتوں کے مربع دائروں کے نصف قطروں کے مکعبوں کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ سیاروں کے اسراع، سورج سے ان کے فاصلوں کے مربعوں کے بالعکس متناسب ہیں۔

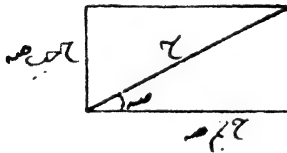
## سمتی

۱۳۔ ہم نے تین مقداریں معلوم کی ہیں، حرکت، رفتار، اور اسراع۔ ان میں سے ہر ایک مقدار قانون متوازی الانحلال کی بموجب مرکب کی جاسکتی ہے۔

وہ مقداریں جو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب ہو سکیں سمتی کہلاتی ہیں۔ سمتی میں مقدار اور سمت دونوں ہونے چاہئیں اور اس لیے اُس کو کسی پیمانہ پر ایک خط مستقیم کے ذریعہ تعبیر ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حرکت، رفتار، اور اسراع اسب کے سب سمتی ہیں۔

## ایک مستوی میں سمتیوں کی ترکیب و تحلیل

۱۴۔ سمتی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ دو سمتی قانون متوازی الاضلاع کے اطلاق سے ایک سمتی میں مرکب کئے جاسکتے ہیں۔ تعریف سے یہ بھی مستنبط ہوتا ہے کہ کسی ایک سمتی کو دو سمتیوں کے مائل سمجھا جاسکتا ہے جبکہ یہ دو سمتی ایک متوازی الاضلاع کے کناروں سے تعبیر ہوں جو اس طریقہ سے بنایا گیا ہو کہ ابتدائی سمتی اس کے وتر سے تعبیر ہو جائے۔ یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کوئی سمتی دو دوسرے سمتیوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔



شکل (۱۰)

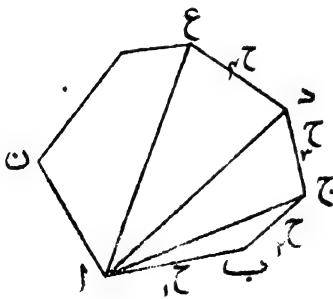
بالخصوص اگر ہم ایک قائم الزاویہ متوازی الاضلاع بنائیں جس کا وتر سمتی  $C$  کو تعبیر کرے تو معلوم ہوگا کہ سمتی  $C$  دو سمتیوں  $A$  و  $B$  میں تحلیل ہو سکتا ہے جہاں یہ اجزائے تحلیل ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایسی سمتیوں میں ہیں کہ سمتی  $C$  ان کے ساتھ زاوے  $\theta$  اور  $\phi$  بنا رہا ہے۔

اگر ہم ایک مستوی میں دو ثابت قائم محاوروں  $A$  و  $B$  میں دیکھتے کہ کوئی سمتی  $C$  دو اجزائے ترکیبی  $A$  و  $B$  میں



(۱۷) ان محوروں کے متوازی تحلیل کیا جاسکتا ہے جہاں صہ وہ زاویہ ہے جو ح، محور دلا کے ساتھ بناتا ہے۔ اجزائے ترکیبی ح جم صہ، ح جب صہ کو ح کے اجزائے ترکیبی محوروں دلا، و ما کے متوازی کہا جاتا ہے۔

متعدد سمتیوں ح، ح، ح، ح، ح، ح کو مرکب کرنیکے دو طریقے ہیں۔ پہلا طریقہ یہ ہے کہ ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د.... ن بنایا جائے ایسا کہ اس کے اضلاع ا ب، ب ج، ج د، د.... ن علی الترتیب سمتیوں ح، ح، ح، ح، ح، ح.... ح کو تعبیر کریں تو ان ان کے حاصل کو تعبیر کرے گا۔ کیونکہ ح، ح کو اول سمتی ح میں جو ا ج سے تعبیر ہوتا ہے مرکب کیا جاسکتا ہے، پھر ح اور ح کو اس سمتی میں مرکب کیا جاسکتا ہے جو ا د سے تعبیر ہوتا ہے اور علی ہذا تا آنکہ بالآخر ان حاصل ہو۔



شکل (۱۱)

دوسرے طریقہ یہ ہے کہ ہم ہر سمتی کو مثلاً ح کو قائم محوروں دلا، و ما پر اس کے اجزائے ترکیبی

ح جم صہ، ح جب صہ میں تحلیل کر سکتے ہیں تو اس طرح ن سمتی، ۲ سمتیوں میں

تخلیل ہوں گے جن میں سے  $n$  سمتی محور ولا کے متوازی اور  $n$  سمتی محور ولا کے متوازی ہوں گے۔ پہلے جٹ کو محور ولا کے متوازی ایک واحد سمتی

$$\text{لا} \equiv \text{ح} \text{ جم صم} + \text{ح} \text{ جم صم} + \dots$$

میں مرکب کیا جاسکتا ہے اور دوسرے جٹ کو محور ولا کے متوازی ایک واحد سمتی

$$\text{ما} \equiv \text{ح} \text{ جب صم} + \text{ح} \text{ جب صم} + \dots$$

میں۔ اس طرح دو سمتی محوروں ولا، ولا کے متوازی لا اور ما حاصل ہوں گے اگر ان کا حاصل سمتی ح ہو جو ولا کے ساتھ زاویہ صم بنائے تو

$$\text{ح} \text{ جم صم} = \text{لا} = \text{ح} \text{ جم صم} + \text{ح} \text{ جم صم} + \dots (۱)$$

$$\text{ح} \text{ جب صم} = \text{ما} = \text{ح} \text{ جب صم} + \text{ح} \text{ جب صم} + \dots (۲)$$

ح کی عددی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کے مربع لیتے ہیں اور انہیں جمع کرتے ہیں تو

$$\text{ح}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

$$(\text{ح} \text{ جم صم} + \text{ح} \text{ جم صم} + \dots)^2 + (\text{ح} \text{ جب صم} + \text{ح} \text{ جب صم} + \dots)^2 =$$

$$\text{ح}^2 + \text{ح}^2 + \dots + \text{ح}^2 + \text{ح}^2 + \dots = (\text{جم صم} + \text{جم صم} + \dots)^2 + (\text{جب صم} + \text{جب صم} + \dots)^2$$

$$+ \dots$$

$$\text{ح}^2 + \text{ح}^2 + \dots + \text{ح}^2 + \text{ح}^2 + \dots = (\text{جم صم} - \text{جم صم} + \dots)^2 + (\text{جب صم} - \text{جب صم} + \dots)^2$$

حاصل ح کی سمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کی متناظر طرفین کو تقسیم کرتے ہیں تو

$$\frac{\dots\dots + \text{جم صه} + \text{جم صه}}{\dots\dots + \text{جب صه} + \text{جب صه}} = \frac{\text{ما}}{4} = \text{مس صه}$$

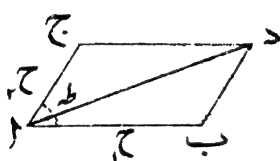
اگر صرف دو سمتیاں ج<sub>۱</sub> اور ج<sub>۲</sub> ہوں جو ایک دوسرے کے ساتھ  
زاویہ طہ بنائیں تو ہم رکھ سکتے ہیں ص<sub>۱</sub> - ص<sub>۲</sub> = طہ اور اس طرح

$$2\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau_4$$

چونکہ ح صریحاً ایک متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے ح، ح طول کے ہیں اور زاویہ طہ پر ملتے ہیں اس لیے نتیجہ بالاکو راست مثلث ا د ج کے علم ہند سہ سے جس میں ج پر کا زاویہ صریحاً ۹۰° طہ ہے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ پس

$$(b-\pi) \int_0^1 \tau \tau^r - \tau^r + \tau^r = \tau^r$$

جو صریحاً اوپر کے چلے کے مائل ہے۔  
ہم اس طریقہ کی توضیح کے لیے  
کہ سستی ایک سستی میں قائم اجزائے ترکیبی  
میں تحلیل کئے جا سکتے ہیں دو مثالیں  
لے رہے ہیں۔



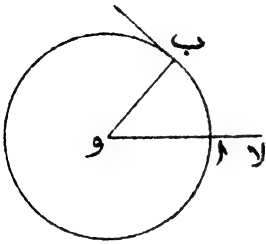
شکل (۱۲)

۱۔ شکل ۲ صفحہ (۸) میں فرض کرو کہ جہاز کی سمت (ا ب شکل ۵) کو محور ولا یگیا ہے اور اُس سمت کو جس میں گولی چلتی ہے محور و ما لیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ گولی کو رفتار و سے فائر کیا گیا ہے جو ولا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ جہاز کی رفتار ع ہے۔ حاصل رفتار و ما پر ہونی چاہئے تاکہ ولا پر رفتار (فرض کرو لا) صفر ہو۔ لیکن

$$7 + 9 = 16$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

اس لئے



شکل (۱۳)

یہ وہی نتیجہ ہے جو حاصل ہو چکا ہے۔

۲۔ ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرنا جو یکساں رفتار و سے نصف قطر کے ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ وقت  $t = 0$  پر ذرہ کا

محل  $A$  ہے اور  $LA$  کا محور  $OA$  ہے۔

وقت  $t$  کے بعد ذرہ 'قوس کا طول

و  $t$  طے کرے گا، اس لیے اگر وقت  $t$  کے بعد اس کا محل  $B$  ہے تو زاویہ

$\angle BOA$  دائری ناپ میں  $\frac{v}{r} t$  ہے۔ ایسے  $B$  پر رفتار کی سمت یعنی

$B$  پر کے مماس کی سمت  $OL$  کے ساتھ زاویہ  $\frac{\pi}{2} + \frac{v}{r} t$  بنائے گی

(۱۹)

اور اس لیے رفتار کے اجزائے ترکیبی محاور  $OL$  و  $MA$  پر  $v$  اور  $v$  ہوں تو

$$v_x = v \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{v}{r} t\right) = -v \sin\left(\frac{v}{r} t\right)$$

$$v_y = v \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{v}{r} t\right) = v \cos\left(\frac{v}{r} t\right)$$

$v$  اور  $v$  اس لیے لمحات کے تفرق کرنے پر

حاصل ہوتا ہے

$$-v \sin\left(\frac{v}{r} t\right)$$

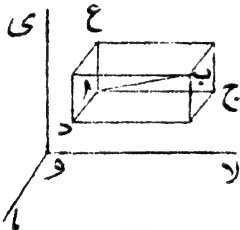
اسی طرح  $MA$  پر اسراع  $\frac{dv_y}{dt}$  یعنی

$$-v \cos\left(\frac{v}{r} t\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔  
 ان اسراعوں کو مرکب کرنے سے ب و پراسراع  $\frac{1}{2}$  حاصل ہوتا ہے  
 اور یہ وہی نتیجہ ہے جو صفحہ (۲۳) پر حاصل کیا جا چکا ہے۔

## فضاء میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

یہ ہو سکتا ہے کہ وہ سمتی جنہیں مرکب کرنا ہے ایک ہی مستوی میں  
 نہ ہوں۔ لیکن ان کا حاصل دریافت کرنے کا طریقہ اصولاً وہی ہے۔ چنانچہ  
 ہم فضاء میں ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د.... ن بناتے ہیں ایسا کہ  
 اس کے اضلاع ا ب، ب ج، ج د.... م ن سمتیوں ج، ا، ح، ب، ج  
 کو تعبیر کریں۔ حسب صورت  
 ماسبق یہ آسانی کے ساتھ  
 ثابت کیا جا سکتا ہے کہ  
 حاصل سمتی ان ہے۔  
 بالعموم سہولت  
 اس میں ہوتی ہے کہ ہر  
 سمتی کو فضاء میں قائم محوروں  
 کے متوازی تحلیل کیا جائے۔



شکل (۱۴)

اگر سمتی ا ب دیا گیا ہو تو ہم ا میں سے اور اسی طرح ب میں سے  
 تین مستویاں محدودوں کے مستویوں کے متوازی کھینچتے ہیں۔ ان سے  
 ایک قائم متوازی السطوح حاصل ہوتا ہے جس کا ایک وتر ا ب ہے۔  
 اس کے کناروں ا ج، ا د، ا ع سے تین سمتی تعبیر ہوں گے جو  
 ا ب کے عوض لیے جا سکتے ہیں یہ سمتی جو محوروں کے متوازی ہیں سمتی  
 ا ب کے اجزائے ترکیبی ہیں۔  
 فرض کرو کہ ن سمتی ہیں اور سمتی ح کے سمتی زاوے ع، ی، ج

(۲۰) سے تعبیر ہوتے ہیں۔ حسب طریقہ بالا ہر سمتی ح کو محوروں کے متوازی تین اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، ان اجزائے ترکیبی کی مقداریں ہیں

$$\text{ح جم عین} + \text{ح جم یس} + \text{ح جم جس}$$

اس طریقہ سے ۳ سمتی حاصل ہوں گے، ان میں سے محور لا کے متوازی سمتوں کو ایک واحد سمتی لا میں مرکب کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{لا} = \text{ح جم عم} + \text{ح جم عم} + \text{ح جم عم} + \dots + \text{ح جم عم} \dots (۳)$$

پس اس پورے نظام کی بجائے ایک واحد سمتی لا کو لیا جاسکتا ہے، اسی طرح محور ما اور محوری کے متوازی سمتوں کو ایک ایک واحد سمتی میں مرکب کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\text{ما} = \text{ح جم بہ} + \text{ح جم بہ} + \dots + \text{ح جم بہ} \dots (۴)$$

$$\text{ے} = \text{ح جم جہ} + \text{ح جم جہ} + \dots + \text{ح جم جہ} \dots (۵)$$

ان تین سمتوں لا، ما، ے کا حاصل اور اس لیے ابتدائی سمتوں

حاصل صریحاً اس قائم الزاویہ متوازی السطوح کا ایک وتر ہے جس کے کنارے لا، ما، ے ہیں۔ اگر اس حاصل کے طول کو ح سے تعبیر کیا جائے اور اس کے سمتی زاویوں کو عہ، بہ، جہ سے تو

$$\text{ح} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ے}$$

$$\text{اور جم عہ} = \frac{\text{لا}}{\text{ح}}, \text{جم بہ} = \frac{\text{ما}}{\text{ح}}, \text{جم جہ} = \frac{\text{ے}}{\text{ح}}$$

اس لیے حاصل مقدار اور سمت دونوں میں پوری طرح معلوم ہو گیا۔

## مرکز ہندسی

۱۶۔ فرض کرو کہ سمتوں کا ایک نظام سمت میں  $و$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$  سے تعبیر سے اور مقدار میں  $ک$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$ ،  $ک$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$ ،  $ک$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$  سے تعبیر ہوتا ہے جہاں  $ک$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$ ،  $ک$ ،  $ا$ ،  $و$ ،  $ا$  کوئی مقدار ہیں۔ فرض کرو کہ  $ا$  کے مجدد  $و$  میں سے گزرنے والے محوروں کے لحاظ سے  $لا$ ،  $ما$ ،  $ی$  ہیں اور ان محوروں کے لحاظ سے  $و$  کے سمتی زاوے  $ع$ ،  $بر$ ،  $جر$  ہیں اور سمتی  $ک$ ،  $ا$ ،  $و$  کی مقدار  $ح$  ہے۔ ان محوروں پر اس سمتی کے اجزائے ترکیبی ہیں

$$ح \text{ جر } ع = ک \text{ و } ا \text{ جر } ع = ک \text{ لا}$$

$$ح \text{ جر } بر = ک \text{ و } ا \text{ جر } بر = ک \text{ ما}$$

$$ح \text{ جر } جر = ک \text{ و } ا \text{ جر } جر = ک \text{ ی}$$

اس لئے مساواتوں (۳)، (۴)، (۵) کو لکھا جاسکتا ہے اس طرح

$$لا = ح \text{ ک لا}، ما = ح \text{ ک ما}، ی = ح \text{ ک ی}$$

(۲۱) اس نتیجہ کی تفہیم کے لیے ہم نقطوں کے ایک نظام کے مرکز ہندسی کے تخیل سے استفادہ کرتے ہیں۔ بموجب تعریف نقطوں کے کسی نظام کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے کہ اس کا فاصلہ محدودوں کے تین مستویوں میں سے کسی سے ان فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے نظام کے تمام نقطوں کے ہیں جبکہ ہر فاصلہ کو اس کی واجب علامت کے ساتھ لیا گیا ہو

اس تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم خواہ کوئی مستوی لیں اُس سے مرکز ہندسی کا فاصلہ ان فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے ان نقطوں کے ہیں۔ کیونکہ اگر روپوں نقطہ کے محدود لار، مار، ی رہوں تو مرکز ہندسی کے محدود (فرض کرو لا، ما، ی) ہوں گے

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i, \bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \dots (9)$$

اور مرکز ہندسی سے کسی مستوی

$$L + M + Y + D = 0$$

کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + Y^2 + D^2}} (L + M + Y + D) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + Y_i^2 + D^2}} (L_i + M_i + Y_i + D) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{L_i + M_i + Y_i + D}{\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + Y_i^2 + D^2}} = 0$$

جس سے نتیجہ ثابت ہے۔

اب فرض کرو کہ ان نقطوں میں سے ک نقطے سب کے سب نقطہ لا، مار، ی پر منطبق ہوتے ہیں ک نقطے لا، مار، ی پر اور علیٰ ہذا القیاس تو مرکز ہندسی کے محدود ہوں گے (مساواتوں (۷) کی رو سے)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n} \\ \bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n} \\ \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \end{array} \right. \dots (8)$$



(۲۲) جہاں عل جمع فضاء کے ان مختلف نقطوں پر لیا گیا ہے جن پر اصلی نقطے مجتمع ہیں۔ ان نقطوں کو 'ا' 'ب' 'ج' .... سے تعبیر کرو تو نقطہ 'ا' 'ب' 'ج' کو ضاربوں کے 'پ' .... کے جواب میں نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' .... کا مرکز ہندسی کہتے ہیں۔

ان نتیجوں کے ذریعہ مساواتیں (۶)

$$لا = لا \times ک، ما = ما \times ک، ی = ی \times ک \quad (۹)$$

میں تحویل ہوتی ہیں۔ اس لیے سمتیوں کے مندرجہ بالا جٹ کا حاصل خط وج کی سمت

میں ہے اور اس کی مقدار وج  $\times$  ک ہے۔ مساواتوں (۹) کی رو سے

ضارب ک کوئی عدد ہو سکتے ہیں مثبت یا منفی اس لیے مجموعہ  $\times$  ک

مثبت، صفر یا منفی ہو سکتا ہے۔ بالخصوص اگر سمتی مقدار اور سمت

دونوں میں 'ا' 'ب' 'ج' .... 'ا' 'ب' 'ج' سے تعبیر ہوں تو حاصل سمت وج

میں ہے اور اس کی مقدار  $n \times وج$  ہے جہاں  $n$  سمتیوں کی تعداد

ہے اور نقطہ ج حسب تعریف بال مرکز ہندسی ہے۔ پس ص ب ذیل مسئلہ

حاصل ہوتا ہے:-

مسئلہ۔ اگر مقداروں ک،  $\times$  و 'ا' ک،  $\times$  و 'ب' ....

کے سمتی خطوط و 'ا' و 'ب' .... پر عمل کریں تو ان کے حاصل کی

مقدار (ک + ک + ..... ) و ثا ہوگی اور وہ سمت

وٹ میں عمل کرے گا جہاں 'ث' 'ا' 'ل'..... کام کر رہی تھی  
ضاربوں کو 'ک' 'پ'..... کے جواب میں ہے۔

## مثالیں

۱۔ دو سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جن کی مقداریں ۵ 'ف' ۱۲ 'ف' ہیں  
اور جو ایک دوسرے کے علی القوام ہیں۔

۲۔ ایک سمتی 'ف' دو سمتیوں کا حاصل ہے جو اس کے ساتھ مخالف سمتوں میں ۳۰° اور ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں۔ یہ مؤخر الذکر سمتی کتنے بڑے ہیں۔

۳۔ معلومہ مقداروں کے دو سمتیوں کی سمتیں کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں کہ ان کا حاصل دی ہوئی مقدار اور سمت کا ہو۔ یہ کب ناممکن ہوگا۔

۴۔ ثابت کرو کہ اگر دو معلومہ سمتیوں کے درمیانی زاویہ کو بڑھا دیا جائے تو ان کا حاصل گھٹتا ہے۔

۵۔ کن شرطوں کے تحت مقداروں ۷ 'م' ۲۴ 'م' اور ۲۵ کے سمتیوں کے ایک نظام کا حاصل صفر کے مساوی ہوگا۔

۶۔ طولوں 'ف' 'ف' اور 'ف' ۲۷ کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور باہم علی القوام ہیں۔ حاصل کی مقدار اور وہ زاویے معلوم کرو جو حاصل کی سمت اور ہر جزو ترکیبی کی سمت کے درمیان ہیں۔ (۲۳)

۷۔ طولوں 'ف' ۲۱ 'ف' ۳۰ کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ان کی سمتیں اس نقطہ پر ملنے والے ایک مکعب کے تین رخوں کے وتروں کی سمتیں ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۸۔ تین سمتی ایک متوازی السطوح کے تین رخوں کے وتروں سے جو ایک راس پر ملتے ہیں تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا حاصل متوازی السطوح کے اس وتر کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جو اسے کھینچا گیا ہے۔

۹۔ مثلث (ج ج) کے مستوی میں ایک نقطہ د ہے اور اس کے

اندرونی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ ثابت کرو کہ سمتیوں  $\text{ا} \times \text{د}$ ،  $\text{ب} \times \text{ج}$ ،  $\text{د} \times \text{ا}$  کا حاصل (1 + ب + ج) ع د ہے جہاں  $\text{ا}$ ،  $\text{ب}$ ،  $\text{ج}$  'شلت' کے ضلعوں کے طول ہیں۔

۱۰۔ دو متوازی الاضلاع  $\text{ا ب ج د}$ ،  $\text{ا ب ج د}$  ایک ہی مستوی میں ہیں۔ ان سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جو ایک نقطہ سے (ا)  $\text{ا}$ ،  $\text{ب}$ ،  $\text{ج}$ ،  $\text{د}$  کے متوازی اور ان کے متناسب کھینچے گئے ہیں۔

۱۱۔ اگر شلت  $\text{ا ب ج}$  کے مائط دائرہ کا مرکز و ہو اور مرکز عمودی ف تو ثابت کرو کہ وف، سمتیوں و ا، و ب اور و ج کا حاصل ہے۔ نیز کہ ۲ ف، و، سمتیوں ف ا، ف ب، ف ج کا حاصل ہے۔

۱۲۔ ایک دائرے کے وتر ا و ب اور ج و د علی القیاس متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سمتیوں و ا، و ب، و ج، و د کا حاصل سمتی و ف کے دو چند سے قیصر ہوتا ہے جہاں ف، دائرہ کا مرکز ہے۔

## عام مثالیں

(ان مثالوں میں اسراع بوجہ جاذبہ ارض کو ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ فرض کرو)

۱۔ ایک نقطہ ۲، ۳، ۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتاریں ایک ساتھ ان سمتوں میں رکھتا ہے جو اُس نقطہ کی ہیں جو ایک شلت مساوی الاضلاع کے تین ضلعوں کو ترتیب وار مرتب کرتا ہے۔ اول الذکر نقطہ کی رفتار کی مقدار معلوم کرو۔

۲۔ ایک نقطہ ایک ساتھ رفتاریں (ہر ایک کے مساوی) ان خطوں کی سمتوں میں رکھتا ہے جو ایک منظم سدس کے مرکز سے اس کے پانچ راسوں تک کھینچے گئے ہیں۔ حاصل رفتار کی مقدار اور سمت معلوم کرو۔

۳۔ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ایک شامیانہ جو عرشے کے اوپر ۴ فٹ بلند ہے عرشہ کے اُس حصہ کو بارش سے بچاتا ہے جو شامیانہ کے کنارے کے انتصابی فاصلے سے ۴ فٹ سے زیادہ پیچھے ہے لیکن جب جہاز ساکن ہوتا ہے تو

عرشہ کے خشک وتر حصوں کا خبا فاصل اس ظل سے ۶ فٹ آگے ہوتا ہے۔ جہاز کی رفتار معلوم کرو اگر بارش کی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۴۔ ایک جہاز پر جو خط استوا پر مشرق سے مغرب کی طرف جا رہا ہے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دن ظہر (مقامی وقت) سے دوسرے دن ظہر (مقامی وقت) تک فاصلہ طے شدہ ۲۰ میل ہے۔ دن کتنا طویل ہو گا اگر جہاز اسی شرح سے مغرب سے مشرق کی جانب چلے۔

۵۔ ایک ریل کی پیٹری مشرقاً غرضاً عرض بلد لہ میں واقع ہے۔ ایک میل (۲۴)

کو اس پیٹری پر کس شرح سے چلنا چاہئے کہ سورج ہمیشہ اس کے ٹھیک جنوب میں رہے۔

۶۔ ایک جہاز کا ٹھیک راستہ اور رفتار معلوم کرو جو جانب شمال (موجب کمپاس) ۱۰ بحری میلوں کی شرح سے ۴ بحری میل کے پہاؤ میں جو جنوب مشرق کی جانب ہے جا رہا ہے۔ نیز کمپاس سے سمت کی وہ تبدیلی معلوم کرو تاکہ جہاز ٹھیک شمالی راستہ اختیار کرے۔

۷۔ ایک سیکل سوار ہوا کی رفتار سے زیادہ تیز سیکل چلاتا ہے اور ہوا کی سمت سمجھنے میں غلطی کرتا ہے اور اس سمت کو ہوا کی سمت سمجھتا ہے جس میں ہوا اُسے آکر لگتی ہے جبکہ وہ متحرک ہے۔ ثابت کرو کہ ہوا ہمیشہ اُس کے غلاف چلتی ہوئی معلوم ہوگی خواہ وہ کسی سمت میں سیکل چلائے۔

۸۔ ایک جہاز جو شرقاً ۲۰ بحری میل کی چال سے جا رہا ہے بوقت ۱۱ بجے صبح ایک روشنی کے مینار سے گزرتا ہے۔ یک دوسرا جہاز جو اسی شرح سے جنوب میں جا رہا ہے اُسی نقطہ کو ایک بجے دوپہر پر عبور کرتا ہے۔ کس وقت وہ باہم قریب ترین ہوں گے اور اُس وقت ان کے درمیان کیا فاصلہ ہو گا۔

۹۔ دو ذرے ایک دائرے کے محیط میں علی الترتیب رفتاروں ۹ اور

۲ سے مخالف سمتوں میں حرکت کرتے ہیں گرن محلوں میں ان کی اضافی رفتار بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اور اس وقت اس کی قیمتیں کیا ہونگی۔

۱۰۔ دو ذروں کی اضافی حرکت معلوم کرو جو ایک ہی رفتار ۹ سے حرکت کر رہے ہیں لیکن ایک ذرہ نصف قطر ۱ کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اور دوسرا

ایک قطر پر حرکت کرتا ہے۔

۱۱۔ دو ذرے یکساں طور پر خطوطِ مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک معلومہ وقت پر ان کے درمیان فاصلہ  $\frac{1}{2}$  ہے اور ان کی اضافی رفتار  $\frac{1}{2}$  ہے اس اضافی رفتار کے اجزائے ترکیبی  $\frac{1}{2}$  کی سمت میں اور اس کے عمود  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  ہیں۔ ثابت کرو کہ جب وہ باہم قریب ترین ہوتے ہیں تو ان کے درمیان فاصلہ  $\frac{1}{2}$  ہے اور وہ اس محل پر وقفہ  $\frac{1}{2}$  کے بعد پہنچتے ہیں۔

۱۲۔ ایک کھیت میں تین گھوڑے ایک خاص لمحہ پر ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راسوں پر ہیں۔ ایک شخص کے لحاظ سے جو ایک طرف جارہا ہے گھوڑوں کی اضافی حرکت سمت میں مثلث کے ضلعوں کے اطراف (ایک ہی جہت میں) اور مقدار میں شخص کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ تین گھوڑے ہم نقطہ خطوں پر حرکت کر رہے ہیں۔

۱۳۔ دو نقطے نصف قطروں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  کے ہم مرکز دائرے ایسی رفتاروں سے متسم کرتے ہیں جو نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ اضافی رفتار اس خط کے متوازی ہے جو ان نقطوں کو ملاتا ہے جبکہ ان نقطوں سے یکجہتی ہوئے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ  $\frac{1}{2}$  جم  $\frac{1}{2}$  ہو۔

۱۴۔ ایک پتھر کو ایک غبارے سے جو اتفاقاً حرکت کر رہا ہے چھوڑا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ  $\frac{1}{2}$  ثانیہ ہوا میں رہتا ہے اور زمین سے ایسی سمت میں ٹکراتا ہے جو انتصابی سے  $15^\circ$  درجہ کا زاویہ بناتی ہے۔ غبارے کی رفتار معلوم کرو۔

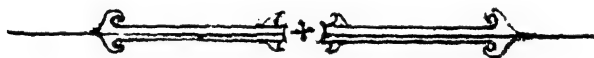
۱۵۔ ایک گولہ اوپر وار سمت میں افق کے ساتھ  $30^\circ$  درجہ کے زاویہ پر  $24$  فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک مکان کی چھت سے پھینکا گیا ہے۔ پہلے اور دوسرے ثانیوں کے ختم پر اس کی حرکت کی سمتیں اور نیز اس کی رفتاریں معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک گولہ ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہوا میں اچھالا گیا اور ایک ثانیہ کے ختم پر معلوم ہوا کہ وہ اچھال کی سمت کے علی القوائم خط میں حرکت کر رہا ہے۔ اس لمحہ پر اس کی رفتار کیا ہے۔

۱۷۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ گولی کی رفتار ایک یکساں افقی رفتار ہے جو آواز کی رفتار کے ن گنے کے مساوی ہے تو ثابت کرو کہ وہ نقطے جن پر گولی کے فائر کرنے کی اور گولی کے نشانے پر لگنے کی آوازیں ایک ساتھ سُنانی لگتی ہیں خروج المرکزین کے ایک قطع زائد پر واقع ہیں۔ اس صورت کا امتحان کرو جس میں ن اکائی کے تقریباً مساوی ہو۔

۱۸۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائری مدار میں ۲۹،۶ کیلومیٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتی ہے اور نور کی رفتار ۳۰۰ کیلومیٹر فی ثانیہ ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی حرکت کی وجہ سے سورج کا ظاہری ہٹاؤ کیا ہے۔

۱۹۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائرہ کو ایک سال میں یکساں طور پر مرتسم کرتی ہے اور سورج اور زمین کے مرکزوں کے درمیان سورج کے ۲۲ نصف قطروں کا فاصلہ ہے اور سورج کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا ۱۰۸ گنا ہے تو زمین کے سایہ کے راس کی رفتار معلوم کرو اگر سورج کے نصف قطر کو طول کی اکائی اور ایک سال کو وقت کی اکائی فرض کیا جائے۔



(۲۲)

## دوسرا باب

### قوت اور قوانین حرکت

### قوانین نیوٹن

۱۔ ہم قبل ازیں بیان کر چکے ہیں کہ قوانین حرکت وہ مواد ہے جسے تجربی علم الجہل نے نظری علم الجہل کے واسطے ہمیا کیا ہے تاکہ اس سے کام لیا جائے۔ نیوٹن نے ان قوانین کو جامع شکل میں بیان کیا ہے۔

۱۔ قانون اول۔ ہر جسم اپنی حالت سکون میں رہتا ہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں تا آنکہ وہ قوت غلط سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور ہو جائے۔

۲۔ قانون دوم۔ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط مستقیم کی سمت میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

۳۔ قانون سوم۔ ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے۔

۱۸۔ ان قوانین میں مختلف نئی اصطلاحیں بیان ہوئی ہیں۔ قوت،

معیار حرکت، عمل، تعامل۔ اور ان قوانین کو پوری طرح سمجھنے کے لیے ان اصطلاحات کی صراحت ہونی چاہیے۔

قانون اول میں حرکت کا تحیل اور نیز قوت کا تحیل داخل ہیں، اہل الذکر پر بحث کی جا چکی ہے، ثانی الذکر پر بحث کرنی ہے۔

لفظ ”قوت“ عام طور پر استعمال میں آتا ہے۔ اس لفظ سے سب سے اول اعصابی قوت کا خیال وابستہ ہے مثلاً ہم کسی پتھر کو راستہ سے ہٹانے میں قوت لگاتے ہیں لیکن علمی طور پر اس لفظ کے وسیع معنی ہیں مثلاً جب دو ریل کے ڈبے ٹکراتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے پر قوت لگاتے ہیں یا ہم کہتے ہیں کہ زمین تمام اجسام پر قوت لگاتی ہے جس کی باعث وہ زمین کی جانب گرتے ہیں الا انکہ وہ اس طرح سہارے گئے ہوں کہ اس قوت کی مزاحمت کر سکیں۔

حرکت کا قانون اول فی الواقع اس امر کی تصریح کرتا ہے کہ قوت سے کیا مراد ہے۔ قوت وہ ہے جو ایک جسم کی حالت سکون کو یا ایک خط مستقیم میں اس کی یکساں حرکت کی حالت کو بدلتی ہے یا بدلنے کا میلان رکھتی ہے۔

مثلاً ریل کے ایک ڈبے پر غور کرو جو ہموار پٹریوں پر ساکن کھڑا ہے۔ اگر ایک دوسرا ڈبہ آکر اس سے لگے تو وہ حرکت کرنے لگے گا، اس لیے اس پر قوت لگی ہے۔

لیکن قانون اول سے اس سے کچھ زیادہ ہی کا اظہار ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک جسم کو قوتوں کے عمل سے آزاد رکھا جائے تو وہ اپنی حالت سکون میں یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں رہے گا۔ اس لیے کسی جسم کی طبعی حالت یہ ہونی چاہیے کہ وہ ساکن رہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرے یعنی اس کی رفتار یکساں ہو صرف قوت کی موجودگی ہی اس طبعی حالت کو بدل سکتی ہے۔

رہے ڈبے کی صورت پر مکرر غور کرو۔ فرض کرو کہ ٹکڑے وہ حرکت میں



آچکا ہے اور دس میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ قانون اول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک اس پر قوتیں عمل نہیں کرتیں وہ اُسی خط مستقیم میں جس میں وہ حرکت کرنا شروع کیا تھا دس میل فی گھنٹہ کی غیر متغیر رفتار سے اپنی حرکت جاری رکھے گا لیکن جب ڈیپ ٹرک سے فی الواقعہ حرکت میں آتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ وہ ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت جاری نہیں رکھے گا بلکہ جلد یا بدیر ساکن ہو جائے گا۔ اس لیے قوتیں عمل کرنی چاہئیں۔ اب ہم ان قوتوں کی نوعیت پر غور کریں گے۔

✓ سب سے اول ہمیں ایک قوت پر غور کرنا ہو گا جو ہوا کی مزاحمت کے طور پر مشہور ہے ڈبے کے سامنے کی ہوا اس پر سمت مخالف سے اس طور پر دباؤ ڈالتی ہے کہ اس کی حرکت میں ابٹا پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے ہوا ڈبے پر قوت لگاتی ہے عین ایسے ہی جیسے ایک شخص اپنے ہاتھ سے اس کو سمت مخالف سے دبا کر قوت لگائے۔ صرف یہ قوت ہی ڈبے کو کسی نہ کسی وقت ٹھرا سکتی ہے۔ ✓ فرض کرو کہ بریک ڈال دئے گئے ہیں اور پھیٹے اس قدر مضبوطی سے جکڑے ہوئے ہیں کہ وہ ڈبے کے لحاظ سے ساکن ہیں اور اس لیے وہ پٹریوں پر پھسلے نہیں اس صورت میں ڈبے پر پٹریوں سے ایک بڑی قوت لگے گی اور یہ قوت بھی ڈبے کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھے گی۔ اگر بریک نہ بھی ڈالے گئے ہوں اور پھیٹے پھرنے میں آزاد ہوں تو بھی پٹریوں سے ایک قوت ڈبے پر لگے گی اگرچہ کہ یہ قوت پہلے کی بہ نسبت کمتر ہوگی۔

✓ فرض کرو کہ راستہ سیدھا نہیں ہے بلکہ منحنی ہے۔ ہم تصور کر سکتے ہیں کہ حرکت کچھ وقت تک جاری رہے گی لیکن یہ حرکت اس منحنی پر ہونگی اور وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہوگی جیسا کہ قانون اول کی بموجب ہوتی اگر قوت کا عمل نہ ہوتا۔ پس قوت لگی ہے یہ قوت پٹریوں کی وہ قوت ہے جو پھیٹیوں کے محیط سے نکلے ہوئے حصوں کو روکنے پر لگتی ہے اور جو ڈبے کو منحنی کے گرد موڑتی ہے۔ اگرچہ حصے نہ ہوتے تو یہ قوت عمل نہ کرتی اور حرکت ایک خط مستقیم میں جاری رہتی یعنی ڈبہ پٹریوں پر سے اتر جاتا۔

✓ قانون اول کا مفہوم سمجھانے کے لیے ہم ایک اور مثال لیتے ہیں۔

فرض کرو ایک گولی بندوق سے فالٹ کی گئی ہے، اب ہم اس کی حرکت پر غور کریں گے۔ یہاں وہ قوتیں جو حرکت پیدا کرتی ہیں باروت کے دباؤ سے مہیا ہوتی ہیں۔ جب گولی بندوق سے نکل جاتی ہے تو یہ قوتیں ان قوتوں کے مقابلے میں جو گولی پر عمل کرتی ہیں بہت بڑی ہوتی ہیں اس لئے گولی تقریباً ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرتی نظر آتی ہے۔ اس حرکت کو بدلنے کا میلان رکھنے والی قوتیں دو ہیں ایک ہوا کی مزاحمت اور دوسری گولی کا وزن۔ ہوا کی مزاحمت جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں گولی کے پہلوؤں اور سروں پر دباؤ ڈال کر حرکت کو روکنے کا میلان رکھتی ہے اور گولی کا وزن اُس کو زمین کی طرف کھینچ کر لانا چاہتا ہے اور اس طرح ایک خط مستقیم رسم کرنے کی بجائے گولی سے ایک ایسا راستہ رسم کراتا ہے جو زمین کی جانب نیچے وار منحنی ہے۔ Downward curve

۱۹۔ یہ تخیل کہ کسی جسم کی طبعی حالت ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت ہے یا سکون ہے (جو یکساں حرکت کی وہ مخصوص صورت ہے جبکہ رفتار صفر ہو) گیلیلو (۱۵۶۴ تا ۱۶۴۲ء) سے منسوب کیا جاتا ہے۔ اس قانون کے انکشاف کا دلچسپ ذکر "Mach's science of Mechanic's" کے باب دوم میں یا "Cox's Mechanics" کے باب نہم میں ملے گا۔ گیلیلو سے پیشتر اسطو کی سند پر بالعموم یہ تسلیم کیا جاتا تھا کہ ہر جسم اک فطری مقام رکھتا ہے اور اس کی طبعی حالت اس فطری مقام میں سکون کی حالت ہے۔ مثلاً یہ سمجھا جاتا تھا کہ پتھر پانی میں ڈوبا ہے اس وجہ سے نہیں کہ قوت جاذبہ اُس پر عمل کرتی ہے اور اُس کو نیچے وار حرکت میں لاتی ہے بلکہ اس وجہ سے کہ اُس کا فطری مقام پانی کی تہ ہے۔ اسی طرح یہ سمجھا جاتا تھا کہ کاگ کا فطری مقام سطح آب ہے۔ چنانچہ جیو ارڈیش (۱۶۳۷ء) میں لہتا ہے "لا فطول اجسام ہیں جن میں سے ہر ایک اپنی اپنی جگہ پر ہے" اور جاذبہ انہں کی یہ تعریف کرتا ہے کہ یہ "وہ قوت ہے جو ایک جسم اپنے مزاحم پر لگتا ہے تاکہ اپنے مقام پر واپس آجائے۔"

"Millions de matiers, qui sont disposees chacunes en leurs lieux."  
"la force qu'une matiere demonstre a son obstacle, pour retourner  
en son lieu."

× پس گیلیلو سے پیشتر قوت کے اثر کو یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک جسم کو اس کے فطری مقام سے باہر رکھتی ہے۔ گیلیلو نے دیکھا کہ اجسام کے کوئی فطری مقامات نہیں ہیں بلکہ فطری حالتیں ہیں یعنی سکون کی یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی، اور قوت کا اثر کسی جسم کو اپنے فطری مقام سے حرکت دینے کا نہیں ہے بلکہ اس کی فطری حالت میں خلل انداز ہونے کا یعنی اس کی چال کو بد کرنے کا۔ گیلیلو کا یہ انکشاف وہی ہے جو نیوٹن کے قانون اول سے ظاہر ہے۔

× ۲۔ یہ طے کرنے کے بعد کہ کسی جسم کی فطری حالت سے کیا مراد ہے اور نیز قوت سے کیا مراد ہے یعنی وہ جو فطری حالت کو بد کرنے کا میلاں رکھتی ہے ہم یہ دریافت کریں گے کہ وہ کونسا قانون ہے جو قوت کے پیدا کردہ اثر پر حکمران ہے۔ اگر ہمیں ایک قوت دی جائے تو یہ قوت ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی فطری حالت کو کس قدر بدلے گی۔ اس کا جواب قانون دوم میں ملے گا۔

✓ قانون دوم۔ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

✓ پس قوت ایک خاص مقدار یعنی جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتی ہے اور یہ قوت اس معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح کے متناسب ہوتی ہے۔

✓ معیار حرکت سے مراد جسم کی رفتار اور اس کی کمیت کا حاصل ضرب ہے۔ کمیت مادے کی صرف وہ مقدار ہے جس سے جسم ترکیب پایا ہے اور اس لیے کمیت جسم کی حرکت پر منحصر نہیں ہوتی۔ پس

معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح = کمیت × رفتار کی تبدیلی کی شرح  
= کمیت × اسراع

✓ حسب تعریف اسراع۔ اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت دو مقداروں کے حاصل ضرب کے

متناسب ہوتی ہے، ایک جسم کی کمیت اور دوسری اس کا اسراع۔

۲۱۔ کمیت کی پیمائش۔ اگر ہم کسی جسم کو اپنے ہاتھ سے

چھوڑ دیں تو اس جسم پر بالعموم دو قوتیں عمل کریں گی۔ ایک ہوا کی  
مذاہمت اور دوسری جسم کا وزن۔ اگر ہم جسم کو خلا میں لٹکائیں  
اور یہ انتظام رکھیں کہ جسم کو جس لمحے پر ہم چاہیں چھوڑ سکیں  
تو ہوا کی مذاہمت سے نجات ملے گی اور جسم پر عمل کرنے والی  
قوت صرف اس کا وزن ہوگا۔ اب اگر ہم کسی دو اجسام کو خلا میں ایک  
دوسرے کے برابر لٹکائیں اور ٹھیک ایک ہی لمحے پر انہیں چھوڑ دیں تو  
معلوم ہوگا کہ وہ زمین کی جانب گرتے ہوئے پورے وقفے میں ایک  
دوسرے کے برابر رہتے ہیں۔ اس لیے کسی لمحہ پر ان کے اسراع برابر  
ہوتے ہیں۔

حرکت کے قانون دوم سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان اجسام پر عمل کرنے والی  
قوتیں ان کی کمیتوں کے متناسب ہیں۔ یہ قوتیں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں  
اجسام کے صرف اوزان ہیں اور چونکہ یہ تحریری نتیجہ درست رہتا ہے خواہ  
اجسام کوئی ہوں اس لیے حسب ذیل عام قانون حاصل ہوتا ہے:-

اجسام کی کمیتیں ان کے اوزان کے متناسب ہوتی ہیں۔

اس قانون سے ہم کسی دو جسموں کی کمیتوں کا مقابلہ کر سکتے ہیں۔  
(۲۰) ہر ملک میں ایک خاص کمیت کو معیار کے طرز پر منتخب کیا جاتا ہے اور  
کسی دوسرے جسم کی کمیت کا اس معیار سے یا اس کی نقل سے مقابلہ  
کیا جاتا ہے۔ اور اس طریقہ سے ہم کسی جسم کی حقیقی کمیت کا علم حاصل  
کر لیتے ہیں۔ مثلاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک جسم کی کمیت ۱ پاؤنڈ  
ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس کی کمیت (یا وزن)  
لندن میں رکھے ہوئے ایک خاص معیاری جسم کی کمیت (یا وزن) کا

ن گنا ہے۔

## ۲۲۔ قوت کی پیمائش۔ ایک اکائی کمیت کا وزن وہ قوت

ہے جسے ایک اکائی قوت کو تعبیر کرنے کے لیے اختیار کیا جاسکتا ہے اور ایسا کیا جائے تو تمام دیگر قوتوں کا مقابلہ اس قوت سے ہو سکتا ہے۔ مثلاً م پونڈ وزن کی قوت سے ایسی قوت مراد ہوگی جو معیاری پونڈ کے وزن سے م گنی بڑی ہے۔

✓ قوت کی یہ اکائی علمی نہیں ہے بلکہ سہولت بخش ہے، علمی اس وجہ سے نہیں کہ وہ بدلتی ہے جبکہ کمیت کو زمین کی سطح پر مقام بمقام لے جایا جاتا ہے چنانچہ ایک پونڈ کی کمیت کا وزن لندن میں واشنگٹن کی نسبت زیادہ ہوگا، اس لیے اگر ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی متصور کیا جائے تو ہمیں یہ یاد رکھنا چاہئے کہ قوت کی یہ اکائی زمین کی سطح کے مختلف مقامات پر مختلف ہوگی اور لندن میں م پونڈ وزن کی قوت واشنگٹن میں م پونڈ وزن کی قوت سے مختلف ہوگی۔ یہی وجہ ہے کہ علمی مقاصد کے لیے قوت کی ایک دوسری اکائی

بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔ اس کو قوت کی مطلق اکائی کہتے ہیں اور وہ ایسی منتخب کی جاتی ہے کہ اس کا انحصار زمین کی سطح کے کسی مقام پر نہیں ہوتا۔ قوت کی اس دوسری اکائی کی تعریف یہ ہے کہ وہ اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے، برخلاف اس کے قوت کی قبل الذکر اکائی ایسا اسراع پیدا کرتی ہے جو اس نقطہ پر جاذبہ ارض کی قوت کے مساوی ہوتا ہے۔ پس اگر جاذبہ ارض کی قوت یعنی کسی جسم کا اسراع جبکہ جسم خلا میں آزادانہ گردش کر رہا ہو تو علمی اکائی، مطلق اکائی کا ج گنا ہے۔

✓ اگر اکائی قوت، اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرے تو قوت ق، کمیت ک میں اسراع  $\frac{ق}{ک}$  پیدا کرے گی۔ اس لیے اسراع کو

ع سے تعبیر کیا جائے تو حسب ذیل بنیادی مساوات حاصل ہوگی:

ق = ک ع ..... (۱۰)

یہ مساوات نیوٹن کے قانون دوم کو ریاضی کی زبان میں ادا کرتی ہے۔ یہاں قوت ق کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کرنا چاہئے۔

۲۳۔ قانون سوم۔ ہر عمل کے جواب میں ایک

مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے۔

یہ عام مشاہدہ کی بات ہے کہ کوئی جسم ۱، کسی دوسرے جسم ب پر قوت نہیں لگا سکتا تا آنکہ ب بھی اسی وقت ۲ پر قوت نہ لگائے۔ مثلاً جب کوئی پہلو ان لوہے کے ایک بڑے گولے کو پھینکتا ہے تو اسے ہوشیار رہنا چاہئے کہ کہیں گولہ اُسے نہ گرا دے، جب وہ گولے پر قوت لگاتا ہے تو اس کے ساتھ ہی گولہ اُس پر قوت ڈالتا ہے اور اس لیے اُسے چاہئے کہ اس قوت کے اثرات کا مقابلہ کرنے کے لیے تیار رہے۔ اسی طرح جب بندوق کو لی پر قوت ڈال کر اسے فائر کرتی ہے تو گولی بھی بندوق پر قوت لگاتی ہے جس کا اظہار بندوق کے پیچھے ہٹنے سے یاد دہک دیتے سے ہوتا ہے۔ پس تمام قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور انہیں بہ سہولت تمام عمل اور تعامل کہا جاسکتا ہے۔ حرکت کا قانون سوم یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایسی کوئی دو قوتیں مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہیں۔

قانون سوم کا مفہوم اس تعامل کا امتحان کرنے پر معلوم ہوگا جو ان قوتوں کے جواب میں ہیں جن کو ہم قبل ازین مثلاً استعمال کر چکے ہیں پہلی مثال دو ریلوے ڈبوں کے درمیان ٹکرائی ہے۔ ڈبہ ۱، ڈبہ ۲ سے ٹکراتا ہے جس کی وجہ سے ڈبہ ۲ پر قوت لگتی ہے اور وہ حرکت میں آتا ہے۔ قانون سوم سے معلوم ہوتا ہے کہ ٹکر کے لمحہ پر ب کو ۱ پر قوت لگانی چاہئے، یہ قوت مقدار میں اس قوت کے مساوی ہوگی جو ۱، ب پر لگاتا ہے

لیکن وہ سمت میں مخالف ہوگی۔ تعامل کی یہ قوت صرف ٹکڑے کے لمحہ میں عمل کرے گی اور اس قوت کا نتیجہ (۱) کی رفتار کی تبدیلی کی صورت میں ظاہر ہوگا جتنا بڑی قوت یا تو (۱) کی حرکت کو صرف روک دے گی اور اس لیے (۱) ٹکڑے کے بعد تخفیف شدہ رفتار سے آگے بڑھے گا یا وہ (۱) کی حرکت کو الٹا دے گی اور اس لیے (۱) ب سے ٹکڑے کے بعد جس سمت سے آیا تھا اسی سمت میں واپس چلا جائے گا۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب ب حرکت میں آچکا ہے تو اس پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں:-

✓ (۱) ہوا کی مزاحمت ،

✓ (ب) پٹریوں کی رگڑ ،

✓ (ج) پھینٹے کے کوروں پر پٹریوں کا دباؤ، جو ڈبہ کو منحنی

کے گرد موڑتا ہے۔

✓ وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ اپنے سامنے

اور قریب کی ہوا پر لگتا ہے جس کی وجہ سے یہ ہوا اس سمت میں حرکت کرتی

ہے جس میں ڈبہ متحرک ہے۔ فی الحقیقت یہی وہ قوت ہے جو اس فضا سے

سے ہوا کو خارج کرتی ہے جو کسی لمحہ پر ڈبہ اختیار کرتا ہے۔

✓ وہ تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے (۳۲)

ساتھ پٹریوں کو بھی کھینچ کر لیجانے کا میلان رکھتی ہے۔ لیکن پٹریاں چوکیا، سنوار

طور پر نیچے جکڑی ہوئی ہوتی ہیں اس لیے یہ قوت عملاً کوئی حرکت پیدا

نہیں کر سکتی۔

وہ تعامل جو تیسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے

پھیٹوں کی کوروں منحنی کی بیرونی پٹری پر لگاتی ہیں۔ پٹریاں

ان کوروں کو اس سمت میں دباتی ہیں جو منحنی کے مرکزی جانب ہے اور

اس لیے یہ کوروں پٹریوں کو اس منحنی کے مرکز سے پرے اور بیرونی جانب

دباتی ہیں۔ اگر پٹریاں اچھی طرح ثابت نہ کی گئی ہوں تو یہ دباؤ انہیں

متذکرہ بالا سمت میں متحرک کرے گا پٹریاں پھیل جائیں گی اور ڈبہ

پٹریوں سے اتر جائے گا۔

گولی کی مثال میں بھی گولی پر عمل کرنے والی تین قوتیں ہیں :

(۱) باروت کا دباؤ، گولی نالی سے نکلنے کے پیشتر

(ب) ہوا کی فراہمیت، گولی کی پرواز کی آٹنا، میں

(ج) گولی کا وزن جو اُسے نیچے وار زمین کی طرف کھینچتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے گولی کا وہ دباؤ ہے جو باروت کو

پچھے دھکیلتا ہے۔ یہ دباؤ اپنی باری پر بندوق پر متقل ہوتا ہے جس سے بندوق کا دھکے پیدا ہوتا ہے۔

دو تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے ہوا کو حرکت میں لاتا ہے

(جیسا کہ ہم ڈبہ کی صورت میں دیکھ چکے ہیں) اور گولی کے لیے راستہ بناتا ہے

اور اُس ہوا میں حرکت پیدا کرتا ہے جو گولی کی پرواز کا ساتھ دیتی ہے۔

وہ تعامل جو تیسری قوت یعنی گولی کے وزن کے متناظر ہے زیادہ

دلچسپ ہے کیونکہ اس کے وجود کے متعلق کوئی راست شہادت حاصل نہیں ہو سکتی۔

ہم فطرت کی یکسانیت کے اصول سے ہی یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ چونکہ ہر اُس صورت

میں جو کبھی آزمائی جا چکی ہے عمل کے ساتھ ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف

تفاعل ہوتا ہے اس لیے اس صورت میں بھی جو مشاہدہ ہے لیکن اسے آزمایا

نہیں جاسکتا ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عمل کے ساتھ مساوی اور مخالف تفاعل ہے۔

وہ قوت جس کا ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں گولی کا وزن ہے جو اُسے

زمین کی جانب کھینچتا ہے۔ یہ قوت یقیناً اُس قوت کو تعبیر کرتی ہے جو زمین

خود گولی پر لگاتی ہے یعنی قوت جا ذبہ اُس قوت کے ساتھ اس کا تفاعل ہونا

چاہئے۔ اس لیے گولی زمین پر ایک ایسی قوت سے عمل کرنی چاہئے جو گولی

کے وزن کے مساوی ہو، یہ قوت زمین کو اوپر وار گولی کی جانب کھینچے گی۔ گولی

زمین پر جو قوت لگاتی ہے وہ قانون سوم کی رو سے عین اتنی ہی بڑی ہے

جتنی زمین گولی پر لگاتی ہے۔ لیکن گولی کی وجہ سے زمین میں جو اوپر وار

اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اس نیچے وار اسراع سے بہت ہی کم ہے جو زمین گولی میں



پیدا کرتی ہے، کیونکہ قوت جس جسم پر عمل کرتی ہے اس کی کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے اور چونکہ گولی کی کمیت کے مقابلہ میں زمین کی کمیت بہت بڑی ہے اس لیے زمین کا اسراع گولی کے اسراع کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہوگا۔

اگرچہ ان وجوہ کی بناء پر اس اسراع کا راستہ مشاہدہ نہیں کیا جاسکتا جو زمین میں اس کے اوپر متحرک گولی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے تاہم بالکل اس کے مشابہ ایک صورت ہے جس میں اس کا راستہ مشاہدہ ہو سکتا ہے۔

(۳۳) چاند پر جو زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جاذبہ ارض بالکل اسی طریقہ سے عمل کرتا ہے جس طریقہ سے وہ گولی پر کرتا ہے۔ اگر چاند پر کوئی قوت عمل نہ کرتی تو وہ ایک خط مستقیم مرتسم کرتا، لیکن واقعہ یہ ہے کہ مسلسل زمین کی جانب جاذبہ کی اسی قوت سے کھینچتا ہے جو گولی کو کھینچتی ہے۔ پس بالکل اسی طرح زمین میں بھی چاند کی جانب اسراع پیدا ہونا چاہئے۔ یہ اسراع ایسا ہے کہ اس کا مشاہدہ علم ہیئت کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔ ۳۳ ان خیالات کا لحاظ کرتے جن کی تفہیم اوپر کی جاسکتی ہے حرکت کے متذکرہ تین قوانین کو مکرر شکل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے:

۱۔ کسی جسم کی طبعی حالت عدم اسراع کی ہوتی ہے۔ اس طبعی حالت سے گریز قوت کے عمل سے پیدا ہوتا ہے۔

۲۔ جب کوئی قوت عمل کرے ایک جسم کی طبعی حالت میں خلل ڈالتی ہے تو یہ قوت جسم کی کمیت اور پیدا شدہ اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

۳۔ قوتیں جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں، ہر عمل کے ساتھ ایک تعامل ہوتا ہے اور قوتوں کا ہر زوج مساوی اور مخالف ہوتا ہے۔

حوالے کا فریم

۲۵۔ قوانین حرکت کے بیان کرنے میں ہم نے جسم کی حرکت کا ذکر حوالے کے اس فریم کی تخصیص کئے بغیر کیا ہے جس کے لحاظ سے اس حرکت کی پیمائش ہونی چاہئے۔ بالعموم حرکت کی پیمائش عمل میں زمین کی سطح کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔ نیوٹن کو یقین تھا کہ ایک ایسے حوالے کے فریم کا تصور کرنا جو فضا میں فی الواقع ثابت ہو ممکن ہے، وہ تمام حرکت کو اس فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنے کا مشورہ دیتا ہے۔ چنانچہ نیوٹن کے قوانین حرکت کا اطلاق اس حرکت پر ہوتا ہے جو فضا کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو حالانکہ تمام مسئلوں میں الا ان مسئلوں کے جو علم ہیئت سے متعلق ہیں ہمیں ان قوانین حرکت کے جاننے کی ضرورت ہے جو زمین کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں کے حوالے سے بیان کئے گئے ہوں۔

اول ہم یہ معلوم کریں گے کہ حرکت کو ان محوروں کے ایک جٹ کے حوالے سے بیان کرنے کا کیا اثر ہوگا جو فضا میں یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک جسم جو کسی قوتوں کے زیرِ عمل نہ ہو فضا میں کوئی اسراع نہیں رکھیں گا اور اس لیے وہ متحرک محوروں کے لحاظ سے کوئی اسراع نہیں رکھیں گا کیونکہ خود محاور فضا میں اسراع نہیں رکھتے۔ نیز کسی اسراع کی وہی قیمت ہوگی خواہ اس کا حوالہ فضا کے ثابت محوروں سے دیا جائے یا متحرک محوروں سے، کیونکہ وہ اسراع جو متحرک محوروں کے حوالے سے پیمائش کیا گیا ہو حاصل ہوگا اگر ہم فضا کے ثابت محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کو فضا کے متحرک محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کے ساتھ مرکب کریں لیکن یہ آخری اسراع صفر ہے۔ پس یہ معلوم ہوا کہ قوانین حرکت ٹھیک وہی شکل رکھتے ہیں جبکہ حرکت ان محوروں کے حوالے سے بیان کی گئی ہو جو فضا میں

حرکت کرتے ہیں بشرطیکہ یہ محور عدم اسراع کے ساتھ حرکت کریں۔  
عدم اسراع کی یہ شرط ان محوروں کے جٹ سے پوری نہیں ہوتی  
جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں۔ زمین کی سطح کا کوئی نقطہ زمین کی گردش  
کی وجہ سے اس کے محور کے گرد ایک دائرہ مرشم کرتا ہے۔ اگر اس  
دائرہ کا نصف قطر ۱ ہو اور وہ رفتار ہو جس سے یہ دائرہ مرشم  
ہوا ہے تو نقطہ کا اسراع زمین کے محور کی جانب حسب دفعۃً  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔

اس لیے محوروں کے کسی جٹ کا اسراع جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں  $\frac{1}{2}$   
ہوگا اور قوانین حرکت کے اطلاق میں اس کا خیال رکھنا ہوگا خط استواء  
کے کسی نقطہ پر  $0 = 4510$  سینٹی میٹر فی ثانیہ اور  $1 = 634 \times 10^3$

سینٹی میٹر اس لیے اسراع  $= \frac{1}{2} = 315$  سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ۔  
اگر کسی جسم کو خط استواء پر گرایا جائے تو اس کا اسراع  $981$  سینٹی میٹر  
فی ثانیہ فی ثانیہ معلوم ہوگا جبکہ حرکت کا حوالہ زمین کے ثابت  
محوروں سے دیا جائے، لیکن اس کے اصلی اسراع کی مقدار

$$981 + 315 = 1296$$

ہوگی جبکہ حرکت کا حوالہ فضاء کے ثابت محوروں سے  
دیا جائے۔

اس سے اس علت کے ایک جزو کی صراحت ہوتی ہے کہ  
کیوں جاذبہ ارض زمین کی سطح پر نقطہ یہ نقطہ متغیر نظر آتا ہے۔ ایک  
کیلو گرام کی کمیت کا وزن قطب شمالی پر بیچ دار ترازو کے بیچ کو ایک  
خاص طول تک کھینچا جائے گا۔ اگر اس ترازو کو خط استواء پر منتقل کیا جائے  
تو وزن کا ایک حصہ زمین کے مرکز کی جانب کمیت کا جو اسراع  
ہے اس کے پیدا کرنے میں صرف ہوگا اور صرف بقیہ حصہ ہی بیچ کو  
کھینچنے میں کام آئے گا۔ پہلا حصہ تقریباً  $\frac{1}{3}$  گرام کا وزن ہے

اور دوسرا تقریباً  $\frac{1}{4}$  ۹۹۶ گرام کا وزن۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ زمین کے مرکز کی جانب زمین کی سطح کا جو اسراع ہے اس کی وجہ سے خط استوا پر ایک کیلو گرام کی کمیت پیچ دار تر از دو پر ایک ایسی قوت سے عمل کرتی معلوم ہوگی جو صرف  $\frac{1}{4}$  ۹۹۶ گرام پر زمین کی کشش کے مساوی ہوگی۔

x  
(۳۵)

حرکت کا حوالہ زمین کی سطح پر کے محوروں کے ذریعہ دینے میں خطاؤں کا ایک اور جھٹ داخل ہوگا، یہ خطائیں محوروں کی سمتوں میں تبدیلی ہونے سے پیدا ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر ہم قوانین حرکت کو استعمال کریں یہ فرض کر کے کہ وہ زمین کی سطح کے ثابت محوروں کے حوالہ سے درست ہیں اور ان کا اطلاق ایک پتھر کے گرنے پر کریں تو ہم دیکھیں گے کہ پتھر زمین کی سطح کے ایک ایسے نقطہ پر لگنا چاہئے جو انتصا یا اس نقطے کے نیچے ہے جس سے وہ گرایا گیا ہے۔ اگر ہم زمین کی گردش کی رعایت رکھیں تو معلوم ہوگا کہ وہ نقطہ جس پر پتھر فی الواقع ضرب لگاتا ہے اس نقطہ کے کچھ مشرق میں ہونا چاہئے جو انتصا یا اس نقطے کے نیچے ہے جہاں سے وہ چلا تھا۔

x

x

x

اگر زمین پر کی حرکت کو وہ حرکت سمجھ کر استعمال کیا جائے جو فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو تو اس کی وجہ سے جو خطائیں داخل ہوں گی وہ بالعموم یا تو بہت ہی چھوٹی ہوتی ہیں یا بہت آسانی سے درست کی جاسکتی ہیں۔ اس لیے ہم ایسی خطاؤں کوئی الحال بالکل نظر انداز کر کے آگے بڑھیں گے اور حرکت پر قوانین حرکت کا اطلاق زمین کی سطح کے حوالے سے کریں گے۔

قوانین حرکت صرف ایک ذرہ کی حرکت پر اطلاق پذیر ہیں۔

۲۶۔ قوانین نیوٹن کی تکمیل میں ایک اور قید ہے جسے یہاں سمجھ لینا

x

چاہئے۔ قانون دوم سے شاید ہم یہ فرض کر لیں کہ کسی جسم پر عمل کرنے والی قوت اور جسم کی کمیت کا علم ہو جانے سے ہم جسم کا ایک معین اسراع اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر جسم محدود جتنے کا ہے تو اس کے مختلف نقطوں پر اسراع مختلف ہوگا، مثلاً اہم دیکھ چکے ہیں کہ زمین کی گردش کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ خط استوا پر کے ایک نقطہ کا اسراع قطب شمالی پر کے ایک نقطہ کے اسراع سے مختلف ہوتا ہے۔ پھر وہ کونسا اسراع ہے جو قانون دوم سے متعین ہوتا ہے؟

اس مشکل کا جواب یہ ہے کہ قانون دوم کو صرف ذرات پر یعنی مادے کے اس قدر چھوٹے ٹکڑوں پر اطلاق پذیر سمجھنا چاہئے جنہیں نقطہ سمجھا جاسکتا ہے۔ ایک متحرک ذرہ کا ایک واحد معین اسراع ہوگا عین ایسے ہی جیسے ایک متحرک نقطہ کا ہوتا ہے۔ اس قانون کو (۳۶) ذروں پر استعمال کر کے ہم وہ قوانین اخذ کر سکیں گے جو محدود جتنے کے اجسام پر اطلاق پذیر ہیں۔ اس مسئلہ پر کسی آئندہ باب میں بحث کی جائے گی۔ لیکن جہاں یہ ظاہر ہے کہ اس قانون کو سختی کے ساتھ ذروں پر استعمال کرنا چاہئے وہاں یہ بھی ظاہر ہے کہ بہت سے ایسے مسئلے ہو سکتے ہیں جس میں ہم محدود مجتہدوں کے اجسام کو ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں اور اس سے کوئی قابل قدر خطا پیدا نہیں ہوگی۔ ایسی صورت پیدا ہوئی تھی جب ہم نے دفعہ ۱۸ میں بندوبست کی گولی پر بحث کی تھی، گولی کے جتنے کی بحث اٹانے سوال میں پیدا ہی نہیں ہوئی کیونکہ ہم گولی کے تمام نقطوں کا ایک ہی اسراع تصور کر سکتے ہیں۔ اسی طرح بہت سی صورتیں وقوع پذیر ہوئیں جن میں ہم محدود جتنے کے جسم کو اس طرح استعمال کریں گے گویا کہ وہ ایک ذرہ ہے۔ آئندہ باب میں ذروں پر اور ان اجسام پر قوتوں کے عمل سے بحث کی جائے گی جن کو ہم ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

## تیسرا باب

### واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں ۷ قوتوں کی ترکیب اور تحلیل

(۳۷)

۲۷۔ حرکت کے قانون دوم سے ہم وہ اسراع معلوم کر سکتے ہیں جو پیدا ہوتا ہے جبکہ معلومہ کمیت کے ایک ذرہ پر ایک معلومہ قوت عمل کرتی ہے۔

مثلاً بند وق کی گولی کی پرواز پر غور کرو جو دفعہ ۱۸ میں زیر بحث آچکی ہے۔ جب تک گولی ہوا میں رہتی ہے اس پر دو قوتیں ایک ساتھ عمل کرتی ہیں، ایک گولی کا وزن اور دوسری ہوا کی مزاحمت۔ ان کے علاوہ باد مخالف تھل سکتی ہے جو گولی پر ایک افقی دباؤ اس کی حرکت کی عمود و از سمت میں ڈالے گی۔ ہوا کی مزاحمت گولی کی حرکت میں ابھار پیدا کرتی ہے یعنی اس سمت کے خلاف اسراع پیدا کرتی ہے جس میں گولی حرکت کر رہی ہے۔ گولی کا وزن اسے نیچے کھینچتا ہے یعنی زمین کی جانب اسراع پیدا کرتا ہے۔ باد مخالف گولی کو اس کے راستہ سے ہٹا دے گی یعنی اس سمت میں اسراع پیدا کرے گی جس میں وہ چل رہی ہے۔ پس ہم ان تین قوتوں کے متعلق یہ سمجھ سکتے ہیں کہ ہر ایک اپنا اپنا اسراع پیدا کر رہی ہے۔ یہ تین اسراع حرکت کے قانون دوم سے جدا جدا محسوب ہو سکتے ہیں اور پھر ان میں

اسراعوں کو مرکب کر کے ہم گولی کا حاصل اسراع معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ حاصل اسراع ایک خاص واحد قوت سے پیدا کیا جاسکتا تھا اور اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ واحد قوت، اسراع پیدا شدہ کا لحاظ کرتے، مندرجہ بالا تین مختلف قوتوں کے اجتماع کے معادل ہے یعنی یہ واحد قوت ان تین مختلف قوتوں کا حاصل ہے۔ اب ہم ان خیالات کو ریاضی کی ٹھیک شکل میں بیان کریں گے۔ اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ قوت، مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہے اور اس لیے اس کو ایک خط مستقیم سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ قوتوں کو متوازی الاضلاع کے قانون کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے۔ (۳۸) اس کو ثابت کر دینے کے بعد یہ نتیجہ نکلیں گے کہ قوتیں سمتیاں ہیں اور انہیں ان عام قاعدوں کی بموجب تحلیل اور مرکب کیا جاسکتا ہے جو بیان کئے جا چکے ہیں۔

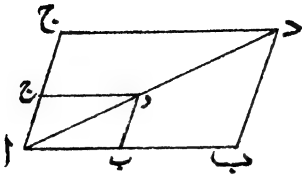
۲۸۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع۔ مسئلہ۔ اگر دو قوتیں مقدار اور سمت میں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر ہوں تو انکا حاصل اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا۔

فرض کرو کہ یہ دو قوتیں، 'ا ب' اور 'ا ج' سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ 'ا ب' 'ا ج' سے وہ اسراع تعبیر ہوتے ہیں جو پیدا ہوتے اگر وہ کسی ذرہ پر جدا گانہ عمل کرتیں۔ چونکہ حرکت کے قانون دوم کی رو سے اسراع قوت کے متناسب ہوتا ہے اس لیے

$$ا ب : ا ج = ا ب : ا ج$$

متوازی الاضلاع 'ا ب ج د' اور 'ا ب ج د' بناؤ۔

اس متناسب کی وجہ سے جو اوپر ابھی حاصل ہو چکا ہے یہ دو متوازی الاضلاع متشابہ ہوں گے اور اس لیے 'ا د' ایک خط مستقیم



شکل (۱۵)

ہوگا اور حاصل ہوگا

ا د : ا ب = ا ب : ا ب

لیکن ا د جو کناروں

ا ب، ا ج کے متوازی الاضلاع

کا وتر ہے حاصل اسراع کو

تعبیر کرتا ہے۔ اب چونکہ

ا ب اس قوت کو تعبیر

کرتا ہے جو اسراع ا ب پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے اس لیے محصل بالاتناسب سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا د، اس قوت کو تعبیر کرے گا جو اسراع ا د پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے۔ یہ الفاظ دیگر ذرہ کا اسراع دہی ہے جو ہوتا اگر اس پر ایک واحد قوت جو ا د سے تعبیر ہوتی ہے عمل کرتی۔ اس لیے قوتوں ا ب، ا ج کے حاصل کو ا د تعبیر کرتا ہے۔

اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوت ایک سمتی ہے اور اس لیے قوتیں ان قوانین کی بموجب جو دفعات ۱۲ تا ۱۶ میں بیان کئے جا چکے ہیں مرکب کیجا سکتی ہیں۔

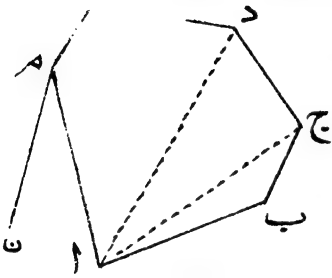
## ذرہ توازن میں

۲۹۔ سکونیات میں ہمیں صرف ساکن ذرات یا ساکن ذرات کے نظامات سے بحث کرنی ہوتی ہے۔ اس لیے ہر ذرہ پر حاصل قوت صفر ہونی چاہئے۔ اس لیے ان صورتوں پر غور کرنا اہم ہے جن میں قوتوں کے کسی نظام کا حاصل صفر ہوا کرتا ہے۔

۳۰۔ قوتوں کا کثیر الاضلاع مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں خطوط مستقیم سے تعبیر لگائی ہوں تو یہ قوتیں توازن میں ہوں گی اگر وہ کثیر الاضلاع جو ان کا



خطوط مستقیم کو کناروں کے طور پر لینے سے بنے ایک بند کثیر الاضلاع ہو یعنی اگر ان تمام خطوط مستقیم کو برابر کر رکھنے کے بعد ہم ابتدائی نقطہ پر واپس لوٹ آئیں۔



شکل (۱۶)

فرض کرو کہ قوتوں کی کوئی تعداد جو ایک ساتھ ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں خطوط مستقیم 'ا ب'، 'ب ج'، 'ج د'، 'د ع'، 'ع ا' من سے تعبیر کی گئی ہیں۔ چونکہ قوت ایک سمتی ہے اسلئے وہ قوتیں جو 'ا ب' اور 'ب ج' سے تعبیر ہوتی ہیں ایک واحد قوت کے حامل ہیں جو 'ا ج' سے تعبیر ہوتی ہیں اور اسلئے ان دو قوتوں کی بجائے یہ قوت رکھی جاسکتی ہے۔

اس لئے قوتوں کا دیا ہوا نظام اب ان قوتوں کا نظام سمجھا جاسکتا ہے جو خطوط مستقیم 'ا ج'، 'ج د'، 'د ع'، 'ع ا' من سے تعبیر ہوتی ہیں۔ پھر ان میں سے پہلی دو قوتوں کی بجائے ایک واحد قوت جو 'ا د' سے تعبیر ہوتی ہے رکھی جاسکتی ہے اور قوتوں کا دیا ہوا نظام ان قوتوں میں تحویل ہوتا ہے جو 'ا د'، 'د ع'، 'ع ا' من سے تعبیر ہوتی ہیں۔ اس طرح ہم اس عمل کو جاری رکھ سکتے ہیں تا آنکہ ہم اس واحد قوت پر پہنچ جائیں جو ان سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس لئے یہ قوت تمام قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہے تو نقطہ 'ا' اور ان منطبق ہوں گے اور اس لئے حاصل قوت جو ان سے تعبیر ہوتی ہے معدوم ہوگی اور ذرہ توازن میں ہوگا۔ اس کے برعکس اگر ذرہ توازن میں ہو تو ان معدوم ہوگا اور اس لئے کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہوگا۔

پس توازن کی وہ شرط جو ثابت شدہ مسئلہ میں متدرج ہے ضروری اور کافی ہے۔ ضروری اس وجہ سے کہ یہ شرط پوری

ہوتی چاہیے اگر ذرہ کو توازن میں ہونا ہے اور کافی اس وجہ سے کہ توازن کا یقین ہو جاتا ہے جوں ہی یہ شرط پوری ہو جاتی ہے۔

۳۱۔ قوتوں کا مثلث۔ اگر صرف تین قوتیں ہوں تو مسئلہ

بالا ایک سادہ تر مسئلہ میں تحویل ہوتا ہے، یہ مسئلہ قوتوں کے مثلث کے طور پر مشہور ہے اور حسب ذیل ہے :

مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ تین قوتیں جو خطوط مستقیم سے تعبیر کی گئی

ہوں عمل کریں تو ذرہ توازن میں ہوگا اگر یہ تین خطوط مستقیم ایک مثلث کے اضلاع بنیں جبکہ انہیں سہرا بہ سہرا رکھا جائے۔

یہ مسئلہ چونکہ قوتوں کے کثیر الاضلاع کی ایک مخصوص صورت

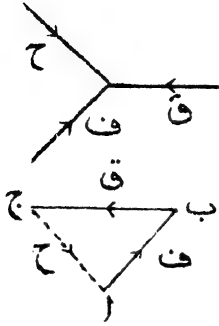
ہے اس لیے کسی جداگانہ ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔ حسب سابق اس کا عکس بھی درست ہے، اس لیے مسئلہ میں بیان کی ہوئی شرط توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے۔

جب صرف تین قوتیں عمل کر رہی ہوں تو توازن کی شرط کو اس سے بھی زیادہ سادہ شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۳۲۔ لامی کا مسئلہ۔ جب ایک ذرہ تین قوتوں کے زیر عمل ہو

تو توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہوں اور ہر ایک قوت اس زاویہ کی جیب کے تناسب ہو جو دوسری دو قوتوں کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ تین قوتوں 'ف'، 'ق'، 'ح' کے زیر عمل ہے۔



شکل (۱۷)

توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہم تین خطوں کو جو مقدار اور سمت میں قوتوں 'ف'، 'ق'، 'ح' کو تعبیر کریں۔  
سرا یہ سرا رکھ کر ایک مثلث بنا سکیں۔  
فرض کرو کہ 'ا' ب' قوت 'ف' کو تعبیر کرتا ہے۔ اس کے سرے 'ب' پر ایک خط 'ج' جو قوت 'ق' کو تعبیر کرے لگاؤ۔  
اس لیے 'ج' اسے قوت 'ح' تعبیر ہونی چاہئے اگر توازن کی شرطوں کو پورا ہونا ہے۔ اس لیے یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہونی چاہئیں یعنی اس مستوی میں جو قوتوں کے نقطہ عمل میں سے گزرے اور 'ا' ب' ج کے متوازی ہو۔

مان لو کہ توازن ہے تو تین قوتیں مثلث 'ا' ب' ج کے اضلاع سے تعبیر ہوں گی۔ فرض کرو کہ اس مثلث کے اضلاع حسب معمول 'ا' ب' ج سے اور زاویے 'ا' ب' ج سے تعبیر کئے گئے ہیں۔ تب مثلث کی ایک معلومہ خاصیت کی رو سے

$$\frac{ج}{جب} = \frac{ب}{جب} = \frac{ا}{جب}$$

لیکن ہمارے عمل کی بموجب 'ا' ب' ج، قوتوں کی مقداروں کے متناسب ہیں، اس لیے

$$\frac{ا}{ق} = \frac{ب}{ح} = \frac{ج}{ف}$$

$$\frac{ا}{ح} = \frac{ب}{ق} = \frac{ج}{ف} \quad \text{اس لیے}$$

(۴۱)

اگر (ف ق) سے وہ زاویہ تعبیر کیا جائے جو قوتوں ف اور ق کے خطوط عمل کے درمیان ہے تو (ف ق) =  $\pi$  - ب، اس لیے جب ب = جب (ف ق) اور اس لیے

$$\frac{ف}{ق} = \frac{ق}{ح} = \dots (۱۱)$$

جب (ق ح) جب (ح ف) جب (ف ق)

اس مسئلہ کا عکس درست ہے کیونکہ اگر ربط (۱۱) پورا ہوا اور اگر قوتوں کے خطوط عمل ایک مستوی میں ہوں تو ہم ایک مثلث بنا سکتے ہیں جس کے اضلاع قوتوں ف، ق، ح کو تعبیر کریں گے اور اس لیے توازن ہوگا۔

۳۳۔ توازن کے لیے تخیلی شرطیں۔ اگر توازن کی شرطوں

کو تخیلی شکل میں بیان کیا جائے تو توازن کی شرط یہ ہے کہ تمام عاملہ قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہئے۔ اگر قوتیں انفرادی طور پر معلوم ہوں تو حاصل قوت سمیتوں کو مرکب کرنے کے قاعدوں سے جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان ہو چکے ہیں فوراً معلوم کی جاسکتی ہے۔

اگر قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل کرتی ہیں تو فرض کرو کہ ان کی مقداریں  $ح_۱, ح_۲, \dots, ح_n$  ہیں اور فرض کرو کہ ان کے خطوط

عمل محور لا کے ساتھ زاوے  $\psi_۱, \psi_۲, \dots, \psi_n$  بناتے ہیں۔ تب حاصل کے اجزائے ترکیبی لا،  $\Sigma$  ما ہوں گے جہاں (دیکھو دفعہ ۱۴)

$$\Sigma = ح_۱ \cos \psi_۱ + ح_۲ \cos \psi_۲ + \dots + ح_n \cos \psi_n$$

$$\Sigma = ح_۱ \sin \psi_۱ + ح_۲ \sin \psi_۲ + \dots + ح_n \sin \psi_n$$

حاصل کی مقدار  $\sqrt{\Sigma^۲ + \Sigma^۲}$  ہے اور وہ معدوم ہوگا صرف اگر  $\Sigma = 0$  اور  $\Sigma = 0$ ۔ اس لیے توازن کے لیے شرط یہ ہے کہ

محوروں کے متوازی یہ اجزائے ترکیبی جدا گانہ معدوم ہوں یعنی عمل کرنیوالی مختلف قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو جبکہ انہیں ہر ایک محور کے متوازی تحلیل کیا گیا ہو۔

اسی طرح جب قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل نہیں کرتیں تو توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ فضاء کے تین محوروں کی سمتوں میں ان قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعے جدا جدا معدوم ہوں۔

## مثالیں

۱۔ ۲ اور ۸ پونڈ وزن کی دو قوتیں دو سمتوں میں جو علی القوالم میں عمل کرتی ہیں، ان کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۲۔ تین قوتیں ہر ایک ف کے مساوی تین قائم محوروں پر عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرو۔

۳۔ دو قوتوں ف، اور ف کا حاصل جہاں قوتیں علی القوالم عمل کر رہی ہیں ح ہے۔ اگر ف، اور ف، میں سے ہر ایک میں ۳ پونڈ کا اضافہ کیا جائے تو ح میں ۴ پونڈ کا اضافہ ہوتا ہے اور اب وہ ف، اور ف، کی ابتدائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ ف، اور ف، کو معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتیں 'و'، 'ب'، 'ج'، 'ن' ... و ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ 'ا' 'ب' 'ج' .... 'ن' کا مرکز ہندسی ہے۔

۵۔ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' ف ایک متعظم مسدس ہے۔ ان قوتوں کا حاصل معلوم کرو جو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ا' 'ع' 'ف' سے تعبیر ہوتی ہیں۔

۶۔ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' ف ایک متعظم مسدس ہے۔ ثابت کرو کہ ان قوتوں کا حاصل جو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ا' 'ع' 'ف' سے تعبیر ہوتی ہیں  $351 \times$  'ا' 'ب' سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس حاصل کی سمت معلوم کرو۔

۷۔ ا ب ج ایک مثلث ہے اور ب ج میں کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر ن ق، اُن قوتوں کے حامل کو تعبیر کرے جو ا ن، ن ب، ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں تو ثابت کرو کہ ق کا طریق، ب ج کے متوازی ایک خط سیقیم ہے۔

## قوتوں کے نمونے

### ذرہ کا وزن

۳۴۔ کسی ذرہ کا وزن ہمیشہ انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے، کیونکہ زمین کی سطح پر کسی دے ہوئے مقام پر یہ معلوم ہوا ہے کہ تمام ذروں کے وزن متوازی سمتوں میں عمل کرتے ہیں اور یہ سمت زیر بحث مقام پر انتصابی کہلاتی ہے۔ وزن وہ تجاذبی قوت ہے جس سے زمین ذرہ کو چھینچتی ہے بجز ایک چھوٹی تصحیح کے جو اس واقعہ کی وجہ سے عامہ کرنی ہوگی کہ وہ محور جو زمین میں ثابت ہیں بغیر اسراع کے حرکت نہیں کرتے۔ اس تصحیح پر ہم یہاں بحث نہیں کریں گے۔ جب کسی جسم کے وزن کو وکھا جاتا ہے تو اس کا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس جسم کو زمین کی سطح کے لحاظ سے ساکن رکھنے کے لیے ایک قوت ق کی ضرورت ہے جو انتصاباً اوپر وار عمل کرے۔

### دوری کا تناؤ

۳۵۔ کسی جسم پر قوت لگانے کا ایک آسان ذریعہ دوری یا رسی ہے اور اس قوت کو دوری کا تناؤ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ (ب ج د....) دوری ہے اور فرض کرو کہ اس کے سرے پر ایک ذرہ ف بندھا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ دوری کے حصے (ب ج....) اس قدر چھوٹے ہیں کہ ہر ایک کو ایک ذرہ سمجھا جاسکتا ہے۔

س ر ق ف  
۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

ف • شکل (۱۸)

دوری کے کسی ذرہ مثلاً ج ب پر تین قوتیں عمل کریں گی،

(۱) اس کا وزن (۲) وہ قوت جو دوری کا ذرہ ج د، ذرہ ج ب پر لگاتا ہے اور (۳) وہ قوت جو ذرہ ج ب پر لگاتا ہے۔  
بالمعموم کسی دوری کا وزن بمقابلہ دوسرے اوزان کے جو مسئلہ (۴۳)

میں شامل ہوتے ہیں بہت خفیف ہوتا ہے۔ اس لیے سہولت اس میں ہے کہ دوری کو ایسی سمجھیں کہ وہ وزن رکھتی ہی نہیں۔ اس صورت میں ذرہ ج ب پر صرف دو قوتیں عمل کرتی ہیں اور اس لیے توازن کے لیے یہ قوتیں مساوی اور مخالف ہونی چاہئیں۔

۳۶۔ ملا سمت۔ دوری کو ہم کامل طور پر ملائم اس قوت

کہنے کے جبکہ وہ قوت جو ایک ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر لگاتا ہے ان دو ذروں کو ملانے والی سمت میں ہو۔ مثلاً اگر زیر بحث ذرہ کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ہو تو ذرہ ج ب پر عمل کرنے والی قوتیں سمتوں ف ق ر میں ہونگی۔ ج ب کو توازن میں رکھنے کے لیے یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہونی چاہئیں۔ فرض کرو کہ ہر ایک کی مقدار ت ہے۔ نیز یہ دو قوتیں مخالف سمتوں میں ہونی چاہئیں، اس لیے ف ق ر کو ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔

چونکہ تیسرے قانون کی رو سے عمل اور تعامل مساوی اور مخالف ہوتے ہیں، اس لیے وہ قوت بھی جو ج ب ج د پر لگاتا ہے سمت ق ر میں ہونا چاہئے۔ یہ پھر توازن کے لیے اس قوت کے مساوی ہونی چاہئے جو د ج د پر لگاتا ہے۔ اس لیے یہ قوت مقدار ت کی ہونی چاہئے اور ق ر س ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔

ہم اس استدلال کو جاری رکھ کر یہ معلوم کرتے ہیں کہ تمام ذرے ایک خط مستقیم ف ق ر س ... میں واقع ہوتے چاہئیں اور یہ کہ ہر ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر ایک ہی قوت ت کے ساتھ ڈوری کی سمت میں عمل کرتا ہے۔ قوت ت کو تناؤ کہتے ہیں۔ پس ڈوری کے کسی نقطہ ف پر تناؤ وہ قوت ہے جس سے ڈوری کا وہ ذرہ جو

ف کی ایک جانب ہے اس ذرہ پر جو ف کی دوسری جانب ہے عمل کرتا ہے۔ کسی کامل طور پر ملام اور غیر وزنی ڈوری کے ہر نقطہ پر تناؤ مقدار اور سمت میں وہی ہوتا ہے جبکہ ڈوری بیرونی قوتوں کے زیر عمل نہ ہو۔

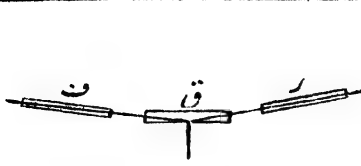
اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک کامل طور پر ملام اور غیر وزنی ڈوری جبکہ اس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں ایک خط مستقیم میں ہونی چاہئے جبکہ وہ توازن میں ہو۔

اگر تناؤ معدوم ہو تو خواہ طول ف ق ر ق ر ... کے عناصر کی سمتیں کچھ ہی ہوں توازن ہوگا۔ جب تناؤ معدوم ہوتا ہے تو ڈوری کو غیر متنی ہونی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ غیر متنی ہونی ڈوری کسی شکل میں یہ حالت توازن ساکن رہ سکتی ہے۔

آئندہ ثابت کیا جائیگا کہ جب ایک کامل طور پر ملام اور غیر وزنی ڈوری ایک چکنی کھونٹی یا چرخ پر سے گزرتی ہے تو تناؤ کی مقدار ڈوری کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتی ہے اور کھونٹی یا چرخ کے نقاط تماس پر اس کی سمت کھونٹی یا چرخ کے تماس کی سمت ہوتی ہے۔ ۳۷ — اگر ڈوری مطلقاً غیر وزنی نہ ہو بلکہ بہت ہلکی ہو تو اس کے کسی ذرہ پر مثلاً ق پر تین قوتیں عمل کریں گی۔ اس کا وزن انتصافاً نیچے اور وہ دو قوتیں جن سے متصلہ ذرے سمتوں ف ق ر ق میں عمل کرتے ہیں۔ لامی کے

(۴۴)





شکل (۱۹)

مسئلہ سے ہر قوت اس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔ چونکہ وزن چھوٹا ہے اس لیے جب ف ق ر کو چھوٹا ہونا چاہئے یعنی ف ق ر کو قریب قریب ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔ تاہم یہ

حکام ملا سید ہا نہیں ہو سکتا الا انکم دوری مطلقاً بے وزن ہو۔ اس لیے کسی حقیقی دوری میں اس کے وزن کی وجہ سے کچھ نہ کچھ ”بھوک“ ہوگا، اگرچہ یہ بھوک اس قدر خفیف ہو سکتا ہے کہ اس کی شناخت نہ ہو سکے۔

۳۸۔ امتداد پذیر اور نامتناہی دوریاں۔ تناؤ جیسا کہ معلق

ہو چکا ہوگا ایک قوت ہے جو دوری کے ہر نقطہ پر عمل کرتی ہے اور دوری کو اس کے طول کی سمت میں وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے۔ ہو سکتا ہے کہ دوری وسیع کرنے کے اس میلان کو قبول کرے یا نہ کرے۔ وہ دوری جو تناؤ کے تحت وسیع ہوتی ہے امتداد پذیر کہلاتی ہے اور وہ دوری جو بالکل وسیع نہیں ہوتی یا ہوتی بھی ہے تو اس قدر کم کہ توسیع کی مقدار ناقابل قدر ہے نامتناہی دوری کہلاتی ہے۔

اس لیے کوئی نامتناہی دوری ایک ہی طول کی رہتی ہے خواہ کچھ ہی تناؤ اس پر عمل کرے، برخلاف اس کے کسی امتداد پذیر دوری کا طول ایک تناؤ پر منحصر ہوتا ہے۔

مسئلہ میں پہلے نے ایک قانون دریافت کیا تھا جس سے وہ ربط معلوم ہوتا ہے جو ایک دوری کے تناؤ اور اس کی توسیع کی مقدار کے درمیان پایا جاتا ہے، تناؤ توسیع کی مقدار کے متناسب ہوتا ہے۔

تعریف۔ کسی دوری کا وہ طول جبکہ تناؤ صفر ہو دوری کا

”فطری طول“ کہلاتا ہے۔

تعریف۔ ایک وسیع شدہ دوری کا طول جس قدر اس کے فطری طول سے تجاوز کرتا ہے اس کو ”توسیع“ کہتے ہیں۔

ہک کا قانون۔ دوری کا تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے۔

اگرچہ ہک نے اس قانون کو سنہ ۱۶۶۶ء میں دریافت کر لیا تھا لیکن اُس نے اس کی اشاعت سنہ ۱۶۸۷ء تک نہیں کی اور اُس وقت بھی اس کو ایک حرئی معمر (ceinossstuv) کی شکل میں پیش کیا۔

(۳۵)

سنہ ۱۶۸۷ء میں اُس نے سمجھایا کہ اس حرئی معمر کے حروف لاطینی الفاظ ”ut tenso sic vis“ کے حروف ہیں۔ ”کسی پتچ کی طاقت اور اس کے تناؤ میں ایک ہی تناسب رہتا ہے“۔ تناؤ (tenso) سے ہک کا مطلب وہ مقدار ہے جسے ہم نے ”توسیع“ کہا ہے اور طاقت (vis) سے وہ قوت مراد ہے جو پتچ کو وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی تناؤ۔

۳۹۔ ہک کے قانون سے ہم صرف ان توسیعات کا مقابلہ کر سکتے ہیں جو مختلف تناؤں سے پیدا ہوتی ہیں۔ کسی دئے ہوئے تناؤ سے پیدا شدہ حقیقی توسیع معلوم کرنے کے لیے ہمیں کسی دوسرے تناؤ سے پیدا شدہ توسیع معلوم کرنی چاہیے تاکہ مقابلہ ہو سکے۔

تعریف۔ وہ قوت جو ایک دوری کو اس کے فطری طول کا دو چند کر نہیں مطلوب ہوتی ہے دوری کی لچک کا مقیاس کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر ایک دوری کا طول ۱ ہو اور لچک کا مقیاس ۲ تو ہم جانتے ہیں کہ تناؤ ۲، توسیع ۱ پیدا کرتا ہے اور اس لیے تناؤ ۴، توسیع ۳ لہٰذا پیدا کرے گا۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ڈوری نا امتداد پذیر ہے تو اس سے یہ مطلب ہوتا ہے کہ لہ اس قدر بڑا ہے کہ توسیع  $\frac{1}{2}$  نظر انداز کی جاسکتی ہے۔  
 مہک کا قانون صرف خاص حدود کے اندر درست رہتا ہے۔  
 اگر ہم کسی ڈوری کے تناؤ کو غیر معین طور پر بڑھاتے جائیں تو ہم دیکھیں گے کہ ایک خاص حد گذر جانے کے بعد مہک کا قانون درست نہیں رہتا اور اس سے بھی زیادہ ایک خاص تناؤ پر پہنچتے ہی ڈوری دو ٹکڑوں میں ٹوٹ جاتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک وزن و، ایک ڈوری سے لٹک رہا ہے، اسے ایک جانب ایک افقی قوت سے کھینچا گیا ہے تا آنکہ ڈوری انتصابی کے ساتھ ۵۴ کا زاویہ بناتی ہے۔ افقی قوت اور ڈوری کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزن کو جو ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہے ایک افقی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے جیسے اسے سکون کے محل سے (جس میں ڈوری انتصابی ہوتی ہے) بعید تر کھینچا جاتا ہے ڈوری کا تناؤ مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔

۳۔ ۱۰۰ پونڈ کا ایک وزن دو ڈوریوں سے جو انتصابی کے ساتھ ۶۰ کے زاوے بناتی ہیں لٹکا یا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۴۔ ۳۰ پونڈ کا ایک وزن دو امتداد پذیر ڈوریوں سے بند ہوا ہے، ڈوریوں کا نظری طول ۲ فٹ ہے، لچک کا مقیاس ۱۰۰ پونڈ ہے اور ڈوریوں کے دوسرے سرے دو نقطوں سے بندے ہیں جو ایک دوسرے سے ۴ فٹ کے افقی فاصلے پر ہیں۔ وہ محل معلوم کرو جس میں وزن توازن میں ساکن رہ سکتا ہے۔

۵۔ ایک وزن و، طول ل کے تین مساوی ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے، ڈوریوں کے دوسرے سرے تین نقطوں سے بندے ہیں جو ضلع ل کے ایک

افنی متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔ ڈور یوں کے تناؤ معلوم کرو۔

## دو اجسام کے درمیان تعامل

(۴۶)

۴۰۔ ایک اور طریقہ جس سے قوت ایک ذرہ پر لگائی جاسکتی ہے اُس دباؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے جو ذرہ اور ایک ٹھوس جسم کے درمیان ہوتا ہے۔ ایسی قوت کو بالعموم تعامل کہتے ہیں۔

مثلاً وہ جسم جو ایک کمرہ کے فرش پر انٹا دھکے اپنے وزن کے زیر عمل سہجے جو نیچے دار عمل کرتا ہے لیکن وہ ایک دوسری قوت کے عمل کی وجہ سے جو فرش سے اوپر دار عمل کرتی ہے ساکن رہتا ہے، یہ قوت جسم اور فرش کے درمیان تعامل ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ جسم کو سکون کی حالت میں متوازن رکھنے کے لئے تعامل کو جسم کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے اور اسے انتصاباً عمل کرنا چاہئے۔

## رگڑ

۴۱۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹا جسم ایک ایسے مستوی پر پڑا ہے جس کا ڈھال تغیر پذیر ہو سکتا ہے مثلاً ڈیسک کے ڈھلن کی سطح مستوی۔ اگر اس مستوی کو افقاً پکڑا جائے تو جسم ساکن رہ سکتا ہے جیسا کہ قبل ازیں مذکور ہوا۔ اب مستوی کو بتدریج جھکانے جاؤ تو معلوم ہو گا کہ جوں ہی جھکاؤ ایک خاص زاویہ پر پہنچتا ہے تو جسم مستوی پر نیچے دار پھسلنے لگتا ہے۔ وہ زاویہ جس پر جسم کے پھسلنے کی ابتدا ہوتی ہے اشیاء کے مختلف جوڑوں کے لئے مختلف معلوم ہوا ہے، مثلاً لکڑی لکڑی پر پھسلنے کے لئے یہ زاویہ ۲۵° سے ۳۰° تک متغیر ہو سکتا ہے، لوہا لکڑی پر پھسلنے کے لئے یہ زاویہ ۱۰° سے ۱۵° تک متغیر ہوتا ہے اور لوہا لوہے پر پھسلنے کے لئے وہ صرف ۱۰° یا ۱۵° ہے۔

جب دو اشیاء ایسی ہوں کہ یہ زاویہ صفر ہو۔ یعنی ایسی کہ ایک

دوسری پر صرف اُسوقت ہی ساکن رہ سکتی ہے جبکہ تماس کی سطح کاملاً افقی ہو تو ان کے درمیانی تماس کو کامل طور پر چکنا کہتے ہیں۔ کامل طور پر چکنے تماس کا قریب ترین تقریب جس کا تجربہ زردھرہ زندگی میں ہوتا ہے غالباً برف پر نولاد کا ہے مثلاً اسکلٹنگ میں۔

یہ معلوم ہوا ہے کہ وہ زاویہ جس تک ایک شے سے بنی ہوئی مستوی سطح کو جھکا نا پڑتا ہے تا آنکہ ایک دوسری شے اس پر پھسلنے لگے دوسری شے کی مقدار اور رقبہ تماس دونوں کے غیر تابع ہوتا ہے۔ یہ زاویہ زیر تماس دو اشیاء کی صرف نوعیت پر منحصر ہوتا ہے۔

نیز جب دو جسم کسی طریقہ پر باہم دبائے جاتے ہیں تو یہ معلوم ہوا ہے کہ تعامل کی سمت سطح فاصل کے عماد کے ساتھ کوئی زاویہ (ایک خاص انتہائی زاویہ کی حد تک) پھسلنے کے وقوع کے بغیر بنا سکتی ہے لیکن جوں ہی یہ خاص زاویہ پہنچ جاتا ہے تو پھسلن واقع ہوتی ہے۔ اس زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں۔

مریخا یہ وہی زاویہ ہے جس میں سے اس مستوی کو جس کا ذکر اوپر کیا ہے جھکایا جاسکتا ہے قبل اسکے کہ پھسلن واقع ہو، کیونکہ مستوی کے عماد اور تعامل کی سمت کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے وہ صرف مستوی کا ڈھال ہے۔

۲۲۔ کسی صورت میں جس میں رگڑ کی قوتیں عمل کریں فرض کرو کہ تعامل کا عماد جزو ترکیبی کا ہے اور فرض کرو کہ تماس کے مستوی میں وہ جزو ترکیبی ف

ہے جو رگڑ سے پیدا ہوتا ہے۔ جب پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو حاصل کو عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہیے جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

پس اگر پورا تعامل میں سے تعبیر ہو تو

مس = صہ ف = مس صہ

اور اس لیے ف = مس صہ

مقدار مس صہ کو رگڑ کی قدر

کہتے ہیں اور اسے ایک واحد علامت

صہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس لیے جب

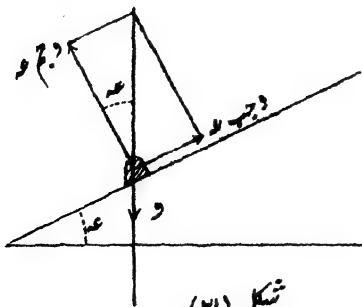


شکل (۲۰)

پھسلن عین واقع ہونے کو ہو تو

ف = مہ  
یہ صاف طور پر ذہن نشین ہونا چاہیے کہ اس مساوات سے رگڑ کی قوت کی ٹھیک قیمت حاصل ہوتی ہے صرف اس وقت جبکہ پھسلن عین وقوع پذیر ہوئے کو ہو۔ اس سے رگڑ کی قوت کی قیمت کی اوپر کی حد متعین ہوتی ہے۔ لیکن اس قوت کی حقیقی قیمت معلوم نہیں ہوتی جب تک کہ میں یہ نہ معلوم ہو کہ نظام پھسلنے کے عین موقع پر ہے۔

۴۳۔ مثلاً اس تجربہ پر غور کرو جس کا ذکر اوپر کیا جا چکا ہے، اس میں ایک ذرہ ایک افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور مستوی کو بتدریج جھکایا جاتا ہے۔ جب مستوی افقی ہوتا ہے تو ذرہ ساکن رہتا ہے، اس پر صرف جاذبہ ارض اور مستوی کا تعامل عمل کرتے ہیں۔ اس لیے تعامل افقی ہے اور اس لیے ف = ۰۔ پھر اس نظام پر غور کرو جبکہ مستوی افق کے ساتھ زاویہ عہ بنائے۔ اگر پھسلن واقع نہیں ہوتی تو ذرہ، اپنے وزن و اور اس تعامل کے زیر عمل توازن میں ہے جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے۔ اس لیے تعامل میں ایک انتصابی قوت و شامل ہونی چاہئے۔ ہم اس تعامل کو دو اجزائے ترکیبی و جم عہ اور و جب عہ میں جو مستوی پر عمود اور اس کے متوازی ہیں تحلیل کر سکتے ہیں۔ قبل الذکر تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ہے۔ اور موخر الذکر رگڑ کا جزو ترکیبی۔ اس لیے مستقلہ ترقیم میں



شکل (۲۱)

سا = و جم عہ  
ف = و جب عہ  
اس لیے اس صورت میں  
ف = سا مس عہ  
جیسے عہ بڑھتا ہے ف اور ف  
دونوں بڑھتے ہیں یہاں تک جب عہ

قیمت صد پرہنجتا ہے تو  $\frac{1}{100}$  اپنی انتہائی قیمت صد پرہنجتا ہے اور اس کے بعد بحسب وزن واقع ہوتی ہے۔

## مثالیں

- ۱۔ ۱۰۰ پونڈ کی ایک کمیت ایک کھردے مستوی پر رکھی ہوئی ہے، یہ کمیت عین حرکت کرنے کو ہوتی ہے جبکہ اس پر ایک قوت ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی افقی طور پر عمل کرتی ہے۔ اگر گڑ کا زاویہ معلوم کرو۔
- ۲۔ ایک جسم ایک مائل سطح مستوی پر جواقی کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بناتی ہے رکھا ہوا ہے۔ یہ جسم سطح کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہوتا ہے جبکہ اس پر ایک افقی قوت اس کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہے۔ اگر گڑ کی قدر معلوم کرو۔
- ۳۔ ایک شخص جو ۲۰۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچنے کی قابلیت رکھتا ہے ایک افقی سڑک پر (اگر گڑ کی قدر  $\frac{1}{100}$ ) ۱۰۰ پونڈ کی ایک کمیت کھینچنے کی کوشش کرتا ہے۔ اس کی مدد کے لیے حاملہ کی زنجیر کمیت کے ساتھ باندھ دی گئی ہے، زنجیر انتصایاً لٹک رہی ہے۔ زنجیر میں کتنا تناؤ ہونا چاہیے کہ شخص کمیت کو عین حرکت دے سکے۔
- ۴۔ ایک کیٹرا، نصف قطر ۱ کے ایک نیم کروی پیالے کی اندرونی سطح اوپر وارہینے کی کوشش کرتا ہے۔ وہ کتنا اونچا چڑھ سکتا ہے اگر اس کے پاؤں اوپر پیالے کے درمیان رگڑ کی قدر  $\frac{1}{100}$  ہو۔
- ۵۔ ایک شخص برف پر پتھر کے ایک گنڈ کو دھکیلنے کی کوشش میں افقی طور پر قوت لگاتا ہے لیکن اسے معلوم ہوتا ہے کہ جوں ہی پتھر حرکت کرنے لگتا ہے اس کے پاؤں پھسلنے لگتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر وہ اوپر وار پتھر کو دھکیلے تو وہ بغیر کسی شکل کے پتھر کو متحرک کر سکتا ہے لیکن اگر وہ نیچے وار زور لگائے تو وہ اس کو شاید بڑھائی نہ سکے۔
- ۶۔ ایک چکنی چرخہ ایک افقی مستوی کے کنارے رکھی ہوئی ہے۔ اس پر

(۲۹) ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے ایک سرے پر وزن و آزادانہ لٹک رہا ہے اور دوسرے سرے پر وزن و بند ہوا ہے جو مستوی پر ساکن ہے۔ اگر رگڑ کی قدر نہ ہو اس قدر بڑی ہو کہ حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی تو معلوم کرو کہ کس زاویہ میں سے مستوی کو جھکانا چاہئے کہ حرکت علین واقع ہونے کو ہو۔

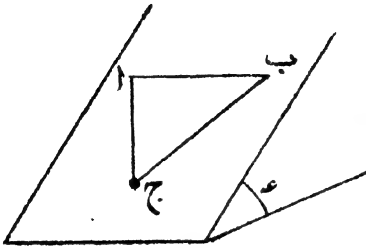
۷۔ کمیت گ کا ایک سیاح کمیت ک کے ایک رہنما سے کسی کے ذریعہ بندھا ہوا ہے اور یہ دونوں ایک پہاڑ کے رخ پر ہیں جسے ایک مقلوب نیم کرہ سمجھا جاسکتا ہے۔ کسی کا طول پہاڑ کے مرکز پر زاویہ عمہ بناتا ہے اور کسی پہاڑ کے کسی نقطہ کو مس نہیں کرتی۔ اگر ان میں سے کسی شخص اور پہاڑ کے درمیان رگڑ کی قدر نہ ہو تو معلوم کرو کہ پہاڑ کے رخ پر نیچے کی جانب سیاح کتنی دور تک جانے کی جرات کر سکتا ہے قبل ازیں کے کہ وہ اور رہنما دونوں پہاڑ کے دامن میں گر جائیں۔

### توضیحی امثلہ

۱۔ ایک ذرہ ج ایک چکنے نال مستوی پر دو ڈوریوں کے ذریعہ جکے طول ل ل ہیں اور جو مستوی کے نقطوں ا ب کے ساتھ بندھی ہوئی ہیں ساکن ہے یہ نقطے ا ب ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ ف ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ اور وہ تعال معلوم کرو جو مستوی اور ذرہ کے درمیان ہے۔ فرض کرو کہ ذرہ کا وزن و ہے اور مستوی کا میلان افق کے ساتھ عمہ ہے۔ ذرہ حسب ذیل قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے :

- (ا) اس کا وزن و جو انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے،
  - (ب) ذرہ اور مستوی کے درمیان تعال۔ چونکہ مستوی چکنا ہے، یہ تعال مستوی کے عمود وار عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اس تعال کی مقدار م ہے۔
  - (ج) وہ دو تناؤ جن کی مقداریں مطلوب ہیں۔ فرض کرو کہ ان کی مقداریں
- حسب احتیاج سے تعبیر ہوتی ہیں۔





شکل (۲۲)

چونکہ یہ چار قوتیں توازن پیدا کرتی ہیں اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے تخیلی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ ڈوریوں کے تناؤ مستوی کے عمود وار کوئی اجزائے تخیلی نہیں رکھتے، اس لیے قوتوں کو مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے ہمیں ایک ایسی مساوات ملے گی جس میں صرف دو قوتیں شامل ہوں گی۔

وزن کا جزو تخیلی مستوی کے عمود وار وجم عہ ہے۔ تعادل پورے کا پورا مستوی کے عمود وار ہے۔ اس لیے وہ مساوات جس کی ہمیں تلاش ہے

$$\text{مسا} - \text{وجم عہ} = ۰$$

ہے۔ اس سے فوراً تعادل کی مقدار معلوم ہوتی ہے۔

اب ہم اہل مستوی میں قوتوں کے اجزائے تخیلی پر غور کریں گے۔ وہ قوتیں جن کے اجزائے ترکیبی اس مستوی میں ہیں صرف حسب ذیل ہیں:

(۱) وزن جس کا جزو ترکیبی وجم عہ ہے اور خط میلان اعظم میں نیچے کی جانب عمل کرتا ہے۔

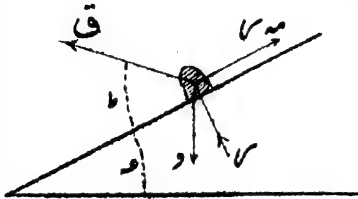
(ب) ڈوریوں کے تناؤ جو کاملاً مستوی میں ہیں اور جو ڈوریوں ج 'د' ج ب کی سمت میں عمل کرتے ہیں۔

یہ تین قوتیں وجم عہ، اہم اور ج (توازن میں نہونی چاہئیں، (۵۰) اس لیے لامی کے مسئلہ کی رو سے ہر ایک، دوسری دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے۔

شکل (۲۳) میں ان تین قوتوں کے خطوط عمل ج 'د' ج 'ا' ج ب ہیں۔ خط ج 'د' ج میں سے گزرنے والا خط میلان اعظم ہونے کی وجہ سے خط ج 'ب' کے علی القوائم ہے جو افقی ہے۔ پس اگر د ج کو بڑھایا جائے اور وہ ج 'ب' سے ن پرے توازیہ ا ن ج قائم ہے۔ اس لیے



ایک قوت  $Q$  مستوی کے نیچے ایک ایسی سمت میں اس پر لگائی گئی ہے جو خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنا تی ہے، اس قوت کے متعلق فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ جسم کو متحرک کرنے کے لیے عین کافی ہے۔  
جسم پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:



(۱) اس کا وزن 'و'

(ب) قوت عاملہ  $Q$

(ج) مستوی کے ساتھ تعامل -

فرض کرو کہ اس آخری قوت کو مستوی

اور اس کے عمود وار دو اجزائے ترکیبی

میں تحلیل کیا گیا ہے۔ اگر بعد الذکر کو

فرض کریں تو قبل الذکر جزو ترکیبی  $W \sin \theta$  ہو گا جو مستوی کی اوپر کی جانب عمل کرتے گا کیونکہ بموجب فرض جسم مستوی کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہے۔

(۵۱) ان تمام قوتوں کا حاصل معدوم ہوتا ہے، اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ قوتوں کو مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے

$$Q + W \sin \theta - W \cos \theta = 0$$

اور مستوی میں تحلیل کرنے سے

$$Q \cos \theta + W \sin \theta - W \cos \theta = 0$$

نامعلوم تعامل  $W \sin \theta$  کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$Q \cos \theta = W \sin \theta \quad \text{و} \quad (W \sin \theta - W \cos \theta) = 0$$

$$Q = \frac{W \sin \theta}{\cos \theta} = W \tan \theta$$

اس لیے  $W \sin \theta$  کی بجائے  $W \cos \theta$  رکھنے سے

$$Q = \frac{W \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{W \cos \theta}{\sin \theta} = W \cot \theta$$

ق کی قیمت اقل ہوگی جبکہ جم (طہ - صہ) اعظم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ جم (طہ - صہ) = ایسی جبکہ طہ = صہ۔ اس صورت میں ق کی قیمت ہے

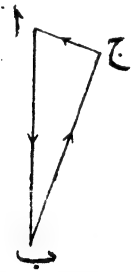
$$ق = وجب (صہ - عہ)$$

پس یہ وہ چھوٹی سے چھوٹی قوت ہے جس سے حرکت پیدا کیجا سکتی ہے اور اسے عمل کرنا چاہئے اس طور پر کہ وہ مستوی کے ساتھ ایک ایسا زاویہ طہ بنا جو زاویہ رگڑ صہ کے مساوی ہو۔ چونکہ بموجب فرض وزن بغیر پھسلے ساکن رہتا ہے جبکہ کوئی قوت لگائی نہیں جاتی اس لیے زاویہ صہ کو عہ سے بڑا ہونا چاہئے۔

اس لیے قوت ق کی سمت ہمیشہ اوپر وار سمت میں مائل ہونی چاہئے۔ قوت ق کا عمل دو گونہ ہے، وہ جسم کے وزن کا کچھ حصہ سہارا دیتی ہے (اپنے اس جزو کبجی کے ذریعہ جو مستوی پر عمود ہے) اور اس لیے رگڑ کی مقدار کو گھٹاتی ہے، نیز وہ رگڑ کی مزاحمت پر غالب آنے کے لیے محرک طاقت (اپنے اس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو مستوی میں ہے) بھی ہتیا کرتی ہے۔ جب اس قوت کے یہ دو حصے

مفید ترین طریقہ پر لگے ہوئے ہوں تو ق کی قیمت اقل ہوتی ہے اور یہ جیسا کہ ہم ثابت کر چکے ہیں اس وقت ہوتا ہے جبکہ طہ = صہ

اس مسئلہ کا ایک دلچسپ اور سبق آموز حل ہندسی طور پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ توازن کے لیے متذکرہ بالا تین قوتوں کو قوتوں کا ایک مثلث بنانے کی شرط کو پورا کرتا چاہئے۔



شکل (۲۵)

فرض کرو کہ 'ا' ب' وزن کو تعبیر کرتا ہے اور 'ج' 'ا' کیست اور مستوی کے درمیان تعامل کو۔ اس لیے 'ج' 'ا' قوت عاملہ ق کو تعبیر کرنا چاہئے۔ اگر جسم حرکت کے نقطہ پر ہے تو تعامل کو مستوی کے عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہئے، اس لیے زاویہ 'ا' ب' ج' صہ - عہ ہونا چاہئے اس لیے خط 'ب' ج' سمت میں ثابت ہے۔

اور مسئلہ یہ ہے کہ  $\Delta$  ج کی مقدار اور سمت معلوم کی جائے جبکہ طول  $\Delta$  ج اقل ہو۔ صریحاً  
اس کی اقل قیمت واقع ہوتی ہے جبکہ  $\Delta$  ج 'ب' ج پر عمود ہوتا ہے، اس لئے  
 $\Delta$  ج ایسی سمت میں ہونا چاہئے جو افق کے ساتھ زاویہ ص - عہ بنائے جیسا  
قبل ازیں معلوم کیا جا چکا ہے، نیز چونکہ  $\Delta$  ج =  $\Delta$  ب جب  $\Delta$  ج  
=  $\Delta$  ب جب (ص - عہ) اس لئے مطلوبہ قوت کی مقدار وجب (ص - عہ)  
ہوگی۔

ہوئی۔  
۳۔ ایک ذرہ ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہے اور ڈوری کا (۵۲)  
دوسرا سر ایک کھردرے مائل مستوی میں ایک نقطے پر ثابت ہے۔  
مستوی کا وہ حصہ معلوم کر جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔  
ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) اس کا وزن و انتصاب ایسے

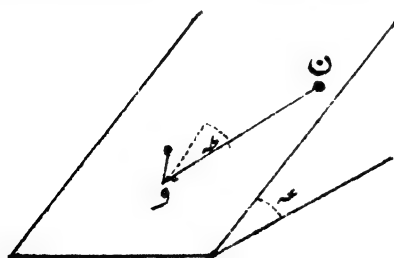
(ب) ڈوری کا تناؤ،

(ج) کھردرے مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ دوری کا طبعی طول  $L$  ہے اور لچک کا متقیاس  $l$  ہے تو جب

دوری کا واقعی طول رہتا ہے جہاں  $r$  ل تو متناؤ  $\frac{(r-l)}{l}$  ہے۔

فرض کرو کہ سستی کا میلان  $\epsilon$  ہے اور سستی اور ذرہ کے درمیان رگڑ کی



عمل کرنے والی قوتیں صرف ذرہ کا وزن اور مستوی کے ساتھ اس کا تعامل ہیں۔  
اس لیے

ک۔ وجم عہ = ۰  
اب ذرہ کے توازن پر غور کرو جبکہ وہ کسی نقطہ ن پر ہو جس کا فاصلہ  
و سے ر (ل) ہے۔ اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی  
مائل مستوی میں حسب ذیل ہیں:  
(۱) وجم عہ ن میں سے گزرنے والے خط میلان اعظم کی سمت  
میں نیچے کی جانب،

(ب) تناؤ (ر-ل) ل، سمت ن و میں،

(ج) تعامل کا ذرہ جزو ترکیبی جس کو ہم نے ف سے تعبیر کیا ہے۔  
فرض کرو کہ و ن، مستوی کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔  
چونکہ پہلے دو قوتوں کا حاصل مقدار ف کا ہونا چاہئے اس لیے

$$ف = وجم عہ + \frac{(ر-ل) ل^2}{ل} + \frac{۲(ر-ل) ل}{ل} وجم عہ طہ$$

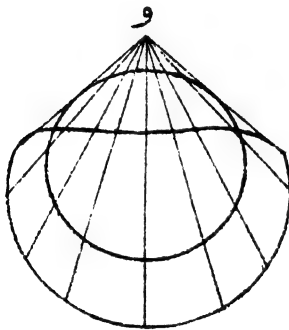
جس سے فرکی قوت کی وہ مقدار معلوم ہوگی جو توازن قائم رکھنے کے لیے ضروری  
ہے۔ اگر ذرہ حرکت کرنے کو ہو تو ف = مہ س = مہ وجم عہ اور اس لیے

$$و (جم عہ - مہ جم عہ) + \frac{(ر-ل) ل^2}{ل} + \frac{۲(ر-ل) ل}{ل} وجم عہ طہ = ۰ \dots (۵۳)$$

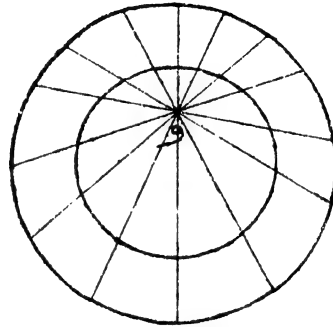
چونکہ نقطہ ن کے قطبی محور طہ ہیں اس لیے مساوات (۱) مستوی کے  
اس حصہ کے حدود کی قطبی مساوات ہے جس کے انحد ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔  
اس مساوات کی توجیہ آسان ترین طریقہ پر ہوگی اگر ہم یہ دیکھیں کہ ر-ل  
کی بجائے ر رکھنے سے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$و (جم عہ - مہ جم عہ) + \frac{ل^2}{ل} ر + ۲ \frac{ل}{ل} وجم عہ \times رجم طہ = ۰ \dots (ب)$$

جو ایک دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔ پس ابتدائی طریقی جو مساوات (ا) سے تعبیر ہوتا ہے اس طور پر کھینچا جاسکتا ہے کہ اول وہ دائرہ کھینچ لیا جائے جو مساوات (ب) سے تعبیر ہوتا ہے اور پھر مساویوں سے گزرنے والے ہر سمتی نیم قطر کو (اس دائرہ کے محیط کے آگے فاصلہ ل تک بڑھایا جائے۔



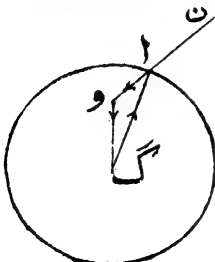
شکل (۲۸)



شکل (۲۴)

یہی نتیجہ ہندسی طور پر مسئلہ کو حل کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ذرہ جس سمتی پر ساکن ہے اس میں صرف تین قوتیں اس پر عمل کرتی ہیں؛ اسلئے ان قوتوں کے متوازن اور متناسب خطوں کو ایک مثلث بنانا چاہئے۔

شکل (۲۹) میں فرض کرو کہ و ن دوری ہے اور فرض کرو کہ ن سے خط ن ا طول ل کا پیمائش کیا گیا ہے اور اس لیے ا و دوری کی توسیع ر۔ ل ہے۔ تناؤ ہمیشہ ا و کے متناسب ہوگا اور ا و کی سمت میں عمل کرے گا۔ فرض کرو کہ ہم یہ طے کر لیتے ہیں کہ قوتوں کے مثلث میں تناؤ کو حقیقی خط ا و سے



شکل (۲۹)

تعبیر کر لیا گیا ہے۔ اسی پیمانہ پر فرض کرو کہ وزن کا جزو ترکیبی و جب عہ خط و گ سے تعبیر ہوتا ہے جس کی سمت بلاشبہ نیچے دار و میں سے گزرنے والے خط میلان اعظم کی سمت ہے۔ پس ا و گ کو قوتوں کا مثلث ہونا چاہئے اور اسلئے گ ا سے

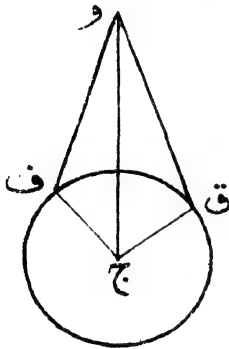
وہ فرکی تعامل تبصرہ ہونا چاہئے جو ذرہ اور ستوی کے درمیان ہے۔ اس کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت  $m$  و  $W$  جم  $m$  ہے اور اس لیے اگر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو  $g$  (قوت  $m$  و  $W$  جم  $m$  کو تبصرہ کرے گا۔ پس  $n$  کے ایک محل کے متناظر جس میں پھسلن میں واقع ہونے کو ہو) کا محل ایسا ہے کہ  $g$  (مستقل قوت  $m$  و  $W$  جم  $m$  کو تبصرہ کرنا ہے یعنی دوسرے الفاظ میں) کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز  $g$  ہے۔ اس سے وہ عمل ملتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔

(۵۴) مستوی کا وہ حصہ جس میں توازن ممکن ہے دو مختلف شکلیں اختیار کرتا ہے بموجب اس کے کہ بائل مستوی کا زاویہ  $\theta$ ، رگڑ کے زاویہ  $\mu$  سے چھو یا بڑا ہو۔ پہلی صورت میں توازن کا قطعہ اس قسم کا ہے جس کو شکل (۲۷) میں بنٹلایا جا چکا ہے۔ قیمت  $\theta = \mu$  سے گزرنے پر وہ دائرہ جو محل میں استعمال کیا گیا ہے نقطہ  $W$  میں سے گزرتا ہے اور  $m$  سے بڑی  $\theta$  کی قیمتوں کے لیے توازن کا قطعہ اس قسم کا رقبہ ہو جاتا ہے جس کو شکل (۲۸) میں کھینچا گیا ہے۔ کیونکہ  $\theta$  کی ان قیمتوں کے لیے جو  $\mu$  سے بڑی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) نصف قطر کا دائرہ جس کا مرکز  $W$  ہے قائمیت کے قطعہ سے بالکل باہر واقع ہوتا ہے، اس کے برخلاف  $\theta$  کی ان قیمتوں کے لیے جو  $\mu$  سے چھوٹی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) یہ دائرہ توازن کے قطعہ میں کھلا واقع ہوتا ہے۔ مگر یہ دائرہ اس قطعہ کو نشان زد کرتا ہے جس کے اندر وزن ڈوری کے ساتھ ساکن رہ سکتا ہے لیکن وہ توازن کا قطعہ ہوگا اگر  $\theta > \mu$  اور توازن کا قطعہ نہیں ہوگا اگر  $\theta < \mu$ ۔

اس طرح یہ دائرہ اس طریقہ پر توازن کے قطعہ کے اندر یا باہر واقع ہوگا جس کا علم علم تحلیل سے حاصل کر لیا گیا ہو۔ اس کے ساتھ ہی بغیر مبالغہ تحقیق کے جس میں اس کا یقین نہیں ہو سکتا تھا کہ وہ نتیجہ جو علم تحلیل سے حاصل ہوا ہے اس قطعہ کے متعلق صحیح ہے جو  $W$  سے فاصلہ  $L$  کے اندر واقع ہے۔ کیونکہ تحلیل تو یہ فرض کر کے شروع ہوئی تھی کہ ڈوری اتنی چھوٹی ہے اور اس لیے اس کا اطلاق صرف اس قطعہ پر ہو سکتا ہے جو  $W$  سے بڑے فاصلہ پر واقع ہے۔



۴۔ دو وزن و 'و' ایک چکنے کرہ پر ایک ڈوری کے ذریعہ جو ۵ پر کے ایک چھوٹے حلقہ میں سے گزرتی ہے سہلے گئے ہیں جہاں و 'کرہ کے مرکز کے انتصا با اوپر واقع ہے۔ توازن کی تشکیل معلوم کرو۔



شکل (۳۰)

فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں ان دو اوزان کے محل 'ف' 'ق' شکل

(۳۰) ہیں۔ ف پر کے وزن و چسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں :

(۱) اس کا وزن و انتصا با

نیچے دار

(ب) ڈوری کا تناؤ سمت ف و

میں۔

(ج) وہ تعالٰیٰ جو کرہ اور وزن کے درمیان ہے چونکہ کرہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اسلئے اس تعالٰیٰ کی سمت 'ذره اور کرہ کے تماس کے مستوی کے علی القوائم ہے یعنی اس کی سمت ج ف ہے۔

یہ تین قوتیں جو ذرہ ف پر عمل کرتی ہیں مثلث و ف ج کے تین ضلعوں کے متوازی ہیں۔ اس لیے مثلث و ف ج کو ان تین قوتوں کا مثلث تصور کیا جاسکتا ہے، ان قوتوں کی مقداریں اس مثلث کے اضلاع کے متناسب ہونی چاہئیں۔ تناؤ اور تعالٰیٰ کو ت اور س سے تعبیر کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{و}{ج} = \frac{ت}{و} = \frac{س}{ج} \dots \dots \dots (۱)$$

اسی طرح مثلث و ج ق کو ذرہ ق کے لیے قوتوں کا مثلث سمجھا جاسکتا ہے۔ (معنی مباد کہ یہ مثلث اسی پیمانہ پر قوتوں کو تعبیر نہیں کرتا جس پیمانہ پر مثلث و ف ج تعبیر کرتا تھا کیونکہ اس صورت میں و ف سے وزن و کو تعبیر کیا گیا تھا اور اب و ق سے وزن و تعبیر ہوتا ہے)۔

قوتوں کے اس دوسرے مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{و}{ج} = \frac{ت}{و} = \frac{م}{ج} \quad (ب) \dots\dots\dots$$

جہاں ت اور م سے وہ تناؤ اور تعامل تعبیر ہوتے ہیں جو ق پر عمل کرتے ہیں۔

چونکہ و پر کے حلقہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اس لیے ڈوری ف و ق کا تناؤ ہر نقطہ پر وہی ہے اس لیے ت = ت - پس مساواتوں (ا) اور (ب) سے

$$و \times ف = و \times و \quad (ج) \dots\dots\dots$$

کیونکہ ہر مصل ضرب ت  $\times$  و ج کے مساوی ہے۔ اگر ڈوری کا پورا طول ل ہو تو

$$\frac{و}{ق} = \frac{و}{ف} = \frac{و}{ل} \quad (د)$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری خود کو اس طور پر ترتیب دے لیتی ہے کہ وہ نقطہ ویران دو وزنوں کی نسبت معکوس میں تقسیم ہوتی ہے۔ نیز ہم مساواتوں (ا) اور (ب) سے دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{م}{و} = \frac{م}{و}$$

کیونکہ ہر ایک نسبت وہ نسبت ہے جو کرہ کے نصف قطر کو و ج کے ساتھ ہے۔ اگر ڈوری نا امتداد پذیر ہے تو طول ل معلوم ہے اور اس لیے مساواتوں (د) سے طول و ف و ق پوری طرح معلوم ہوتے ہیں۔ لیکن فرض کرو کہ ڈوری امتداد پذیر ہے اور فرض کرو کہ اس کا فطری طول ل اور مقیاس ل ہے۔ اب ل ایک نامعلوم مقدار ہے اور اس کے لیے ہمیں ایک زائد مساوات نامعلوم مقداروں کے درمیان حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے :

$$ت = \frac{ل - 1}{1}$$

اب چونکہ مساوات (ج) سے مقدار ت  $\times$  و ج کے لیے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں





دہی ہو جو ف خ کی ہے۔ ثابت کرو کہ  $\frac{2}{3}$  ف خ اول خ = ۰

۴۔ ایک جسم ایک چکنے مائل مستوی پر دو قوتوں کے ذریعہ سہارا گیا ہے، یہ قوت جسم کے نصف وزن کے مساوی ہے اور ان میں سے ایک افقی طور پر عمل کرتی ہے اور دوسری مستوی کے متوازی۔ مستوی کا میلان معلوم کرو۔

۵۔ ایک چکنے مائل مستوی کا میلان  $30^\circ$  ہے اور اس پر ایک جسم افقی طور پر عمل کرنے والی قوت ف سے سہارا گیا ہے۔ دوسری کونسی سمت میں قوت ف عمل کر سکتی ہے اور جسم کو سہارا سکتی ہے۔ ان دو صورتوں میں مستوی پر کے دباؤ کا مقابلہ کر

۶۔ دو چکنے مستوی جن کے میلان  $\alpha$  اور  $\beta$  ہیں ایک افقی خط (ج) پر ملتے ہیں۔ (ج) کے ایک نقطہ پر ایک چھوٹا چکنے حلقہ ہے جس میں سے ایک دوری گذرتی ہے جس کے دونوں سروں پر وزن بند ہے ہیں، ان میں سے ایک وزن ایک مستوی پر اور دوسرا دوسرے مستوی پر ہے اور یہ اوزان اور حلقہ ایک ہی انتصابی مستوی میں ہیں۔ اگر اوزان توازن میں ہوں تو دوری کا تاؤ اور وزن کی نسبت معلوم کرو۔

۷۔ وزن  $W$  اور  $w$  کے دو چکنے حلقے ایک دوری سے مربوط ہیں اور ایک دائری تار کی محذب جانب انتصابی مستوی میں متوازن ہیں ثابت کرو کہ اگر دائرہ کے مرکز پر دوری کے عمادی زاویہ  $\alpha$  بنے تو انتصابی کے ساتھ دوری کا زاویہ میلان  $\theta$  حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{مس ط} = \frac{W + w}{W - w} \tan \frac{\alpha}{2}$$

۸۔ دو اوزان ایک کھردرے مستوی پر ساکن ہیں، یہ اوزان ایک دوری سے مربوط ہیں جو مستوی کی ایک چکنی کھوٹی پر سے گذرتی ہے۔ اگر دائرہ میلان  $\alpha$  زاویہ رکڑ  $\theta$  سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ کمترین وزن کو بڑے وزن کے ساتھ کم سے کم نسبت

$$\frac{\text{جب } (\alpha - \theta)}{\text{جب } (\alpha + \theta)} \text{ ہے۔}$$

۹۔ دو وزن ایک کمر درے دوہرے مائل مستوی پر ایک دوسرے کو ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو راس پر سے گزرتی ہے سہارے ہوئے ہیں اور دونوں اوزان عین حرکت کرنے کو ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مستوی کو جھکا یا جائے یہاں تک کہ دونوں اوزان پھر حرکت کرنے کو ہوں تو وہ زاویہ جس میں سے مستوی کو جھکانا ہوگا رگڑ کے زاویہ کا دگنا ہوگا۔

۱۰۔ دو اوزان ف اور ق ایک ہی مادی شے سے بنائے گئے ہیں یہ اوزان ایک دوہرے مائل مستوی پر ساکن ہیں اور ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو مشترک راس پر سے گزرتی ہے مربوط ہیں۔ ان میں سے وزن ق مستوی کے نیچے حرکت کرنے کو ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو توازن کے خلل کے بغیر ف میں جمع کیا جاسکتا ہے حسب ذیل ہے

ف جب ۲ صہ جب (عہ + بہ)

جب (عہ - صہ) جب (بہ - صہ)

جہاں مستویوں کے زوایائے میلان عہ اور بہ ہیں اور زاویہ رگڑ صہ ہے۔  
۱۱۔ ایک جسم ایک کمر درے مائل مستوی پر ایک قوت کے ذریعہ مستوی میں عمل کرتی ہے سہارا گیا ہے۔ اگر قوت کی کم سے کم مقدار جبکہ مستوی افق سے زاویہ عہ پر مائل ہو اس قوت کی بڑی سے بڑی مقدار کے مساوی ہو جبکہ مستوی افق سے زاویہ بہ پر مائل ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کا زاویہ  $\frac{1}{2}$  (عہ - بہ) ہے۔

۱۲۔ وزن و کے دو مساوی پتھلے ایک پردے کی دندڑی پر حرکت کر سکتے ہیں اور رگڑ کی قدر صہ ہے۔ چھلے طول ل کی ایک ڈھیل ڈوری سے مربوط ہیں جو ایک پتھلے چھلے کے ذریعہ وزن و کو سہارتی ہے۔ چھلے ایک دوسرے سے کتنے فاصلہ پر ہونے چاہئیں کہ وہ ایک دوسرے سے قریب آکر نہ ملیں۔

۱۳۔ مختلف مادی اشیاء سے بنے ہوئے دو اوزان ف اور ق ایک کمر درے مستوی پر رکھے گئے ہیں۔ مستوی کا میلان طہ ہے اور اوزان ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستوی اور افق کے خط تقاطع سے ۵۴° پر مائل ہے۔ دونوں وزن حرکت کے نقطہ پر ہیں۔ ف اور ق کی رگڑ کی قدریں

معلوم کرواگر یہ معلوم ہو کہ اوپر کے وزن کی قدر نیچے کے وزن کی قدر سے دگنی ہے۔  
 ۱۴۔ ایک وزنی حلقہ خروج المکرز کے ایک چکے ناقصی بنا جو انتصابی  
 مستوی میں ہے آزادانہ پھسل سکتا ہے۔ ناقص کا محور اعظم افق کے ساتھ زاویہ  $\alpha$  سے  
 بناتا ہے اور ایک دوری جو حلقے سے بندھی ہے ناقص کے مرکز پر کی ایک چکائی  
 کھوئی پر سے گذرتی ہے اور مساوی وزن کے ایک جسم کو سمبھارتی ہے۔  
 ثابت کرو کہ حلقے اور تار کے نقطہ تماس پر تار کا محاس محور اعظم کے ساتھ جو زاویہ  $\phi$  بناتا  
 ہے حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے :

مس (فہ + عم) (قطا - فہ - ز) = ز مس فہ  
 ۱۵۔ دو چھوٹے چکے حلقے جنکے وزن  $W$  و  $W'$  ہیں ایک دوری کے  
 ذریعہ مربوط کئے گئے ہیں اور وہ دو ثابت تاروں پر پھسلتے ہیں، ان میں سے  
 پہلا انتصابی ہے اور دوسرا افق سے زاویہ  $\alpha$  پر مائل ہے۔ ایک وزن  $F$   
 دوری سے باندھ دیا گیا ہے اور اس دوری کے دو حصے انتصابی کے ساتھ  
 زاویے  $\theta$  و  $\phi$  بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

مس  $\theta$  : مس  $\phi$  : مس  $\alpha$  =  $W : F + W : F + W' + W'$   
 ۱۶۔ نامساوی کمیت کے دو ذرے ایک تیسرے ذرہ کے ساتھ مہین  
 نامتناہی پذیردوریوں کے ذریعہ باندھ دئے گئے ہیں۔ وہ ایک کھردرے مائل  
 مستوی پر پڑے ہیں اور دُوریاں تنبی ہوئی ہیں اور مستوی میں افقی خط کے ساتھ  
 زاویے  $\alpha$  سے بناتی ہیں۔ کم سے کم افقی قوت کی مقدار اور سمیت معلوم کرو  
 جس کو تیسرے ذرہ پر لگانے سے تینوں ذرے حرکت کرنے لگیں۔

۱۷۔ ایک وزنی ذرہ ایک کھردرے مائل مستوی پر جس کا میلان  $\alpha$  سے رگڑ کے  
 زاویہ کے مساوی ہے رکھا گیا ہے۔ ایک دوری ذرہ سے باندھ دی گئی ہے جو ایک سو راخ  
 میں سے جو مستوی میں ذرہ سے نیچے چد رہے گذرتی ہے لیکن وہ اس نقطہ میں سے گذرنیوالے  
 خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سو راخ میں سے دوری کو بتدریج کھینچا جائے  
 تو ذرہ ایک خط استقیم اور ایک نیم دائرہ ملی تو آخر میں قسم کرے گا۔

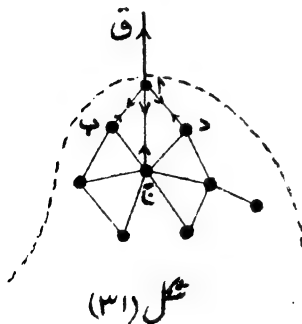
(۴۹)

## چوتھا باب ذروں کے نظاموں کا علم سکون

۴۴۔ ہم نے اب تک ایک واحد ذرہ پر قوتوں کے عمل سے بحث کی ہے۔ لیکن مسئلوں کی ایک مختلف جماعت پیدا ہوتی ہے جب ہم ایک جسم پر جو ذروں کی ایک بہت بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہوتا ہے قوتوں کے عمل کا مطالعہ کرتے ہیں جبکہ قوتیں اس طریقہ سے لگائی جائیں کہ وہ جسم کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔

فرض کرو کہ قوت 'ق' ایک جسم کے ذرہ 'ا' پر لگائی گئی ہے جبکہ جسم ذروں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'.... کی ایک بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہے۔ اگر ذرہ 'ا' پر دوسرے ذروں 'ب'، 'ج'، 'د'.... کا کوئی اثر نہ ہوتا تو ذرہ 'ا' قوت عاملہ کے زیر عمل حرکت کرنے لگتا اور جلد دوسرے ذروں 'ب'، 'ج'، 'د'.... سے جدا ہو جاتا۔ لیکن اگر ذروں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'.... سے ایک واحد مسلسل

جسم کی ترکیب ہوئی ہے تو ایسا وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ فی الحقیقت جوں ہی ذرہ 'ا' دوسرے ذروں کے لحاظ سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے ذرہ 'ا' اور متصلہ ذروں 'ب'، 'ج'، 'د'.... کے درمیان اعمال اور تعاملات کے نظامات ظہور پذیر ہو جاتے ہیں۔





چنانچہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر عمل کرنے والی قوتیں (۱) کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھتی ہیں اور متناظر تعاملات ذروں 'ج' 'د'.... میں حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتے ہیں۔ جب 'ج' 'ج' 'د'.... حرکت کی ابتدا کرتے ہیں تو قوتوں کے دیگر نظامات 'ج' 'ج' 'د'.... کے متعلقہ ذروں عمل کرنے لگتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طرح تمام ذرے حرکت میں آتے ہیں اور صرف ذرہ (۱) کے ہی حرکت کرنے کی بجائے پورا جسم حرکت کرتا ہے۔ اب ہم غور کریں گے کہ آیا ایسا جسم یا اجسام کا نظام حرکت کرے گا یا ساکن (۶۰) رہے گا جبکہ قوتوں کے نظامات بیرونی جانب سے اس کے مختلف ذروں عمل کریں۔ لیکن ہمیں ہمیشہ یہ یاد رکھنا چاہئے کہ وہ قوتیں جو بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں صرف وہی جسم پر عمل کرنے والی نہیں ہیں بلکہ ان کے ساتھ وہ اعمال اور تعاملات بھی ہوتے ہیں جو مختلف ذروں کے درمیان ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

۴۵۔ اس آخری واقعہ کا ایک نتیجہ فوراً ظاہر ہے۔ کسی جسم کے ایک ذرہ (۱) پر ایک قوت لگانا اور اس کے دوسرے ذرہ 'ج' پر ٹھیک اتنی ہی متشابہ قوت لگانا یہ دونوں امور ایک ہی نہیں ہیں۔ کیونکہ اندرونی اعمال اور تعاملات کے نظامات دونوں صورتوں میں مختلف ہوں گے۔ کسی سادہ مثال سے معلوم ہو جائے گا کہ حاصل حرکت بھی بالعموم مختلف ہوگی، مثلاً کرسی کے پشت کے وسطی نقطہ پر کوئی افقی قوت لگائی جائے تو وہ ممکن ہے کرسی کو الٹ دے لیکن اگر اتنی ہی متشابہ قوت کرسی کے پایہ پر لگائی جائے تو وہ کرسی کو زمین پر گھسیٹگی اور تیز اس کو ایک انتصابی محور کے گرد گھمائے گی۔

وہ محل جہاں ذرہ ہے جبکہ اس پر قوت لگائی جاتی ہے قوت کا نقطہ عمل کہلاتا ہے۔ وہ خط جو اس نقطہ میں سے قوت کی سمت میں کھینچا جائے قوت کا خط عمل کہلاتا ہے۔ کسی قوت کے عمل سے متعلق جتنی چیزیں معلوم ہونی چاہئیں وہ

صریحاً حسب ذیل ہیں :

(ا) اس کی مقدار

(ب) اس کا نقطہ عمل

(ج) اس کا خط عمل

## معیار

۴۶۔ تعریف۔ کسی قوت کا معیار ایک خط کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القواہم ہو قوت اور اس اقل فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو ان دو خطوں کے درمیان ہے۔

یہ معیار جیسا کہ ہمیں جلد معلوم ہو گا اس خط کے گرد گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے جس کے گرد معیار کی پیمائش کی جاتی ہے، مثلاً اگر ایک ترازو کے بازو کا طول  $l$  ہو تو اس کے سرے پر وزن  $w$  کا معیار ترازو کے نصاب کے گرد  $l$  و ہو گا اور ہمیں معلوم ہو گا کہ یہ معیار بازو کو گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے۔

تعریف۔ کسی قوت کا معیار ایک خط  $l$  کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القواہم نہ ہو وہی ہوتا ہے جو  $l$  کے عمود و راستہ میں قوت کے جزو ترکیبی کا معیار  $l$  کے گرد ہے۔

قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں یعنی  $l$  کے متوازی اور اس کے عمود و تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ اعلیٰ ذکر سے  $l$  کے گرد گھمانے کا کوئی میلان حاصل نہیں ہو گا اور اس لیے صرف دوسرے جزو ترکیبی سے ہی گھمانے کا پورا میلان حاصل ہوتا ہے۔

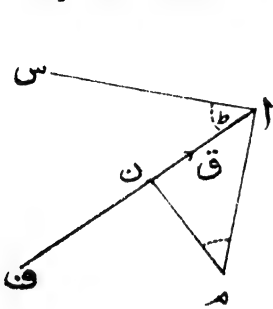
تذکرہ صدر دو تعریفیں کسی خط  $l$  کے گرد کسی قوت  $Q$  کے معیار کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ صریحاً معیار معدوم ہو گا اگر

(ا)  $Q$  کا خط عمل  $l$  کے متوازی ہو

(ب)  $Q$  کا خط عمل  $l$  کو قطع کرے۔

کیونکہ ظاہر ہے کہ ان میں سے کسی صورت میں  $ل$  کے گرد گھمانے کا میلان صفر ہوتا ہے۔

۴۷۔ فرض کرو کہ خط  $ل$  کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اس کو نقطہ  $م$  پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کاغذ کے مستوی میں ایک قوت  $ق$  کا خط عمل  $ف$  ہے اور قوت نقطہ  $ا$  کے ذرہ پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ  $م$  سے  $ا$  پر عمود  $م ن$  کھینچا گیا ہے۔ تب بموجب تعریف قوت  $ق$  کا معیار خط  $ل$  کے گرد  $ق \times م ن$  ہے۔



شکل (۳۲)

فرض کرو کہ زاویہ  $ف ا س$  زاویہ  $ن م ا$  کے مساوی کھینچا گیا ہے اور یہ زاویہ  $ط$  کے مساوی ہے اس لیے  $ا س$   $م ا$  پر عمود ہے۔ اب قوت  $ق$  کا معیار خط  $ل$  کے گرد

$$= ق \times م ن$$

$$= ق \times ا م \sin ط$$

$$= ا م \times ق \sin ط$$

$$= ا م \times ق \text{ کا جزو تحلیلی خط } س \text{ کی سمت میں۔}$$

ہم نے فرض کیا تھا کہ  $ا$  پر عمل کرنے والی قوت  $ق$  ہے اس کی بجائے فرض کرو کہ  $ق$  کسی دوسری قوت  $س$  کا جزو تحلیلی  $ا س$  مستوی میں ہے جو خط  $ل$  کے عمود وار ہے۔ اب  $ل$  کے گرد  $س$  کا معیار بموجب تعریف وہی ہے جو  $ق$  کا معیار ہے اور  $س$  کا جزو تحلیلی خط  $ا س$  کی سمت میں  $= ق \sin ط$ ۔ اس لیے جو کچھ ثابت ہوا ہے اس کو شکل ذیل میں رکھا جاسکتا ہے۔

$ل$  کے گرد کسی قوت  $س$  کا معیار جو  $ا$  پر عمل کرتی ہے

$$= ا م \times س \text{ کا جزو تحلیلی خط } س \text{ کی سمت میں۔}$$

اب  $س$  کی سمت میں متعین ہو جاتا ہے کیونکہ وہ  $ل$  پر اور نیز  $ا م$  پر عمود ہے

جہاں 'ا' سے 'ل' پر عمود ہے۔ اس لیے معیار کی ایک نئی تعریف ہمیں ملتی ہے جو قبل الذکر تعریف کے بالکل مماثل ہے یعنی:

کسی خط 'ل' کے گرد 'ا' پر عمل کرنے والی قوت کا معیار دو مقداروں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جن میں سے ایک مقدار 'ا' ہے جو 'ا' سے 'ل' پر عمود ہے اور دوسری مقدار 'س' کا جزو ترکیبی 'ا' سمت میں ہے جو 'ا' اور 'ل' دونوں پر عمود ہے۔

۴۸۔ معیار کے اس تحلیل سے ہمیں فوراً حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

کسی خط 'ل' کے گرد 'ا' پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ 'ل' کے گرد ان قوتوں کے حاصل کے معیار کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ یہ قوتیں 'س'، 'س'، 'س'، .... ہیں اور ان کا حاصل 'س' ہے۔ فرض کرو کہ 'ا' حسب دفعہ (۴۷) 'ا' سے 'ل' پر عمود ہے اور فرض کرو کہ 'ا' 'س' وہ سمت ہے جو 'ا' اور 'ل' دونوں پر عمود ہے۔ مسئلہ ثابت شدنی یہ ہے کہ

$$\begin{aligned} & \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \dots \\ & \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \dots \\ & \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \dots \end{aligned}$$

$$= \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \text{ا} \times \text{س} + \dots$$

اس مساوات کی طرفین کو 'ا' سے تقسیم کرنے سے مسئلہ صرف یہ رہ جاتا ہے کہ 'س' کا جزو ترکیبی سمت 'ا' میں = سمت 'ا' میں 'س'، 'س'، 'س'، .... کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ، اور یہ بالکل درست ہے۔ اب ہم زیادہ واضح طور پر معلوم کر سکتے ہیں کہ کس طرح ایک قوت کے معیار سے گھمانے کے میلان کا ناپ حاصل ہوتا ہے۔ شکل (۳۲) میں 'م' نے ایک خط 'ل' کے گرد جو کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اس سے نقطہ 'م' پر

ملتا ہے معیار لیا ہے۔ وہ قوت جس کا معیار زیریکٹ ہے ایک قوت  $\alpha$  ہے جو  $\alpha$  پر عمل کرتی ہے۔ اہر ترین سمتیں باہم علی القواہم ہوں گی یعنی  $\alpha$  سے  $\alpha$  اور اس خط کی سمت جو  $\alpha$  میں سے  $\alpha$  کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

اس کا معیار  $\alpha$  کے گرد حسب تعریف  
 $\alpha \times \alpha$  کا جزو ترکیبی سمت  $\alpha$  میں

ہے۔

اب  $\alpha$  کا جزو ترکیبی سمت  $\alpha$  میں ایک ایسی قوت ہے جس کا خط عمل  $\alpha$  کو قطع کرتا ہے اور اس لیے  $\alpha$  کے گرد جسم کو گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اسی طرح  $\alpha$  کا جزو ترکیبی  $\alpha$  خط کے گرد جو  $\alpha$  میں سے  $\alpha$  کے متوازی کھینچا گیا ہے  $\alpha$  کے گرد گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا! اس طرح  $\alpha$  کو تین اجزاء ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جن میں سے صرف پہلا جزو ترکیبی یعنی جو  $\alpha$  کی سمت میں ہے  $\alpha$  کے گرد گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔ ہم نے پوری قوت  $\alpha$  کے معیار کی تعریف اس طریقہ پر کی ہے کہ وہ قوت کے اجزاء ترکیبی میں سے  $\alpha$  کا جزو ترکیبی کے معیار کے ماحثل ہو جاتا ہے جو گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ معیار کی علامت بھی ہوتی ہے اور مقدار بھی۔ کسی قوت  $\alpha$  کے خط عمل پر حرکت کرنے میں ہم خط  $\alpha$  کے گرد ایک سمت میں گھوم سکتے ہیں یا دوسری سمت میں۔ ہم اس امر پر اتفاق کرتے ہیں کہ جب گھماؤ ایک سمت میں ہو تو  $\alpha$  کا معیار  $\alpha$  کے گرد مثبت سمجھا جائے گا اور دوسری سمت میں ہو تو منفی۔

۴۹۔ اگر ایک ذرہ متعدد قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہو تو ان تمام قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہئے۔ ان مختلف قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ خواہ یہ معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں حاصل کے معیار کے مساوی ہو گا اور اس لیے وہ بھی صفر ہونا چاہئے۔ پس ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں :

جب ایک ذرہ کسی قوتوں کے زیرِ عمل توازن میں ہو تو کسی خط کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

## ذروں کے نظامات توازن میں

۵۰۔ فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام متعدد قوتوں کے زیرِ عمل توازن میں ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں دو قسم کی ہوتی ہیں:

(۱) بیرونی قوتیں، یہ وہ قوتیں ہیں جو بیرونی جانب سے ذرہ پر عمل کرتی ہیں مثلاً ذرہ کا وزن۔

(ب) اندرونی قوتیں، یہ وہ قوتیں ہیں جو اس ذرہ اور نظام کے باقی دیگر ذروں کے درمیان اندرونی طور پر عمل کرتی ہیں۔

اب اگر ذروں کا پورا نظام توازن میں ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر ذرہ جدا گانہ طور پر توازن میں ہونا چاہئے۔ پس دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(۶۴)

(۱) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں لیے جائیں تو ان کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

اور دفعہ ۴۸ میں ثابت شدہ مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(ب) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں تو ان کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

لیکن اگر ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو تو عمل جمع سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ذروں پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ بہر حال خود معدوم ہو گا کیونکہ اندرونی قوتیں اعمال اور تعلقات کے ازواج پر مشتمل ہوتی ہیں اور قوتوں کے

کسی ایسے زوج کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ چونکہ کل مجموعہ معدوم ہوتا ہے اور اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اس لیے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

اسی طرح وہ مسئلہ بھی جو بیرونی قوتوں کے معیاروں کے لیے مسئلہ بالا کے جواب میں ہے درست ہے۔ کسی خط ل کے گرد تمام اندرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ایک عمل اور تعامل کے معیار مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ اندرونی اور بیرونی تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے معیاروں کا ہر مجموعہ جداگنا صفر ہے۔ پس بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے۔ اس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلے ثابت کر دیے:

جب ذروں کا ایک نظام بیرونی قوتوں کے کسی نظام کے زیر عمل توازن میں ہو تو

(ا) کسی سمت میں ان تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوتا ہے،

(ب) کسی خط کے گرد ان تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

عام زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلے اس امر کو بیان کرتے ہیں کہ کسی سمت میں بڑھنے کا یا کسی خط کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہیں ہے۔

## توضیحی مثال

(۲۵)

جیڑخ اور محور۔ اس آلم میں جو جیڑخ اور محور کے طور پر مشہور ہے ایک دائری محور ہوتا ہے جو اپنے مرکزی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور اس کے ساتھ ایک دائری پھیمہ استوار طور پر لگا ہوتا ہے پھیمہ کا مرکز اور محور کا مرکز ایک دوسرے کے منطبق ہوتے ہیں۔ ایک سری یا دوری محور کے گرد لپٹی جاتی ہے اور اس کے سر پر

ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ ایک دوسری رسی یا ڈوری بھیدہ کے محیط کے گرد مخالف سمت میں لپیٹی جاتی ہے اور اس کے سرے پر بھی ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ ان دو اوزان کی نسبت کو مناسب طور پر منتخب کر کے اس آلہ کو متوازن کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ وہ اپنے محور کے گرد گھومتے کا کوئی میلان نہ رکھے۔

اب ہم اس نظام کے توازن پر غور کرتے ہیں جس میں چرخ اور محور اور رسیوں یا ڈوریوں کے وہ حصے شامل ہیں جو ان کے گرد لپیٹے گئے ہیں۔ مسئلہ کو سادہ بنانے کے لیے ہم اس نظام کے وزن کو بالکل نظر انداز کریں گے۔ اب بیرونی قوائے عاملہ حسب ذیل ہیں:

(۱) چرخ کے گرد لپیٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ب) محور کے گرد لپیٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ج) ان سہاراؤں کا عمل جو چرخ اور محور کو گرنے سے بچاتے ہیں۔

فرض کرو کہ اوزان ف اور ق

سے تعبیر ہوتے ہیں اس لیے وہ رسیوں کے

تناؤ بھی ہیں۔ فرض کرو کہ چرخ اور محور کے

نصف قطر علی الترتیب  $r$  و  $R$  ہیں۔

اب ہم ریاضیاتی زبان میں اس امر کو بیان

کریں گے کہ بیرونی قوائے عاملہ کے

معیاروں کا مجموعہ جبکہ انہیں محور کے

گرد لیا جائے صفر ہے۔

چرخ پر کی رسی کے تناؤ کا معیار

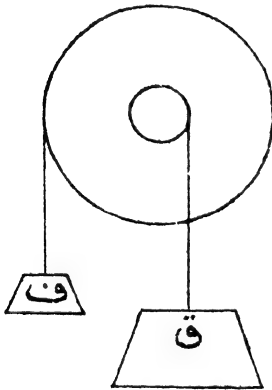
$f$  ہے کیونکہ تناؤ کی مقدار

$f$  ہے جو محور کے علی القوائم عمل کرتا

ہے اور  $R$  وہ چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے جو محور اور اس تناؤ کے خط عمل کے درمیان ہے

اسی طرح قوت (ب) کا معیار  $Q$  ہے، منفی علامت اس وجہ سے

لی گئی ہے کہ یہ قوت نظام کو اس سمت میں گھمانے کا میلان رکھتی ہے جو اس سمت



شکل (۳۳)



خالف ہے جس میں پہلا تناؤ گھمانے کا میلان رکھتا ہے۔  
 اگر ہم یہ خیال کریں کہ یہ نظام خود محور پر عمل کرنے والی قوتوں سے سپارہ ہوا ہے  
 تو قوتوں (ج) کا معیار معدوم ہوگا کیونکہ ان قوتوں کے خطاط عمل اس خط کو طبع کرینگے  
 جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں۔ اس لیے مطلوبہ مسادات ہے

$$F = Q \cdot B$$

یہ مسادات صرف یہ ظاہر کرتی ہے کہ

[نظام کو گھمانے میں F کا میلان] - [نظام کو گھمانے میں Q کا میلان] = ۰ ہے  
 اس لیے جب نظام متوازن ہو اس طور پر کہ وہ ساکن رہ سکے تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$F : Q = B : 1$$

یعنی اوزان نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہونے چاہئیں۔ چرخ اور محور کے  
 اصول کی عملی مثالیں ڈنڈا چرخ اور لنگر چرخ ہیں۔

## مثالیں

(۶۶)

- ۱۔ آٹھ ملاں جن میں سے ہر ایک ۱۰۰ پونڈ کی افقی قوت سے ایک لنگر چرخ کے  
 بازو پر مرکز سے ۸ فٹ کے فاصلہ پر زور لگا رہا ہے لنگر کو عین اٹھا سکے ہیں لنگر چرخ کے محور کا  
 نصف قطر ۱۲ انچ ہے۔ اس زنجیر کا تناؤ معلوم کر دو جو لنگر اٹھاتی ہے۔
- ۲۔ شکل ۳۳ کے الزمیں وزن F کو جدا کر لیا گیا ہے اور رسی کے آزاد سر کو  
 Q پر اسی نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے جس پر دوسری رسی کا سرابند ہوا ہے۔ ثابت  
 کر دو کہ توازن کی حالت میں یہ نقطہ انقباض محور کے نیچے ہوگا۔
- ۳۔ ایک پہلیہ ایک افقی محور کے گرد گھومنے میں آزاد ہے اور اس پر دو  
 رسیاں بندھی ہیں جو اس کے محیط کے گرد مخالف سمتوں میں لپیٹی ہوئی ہیں، دوسرے  
 دونوں سرے ایک چھوٹے حلقہ سے بندھے ہیں جس سے ایک وزن لٹکا ہوا ہے۔  
 ثابت کر دو کہ جب یہ نظام ساکن ہو تو یہ دو رسیاں انتظامی کے ساتھ مساوی زاوے بنائیں گی۔
- ۴۔ ایک شخص ایک قفل کیٹ کو اس کی چول سے ۸ فٹ کے فاصلہ سے  
 ۱۵۰ پونڈ کی افقی قوت لٹکا کر پانی کے دباؤ کے خلاف مین حرکت دے سکتا ہے۔

اُسے کتنی قوت لگانی ہوگی اگر وہ چول سے ۹ فٹ کے فاصلہ سے دبائے۔  
 ۵۔ ایک پھیدہ ایک افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اس کے ایک آڑے (Spoke) کے سرے پر ۲ پونڈ کا ایک وزن باندھ دیا گیا ہے اور پورا افقی کے ساتھ ۶۰ کا زاویہ بناتا ہے۔ پھیدے کے ایک افقی آڑے کے سرے پر کتنا وزن باندھنا چاہئے کہ وہ حرکت کو وقوع پذیر ہونے سے روک سکے۔

۶۔ ایک قطرہ لکڑی کو ایک زنجیر کے ذریعہ جو قبضوں سے بعینہ زین سر پہ بندھی ہوئی ہے اٹھایا جاتا ہے۔ جب پُل افقی محل میں ساکن ہوتا ہے تو زنجیر پُل کے ساتھ ۶۰ کا زاویہ بناتی ہے اور زنجیر کا تناؤ جو پُل کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے تین ٹن کے وزن کے مساوی ہے۔ بتاؤ کہ زنجیر میں اور کتنا زائد تناؤ مطلوب ہوگا جبکہ ایک ٹن کا وزن پُل کے وسطی نقطہ پر رکھ دیا جائے۔

## تین ایک مستوی میں

۵۱۔ سکونیات میں سادہ ترین مسئلہ ہمیشہ وہ ہوتے ہیں جن میں تمام قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں ہوں۔ کسی ایسے مسئلہ میں میرکا سب سے زیادہ سہولت اس میں ہوگی کہ معیاروں کو ایک ایسے خط کے گرد لیا جائے جو اس مستوی پر عمود ہو جس میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی ایسا خط مستوی کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو ہر قوت اس خط کے کاملاً عمود دار ہوگی جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں اور اس لیے معیار قوت اور اس چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کا حاصل ضرب ہوگا جو قوت کے خط کے عمل کا نقطہ ن سے ہے۔

جب معیار ایک ایسے محور کے گرد لیے جاتے ہیں جو قوتوں کے مستوی کو علی القوا تم نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو اکثر یہ کہا جاتا ہے کہ معیار نقطہ ن کے گرد لئے آگئے ہیں اور اس صورت میں اس عمود کو جو نقطہ ن سے قوت کے خط عمل پر کھینچا جاتا ہے قوت کے معیار کا بازو کہتے ہیں۔ (۶۷)

۵۲۔ مسئلہ۔ جب تین قوتیں ایک جسم پر یا اجسام کے ایک نظام پر

ایک ستوی میں عمل کر کے اس کو توازن میں رکھیں تو یہ تین قوتیں ایک نقطہ پر ملنی چاہئیں۔

فرض کرو کہ قوتیں 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں اور فرض کرو کہ 'ف' اور 'ق' نقطہ (ا) پر متقاطع ہوتی ہیں۔ اب (ا) کے گرد قوتوں 'ف'، 'ق'، اور 'س' کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ ہم جانتے ہیں کہ 'ف' اور 'ق' کے معیار معدوم ہوتے ہیں۔ اس لیے (ا) کے گرد 'س' کا معیار معدوم ہونا چاہئے۔ یعنی 'س' کو نقطہ (ا) میں سے گزرنا چاہئے یا الفاظ دیگر یہ تین قوتیں ایک واحد نقطہ پر متقاطع ہونی چاہئیں۔

اس اصول کا اطلاق سکونیاتی سکوں کو حل کرنے کے لیے اکثر خود کافی ہوتا ہے کیونکہ قوائے عاملہ تین قوتوں میں تحویل کی جاسکتی ہیں۔

## توضیحی مثالیں

۱۔ Seesaw - وزن 'و'، 'و' کے دو آدمی ایک تختہ پر کھڑے ہیں جو ایک کھڑکڑے سہارے چس کے گرد وہ آزادانہ گھوم سکتا ہے وکا ہوا ہے۔ تختہ کا وزن نظر انداز کر کے معلوم کرو کہ آدمیوں کو کہاں کھڑے ہونا چاہئے کہ تختہ متوازن ہو۔ قوتوں کو ایک مستوی سطح میں جو تختہ کے مرکز سے خط میں سے انتصافاً گزرتی ہے عمل کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے۔ یہ قوتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) وزن 'و' جو ایک شخص کا ہے جو ایک سرے پر ہے۔



(ب) وزن 'و' جو دوسرے سرے پر ہے۔

(ج) تختہ اور اس کے سہارے کے درمیان تعامل۔

شکل (۳۴)

فرض کرو کہ سہارے سے آدمیوں کے فاصلے 'د'، 'ب' ہیں۔ اب سہارے کے نقطہ کے گرد معیار لینے سے

۱۔ وہ ب = ۰

اس لئے ان دو آدمیوں کو سہارا سے ایسے فاصلوں پر کھڑے ہونا چاہئے جو ان کے اوزان کے بالکس متناسب ہوں۔  
یاد رہے کہ اس مسئلہ میں نظام پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں جو ایک نقطہ پر ملتی ہیں، یہ نقطہ لاتنا ہی پر ہے۔

(۸۸) ۳۔ سروتہ۔ یہ معلوم کیا گیا کہ چھالیہ کی ایک ڈلی پر ۱۰۰ پونڈ کا وزن رکھتے ہیں وہ عین چھوٹی ہے۔ معلوم کرو کہ ایک سروتہ کے بازوؤں کے سروں پر کتنی قوت لگائی جائے کہ چھالیہ بھوٹ جائے جبکہ وہ قبضہ سے  $\frac{1}{4}$  انچ کے فاصلہ پر رکھی ہوئی ہو اور بازو ۶ انچ لمبے ہوں۔

فرض کرو کہ ہر بازو کے انتہائی سروے پر قوت ق لگانے سے وہ چھالیہ کو پھوڑنے کے لیے عین کافی ہوتی ہے۔ اس لیے جب بازو کے سروے پر قوت ق لگائی جاتی ہے تو چھالیہ اور بازو کے درمیان دباؤ ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہونا چاہئے۔ اس طرح سروتہ کے کسی ایک بازو پر بیرونی جانب سے عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:

(۱) قوت ق جو بازو کے سروے پر لگائی گئی ہے

(ب) ۱۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ جو چھالیہ بازو پر قبضہ سے  $\frac{1}{4}$  انچ فاصلہ پر لگائی ہے

(ج) تعادل قبضہ پر۔

سروتہ کا وزن یہاں نظر انداز

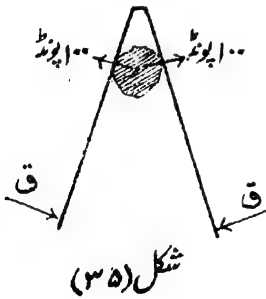
کر دیا گیا ہے۔

قبضہ کے گرد معیار لینے سے

$$۶ \times ق = \frac{1}{4} \times ۱۰۰ \text{ پونڈ وزن}$$

$$ق = \frac{1}{4} \times ۸ \text{ پونڈ وزن}$$

نوٹ۔ جب کوئی نامعلوم قوت مفروضات میں داخل ہو تو جواب میں



مطلوب ہو مثلاً قوت (ج) تو ہم ہمیشہ ایسی مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں جن میں یہ قوت واقع نہ ہو اور یہ اس طرح کہ ہم اس نقطہ کے گرد معیار لیتے ہیں جو اس قوت کے خط عمل میں واقع ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ایسی دو قوتیں واقع ہوں تو ہم ان کے خطوط عمل کے نقطہ تقاطع کے گرد معیار لیکر وہ مساوات حاصل کرتے ہیں جن میں یہ قوتیں شامل نہیں ہوتیں۔

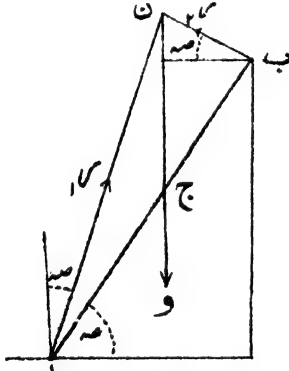
۳۔ ایک سیڑھی ایک کھردرے افقی مستوی پر ایک کھردرے انتصابی دیوار کے سہارے جھکی کھڑی ہے اور اس کے بیروں کے نقاط تماس بھی اتنے ہی کھردرے ہیں یہ معلوم کرو کہ ایک شخص سیڑھی پر کتنی دیر بغیر پھسلے چڑھ سکتا ہے یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ سیڑھی کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اس نظام چپس میں شخص اور سیڑھی شامل ہیں عمل کرنے والی قوتیں تین ہیں:

(ا) تعامل افقی مستوی کے ساتھ

(ب) تعامل انتصابی دیوار کے ساتھ

(ج) شخص کا وزن۔



شکل (۳۶)

یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں۔ اس لیے دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کی روش سے ان کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

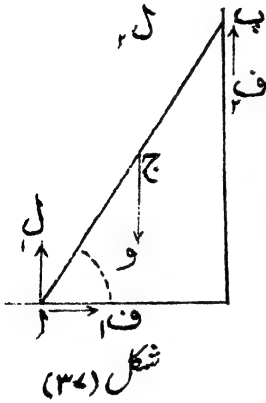
شکل میں فرض کرو کہ سیڑھی

ا ب ہے، شخص کا محل ج، اور

ن وہ نقطہ جس پر تین قوتیں ملتی ہیں۔

اس لیے ن ج انتصابی ہے، اور ا ب بر کے تعاملات کے خطوط عمل ا ن ج ب ن ہیں۔ جب پچھلے عین شروع ہونے کو ہو تو ان میں سے ہر تعامل کو عماد کے ساتھ رگڑ کے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا چاہئے۔ فرض کرو کہ رگڑ کا یہ زاویہ ص ہے اور فرض کرو کہ سیڑھی کا میلان افقی کے ساتھ ع ہے۔ اب مثلث ا ج ن کے علم ہندسہ کی روش سے

$$\frac{ا ن}{ج ب ص} = \frac{ج ا}{ج ب م}$$



اور چونکہ ان ب ایک قائمہ زاویہ ہے ایسے  
 ان = اب جم  $(\frac{\pi}{4} - \text{ص} - \text{ع})$   
 اس طرح ج = ان جب صہ قطعہ

= اب جب صہ جب (صہ + عہ) قطعہ  
 ایسے پھسل شروع ہوگی چون ہی شخص اتنی بلندی پر چڑھ جائیگا  
 جو پوری بلندی کا جب صہ جب (صہ + عہ) قطعہ گنا ہے۔  
 دو شرط کہ شخص سیر بھی کے سرے پر بغیر پھسلے پہنچ جائے  
 یہ ہے کہ جب صہ جب (صہ + عہ) قطعہ اکائی سے بڑا ہو یعنی

جب صہ جب (صہ + عہ) < جم  $[(\text{د} + \text{صہ} + \text{عہ})]$

کے جب صہ جب (صہ + عہ) + جم صہ جم (صہ + عہ)  
 اس لئے شرط کے پورا ہونے کے لیے جم صہ جم (صہ + عہ) کو منفی ہونا چاہئے  
 یعنی صہ + عہ - ۹ سے بڑا ہونا چاہئے۔ اس طرح سیٹھری اور امتصالی کا درمیانی زاویہ  
 رگڑ کے زاوے سے چھوٹا ہونا چاہئے۔ یہ شکل سے بھی ظاہر ہے کیونکہ جب شخص ب  
 پر پہنچ جاتا ہے تو دو قوتیں یعنی ب پر کا تعامل اور شخص کا وزن دونوں ب میں سے  
 گزرتے ہیں اور اس لیے تیسری قوت بھی ب میں سے گزرنی چاہئے یعنی (پر کے  
 تعامل کا خط عمل ب ہونا چاہئے اور اگر سیٹھری عین یہاں پھسلتی ہے تو اب  
 اور امتصالی کے درمیان زاویہ صہ ہونا چاہئے۔

۴۔ اگر مثال ماسبق میں سیٹھری کے پھسلے بغیر شخص کسی نقطہ ج تک  
 چڑھ جائے تو ا اور ب پر کے تعاملات کیا ہوں گے؟

یہاں یہ معلوم نہیں ہے کہ تعاملات عمادوں کے ساتھ کیا زاوے بناتے  
 ہیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ زاوے رگڑ کے زاوے سے چھوٹے ہیں۔

فرض کر دو کہ ہم (پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل، ف میں اور ب  
 پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل، ف میں تحلیل کرتے ہیں، یہ اجزائے ترکیبی  
 افقی اور امتصالی ہیں حسب شکل۔ اب اس نظام پر جو شخص اور سیٹھری سے ترکیب یافتہ  
 ہے عمل کرنے والی قوتیں پانچ ہیں:

ل، ف، ل، ف، اور و  
انتصاباً تحلیل کرنے سے

و- ل، - ف، = . . . . . (۱)  
انقلاباً تحلیل کرنے سے

ف- ل، = . . . . . (ب)  
۱ کے گرد معیار لینے سے

و = (ج. جم. ع- ف، x اب. جم. ع- ل، x اب. جب. ع = . . . . . (ج)  
چار مقداریں معلوم کرنی ہیں اور اب تک صرف تین مساواتیں حاصل ہوئی ہیں (۴)

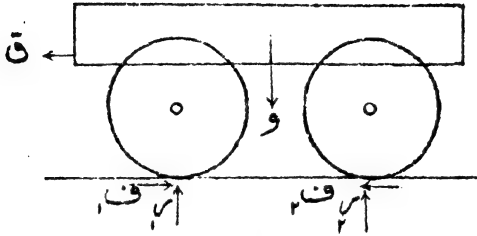
بلاشبہ قوتوں کو دوسری سمتوں میں تحلیل کر کے اور دوسرے نقطوں کے گرد معیار لیکر ہم دوسری مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ معلوم ہو گا کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتیں نئی نہیں ہیں بلکہ صرف وہی مساواتیں ہیں جن کا درست ہونا ان مساواتوں میں ضمیر ہے جو اوپر حاصل کی جا چکی ہیں۔ اس طرح قوتوں کو تحلیل کرنے اور معیاروں کو لینے سے ہم تین سے زیادہ غیر تابع مساواتیں حاصل نہیں کر سکتے اور یہ مساواتیں چارنا معلوم مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی نہیں ہیں۔

ہم نے یہاں ایک ایسا مسئلہ پیش کیا ہے جو ان طریقوں سے جو اس باب میں سمجھا گئے ہیں حل نہیں ہو سکتا اور اس کے حل کے لیے قوتوں کے ان نظام پر غور کرنے کی ضرورت ہے جو اجسام کے مختلف ذرات کے درمیان پیدا ہوتے ہیں۔ طالب علم کو اس حقیقت کا جان لینا ضروری ہے کہ ایسے مسئلے موجود ہوتے ہیں اگرچہ وہ ان کو فی الحال حل کر سکنے کے قابل نہ ہو۔

۵۔ قوت جو گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے۔ اس مسئلہ کو

سادہ سے سادہ بنانے کے لیے فرض کرو کہ گاڑی چار مساوی پہیوں پر بنائی گئی ہے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۱ ہے اور ہر ایک نصف قطرب کے محور کے گرد گردش کرتا ہے اور فرض کرو کہ پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر ہر پہیہ کے لیے

دہی ہے۔ فرض کرو کہ قوت  $Q$  کو اتفاقاً لگانے سے وہ گاڑی کو حرکت میں لانے کے لیے عین کافی ہوتی ہے۔



شکل (۳۸)

اول پوری گاڑی کے توازن پر غور کرو۔ کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتوں کو شنا کرنے کا سب سے زیادہ سہولت بخش طریقہ یہ ہے کہ پہلے ہم اپنے تصور میں ایک ایسا قالب لیں جو نظام پر عین ٹھیک بیٹھتا ہو اور پھر اس کی پوری سطح پر چکر وہ قوتیں دیکھتے جائیں جو اس کے مختلف نقطوں پر عمل کرتی ہیں۔ یہ قوتیں اور پورے نظام کا وزن ملکر قوتوں کا کُل نظام حاصل ہوگا۔ اس طریقہ سے گاڑی پر عمل کرنے والی قوتوں کو معلوم کیا جائے تو وہ حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں:

- (۱) اس کا وزن  $W$
- (ب) افقی قوت عامل  $Q$

(ج) پہیوں اور زمین کے درمیان تعاملات۔ فرض کرو کہ ہر تعامل کو ایک انتصابی جزو ترکیبی  $W$  اور ایک افقی جزو ترکیبی  $F$  میں تحلیل کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ پہلے پہیہ اور زمین کے درمیان جو تعامل ہے اس کے اجزائے ترکیبی کو  $F_1$   $F_2$  سے تعبیر کیا گیا ہے، دوسرے پہیہ کے لیے متناظر مقداروں کو  $F_3$   $F_4$  سے اور علیٰ ہذا القیاس۔

(پہیہ اور زمین کے درمیان عمل کرنے والی رگڑ کی قوت کے متعلق ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ حرکت وقوع پذیر ہونے کو ہے لیکن یہ حرکت زمین اور پہیہ کے درمیان



جیٹلسن کی قسم کی نہیں ہے اور اس لیے کسی پہیہ کے لیے ف کو جو نسبت م کے ساتھ ہے وہ پہیہ اور زمین کے درمیان رگڑ کی قدر نہیں ہے۔  
وہ قوتیں جو اوپر شمار کی گئی ہیں گاڑی کو توازن میں رکھتی ہیں۔ اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزاء نے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے اور اسی طرح کسی خط کے گرد ان کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ اتفاقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ق = ف_1 + ف_2 + ف_3 + ف_4 + \dots (۱)$$

کسی خط کے گرد معیار لینے سے کچھ بھی فائدہ نہ ہو گا، چونکہ ق کا خط عمل معلوم نہیں ہے اس لیے ہم اس کا معیار معلوم نہیں کر سکتے۔

ثانیاً ایک واحد پہیہ کے توازن پر غور کرو۔ پہیہ زمین کو مس کرتا ہے اور محور کو بھی کسی نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔ (ہم محور کو ایک ایسے نصف قطر کا دائرہ خیال کر سکتے ہیں جو پہیہ کے ناف کے اندرونی دائرہ کے نصف قطر سے بہت ہی خفیف فرق رکھتا ہے)۔ چنانچہ پہیہ پرنل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) اس کا تعامل زمین کے ساتھ

(۲) یا م کے تعامل محور کے ساتھ

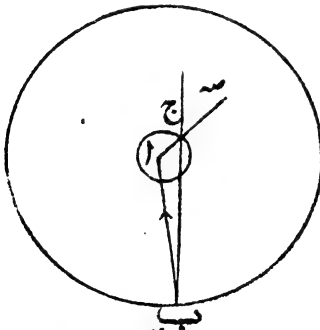
(۳) اس کا تعامل ج جس کو ہم نظر انداز کریں گے کیونکہ وہ گاڑی کے وزن کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہے۔

اس تیسری قوت کو نظر انداز کرتے

دو قوتیں رہ جاتی ہیں جو مساوی اور مخالف

ہونی چاہئیں۔ چنانچہ ہر ایک کا خط عمل

وہ خط ہے جو ج اور ج کو ملاتا ہے جو علی الترتیب زمین اور محور کے ساتھ پہیہ کے نقاط تماس ہیں۔ چونکہ ج پر جیٹلسن عین وقوع پذیر ہونے کو ہے اس لیے ج پر کا تعامل ج پر کے عماد (ج کے ساتھ زاویہ صہ بنائیں گے یعنی رگڑ کے زاویہ کے مساوی



شکل (۳۹)

اس طرح زاویہ ب ج ا' مدہ کے مساوی ہے۔

مثلاً ا ج ب میں ا ج = ب' ا ب = ا' اور زاویہ ا ج ب = مدہ - اس لیے

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ا ج}$$

لیکن چونکہ ب ج پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی ا' ب کے متوازی اور اس کے عمود وار کرا اور ف ا ہیں اس لیے

$$مس ا ب ج = \frac{ف}{کرا}$$

$$اس طرح \frac{ف ا}{کرا} = مس ا ب ج$$

$$\frac{ب ج ا ب ج}{ا - ب ج ا ب ج}$$

$$= \frac{ب ج ب مدہ}{ا - ب ج ب مدہ}$$

اب چونکہ مدہ ا' اور ب ہر پہیہ کے لیے وہی فرض کئے گئے ہیں اس لیے

$$\frac{ف ا}{کرا} = \frac{ف ا}{کرا} = \frac{ف ا}{کرا} = \frac{ف ا}{کرا} = \frac{ف ا}{کرا}$$

$$= \frac{ف ا + ف ا + ف ا + ف ا}{کرا + کرا + کرا + کرا}$$

$$= \frac{ق}{و} \text{ مساواتوں (ا) اور (ب) کی رو سے}$$

$$اس لیے ق = \frac{و ب ج ب مدہ}{ا - ب ج ب مدہ} \dots \dots (ج)$$

اس مساوات سے مطلوبہ افقی قوت حاصل ہوگی۔

ب کی قیمت جو محور کا نصف قطر ہے بالعموم ۱ کے مقابلہ میں جو یہیہ کا نصف قطر ہے چھوٹی ہوگی۔ اس لیے بغیر کسی قابل قدر خطا کے ہم ۱ کے مقابلہ میں ب<sup>۲</sup> جب ۱ صہ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور مساوات (ع) کے نسب نامہ میں صرف ۱ رکھ سکتے ہیں۔ چنانچہ یہ مساوات اب ہو جاتی ہے

$$ق = \frac{وب جب صہ}{1}$$

ب کو بہت چھوٹا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ گاڑی کو بہت ہی آسانی سے چلایا جاسکتا ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر یہیہ اور محور کے درمیان اتنی بڑی رگڑ بھی ہو کہ رگڑ کی قدر کو لامتناہی سمجھا جاسکے تو بھی جب صہ = ۱ اور اس لیے

$$ق = \frac{وب}{1}$$

اور اس لئے گاڑی کھینچنے کے لیے جو قوت درکار ہوگی وہ پھر بھی اس قوت کے مقابلہ میں چھوٹی ہوگی جو اتنے ہی وزن کو کافی یکجہتی سطح پر کھینچنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے۔

اس تحلیل میں ہم نے مان لیا ہے کہ پہلے زمین کو صرف اپنے زور پر نقطوں پر سس کرتے ہیں۔ یہ بڑی حد تک اس صورت میں صحیح ہے جبکہ فولادی پہیے فولادی پٹریوں پر لڑھک رہے ہوں لیکن اس کا اطلاق اس مسئلہ پر نہیں ہوتا جبکہ معمولی بندی نرم سڑک پر حرکت کر رہی ہو کیونکہ پہیے کچھ حد تک سڑک میں ہستے رہتے ہیں۔ فی الحقیقت اگر مندرجہ بالا تحلیل میں وہ سب واقعات شامل کر لئے جائیں جو ایسی صورت میں پیش آتے ہیں تو یہ ظاہر ہے کہ گاڑی کو کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوگی وہ سڑک کی حالت پر منحصر ہوگی۔

## مثالیں

۱۔ ۲۵۰ پونڈ کا ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو آدمیوں کے

کندہوں پر ہے لٹکا ہوا ہے اور یہ آدمی اسے افقی محل میں لیجا رہے ہیں۔ اگر آدمی ایک دوسرے سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ سے چلیں اور وزن قریب تر آدمی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو معلوم کرو کہ ہر شخص کتنا وزن لیے جا رہا ہے۔

۲۔ ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو ثابت سہاروں پر رکھا ہوا ہے لٹکایا گیا ہے سہاروں کے درمیان فاصلہ ۶ فٹ ہے۔ وزن کو ایک سہارے سے ۶ انچ قریب تر حرکت دینے پر اس سہارے پر کا دباؤ بقدر ۱۰ پونڈ کے بڑھ جاتا ہے۔ وزن کی مقدار کیا ہے؟

۳۔ ایک ترازو کے دو پلٹروں میں سے ہر ایک کا وزن ۸ اونس ہے اور ہر ایک نصاب سے ۶ انچ کے فاصلہ پر ڈنڈی سے لٹکا ہوا ہے۔ ایک بے ایمان ساجرا ایک پلٹے کو نصاب سے نصف انچ قریب تر کرتا ہے اور اس میں کچھ وزن کا اضافہ کر دیتا ہے تاکہ دونوں پلٹے متوازن ہو جائیں۔ یہ اضافہ شدہ وزن معلوم کرو اور بتاؤ کہ اس کی اس بے ایمانی سے اس کو کتنا زیادہ فائدہ ہوگا۔

۴۔ ایک ترازو کی ڈنڈی کے ایک سرے سے ۲۰ اونس کا ایک وزن لٹکایا گیا ہے۔ ڈنڈی کے دوسرے سرے پر نصاب سے مساوی فاصلہ پر ایک ڈری باندھ دی گئی ہے جو افق سے ۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ اس ڈری کو کس قوت سے کھینچنا چاہئے کہ ترازو کی ڈنڈی افقی محل میں رہے۔

۵۔ ۸ فٹ لمبے ڈنڈے کو ایک جسم کے ہٹانے میں استعمال کرنا ہے یہ معلوم ہے کہ اس جسم پر ۵۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت انتصاباً اوپر وار لگانے سے اسکو ہٹایا جاسکتا ہے۔ ڈنڈے کے سرے سے کس قدر قریب نصاب کو رکھنا چاہئے کہ ۱۰۰ پونڈ وزن کا ایک شخص اس کے دوسرے سرے پر کھڑے رہ کر مطلوبہ قوت لگا سکے۔

۶۔ ناقابل قدر وزن کا ایک میز متعدد پایوں پر قائم ہے۔ ایک وزنی ذرہ میز پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ میز الٹ جائیگا اگر ذرہ میں سے گزرنے والا انتصابی میز کے نیچے کے فرش سے اس کثیر الاضلاع کی بیرونی جانب جو فرش پر پایوں کے نقاط تماس کو ملانے سے بنتا ہے ایک نقطہ پر ملے۔

۷۔ ناقابل قدر وزن کا ایک میز تین پایوں پر قائم ہے جو ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ ایک وزنی ذرہ کو میز پر ایسے محل میں رکھا گیا ہے کہ میز اٹنے نہیں پاتا۔ وزن کا تناسب معلوم کرو جو ہر پایہ پر ہے۔

۸۔ ایک کارڈ افقی محل میں تین مساوی نا امتداد پذیر ڈوریوں کے ذریعہ جو کارڈ کے تین نقطوں (‘ب‘، ‘ج‘ سے بندھی ہیں اور نیز کارڈ کے اوپر ایک نقطہ ‘ن‘ سے بندھی ہیں لٹکا ہوا ہے اور (‘ب‘، ‘ج‘ ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ کارڈ کے کسی نقطہ ‘ق‘ پر جو مثلث کے اندر ہے ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۹۔ ایک کارڈ چار مساوی نا امتداد پذیر ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے جو کارڈ کے اندر ایک مربع کے چار نقطوں (‘ب‘، ‘ج‘، ‘د‘ میں سے گذرتی ہیں اور چار نقطوں (‘ب‘، ‘ج‘، ‘د‘ سے بندھی ہیں جو نقطوں (‘ب‘، ‘ج‘، ‘د‘ کے انتصافاً اوپر مساوی بلندیوں پر ہیں۔ کارڈ پر مربع (‘ب‘، ‘ج‘، ‘د‘ کے اندر کسی نقطہ ‘ن‘ پر ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ، ڈوریوں کے اندرونی زوروں (Stresses) پر غور کے بغیر متعین نہیں ہو سکتے۔

۱۰۔ اگر پچھلی مثال میں ڈوریوں کے اندرونی زور ڈوریوں کو بہت خفیف طور پر وسیع کریں تاکہ کلیہ کپ کی پابندی ہو تو ثابت کرو کہ تناؤ معلوم کئے جاسکتے ہیں اور انہیں معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مستطیلی تختہ، نصف قطر  $r$  کے ایک کھردرے دائری کُندے پر جو افقاً ثابت ہے لٹکاتا ہے۔ دو شخص تختہ کے وسطی نقطہ سے فاصلوں ‘ب‘، ‘ج‘ پر کھڑے ہیں، ان کے وزن ایسے ہیں کہ تختہ عین افقاً متوازن ہے اور اس کا وسطی نقطہ کُندے پر ٹیکا ہوا ہے۔ پہلا شخص کُندے کے مرکز کی جانب فاصلہ  $d$  تک حرکت کرتا ہے کس زاوے میں سے تختہ گردش کرے گا؟ شخص کُندے آگے بڑھ سکتا ہے قبل اس کے کہ تختہ کُندے سے بالکل ٹھیسل پڑے۔

۱۲۔ نصف قطر  $r$  کے دو پائے، نصف قطر  $b$  کے ایک محور سے مربوط کئے گئے ہیں اور وہ افقی پٹریوں پر جا رہے ہیں۔ محور کے گرد ایک ڈوری لپیٹی گئی ہے

اور اس کا سر محور سے نکل کر افق سے  $۴۵^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر اس دوری کو ایک شخص کھینچے تو ثابت کرو کہ پہلے شخص کی جانب حرکت کریں گے یا اس سے پرے ہینکے ہو جب اس کے کہ جسم ط' سے بڑا یا چھوٹا ہو۔ کیا ہو گا جبکہ حجم طہ  $\frac{۳}{۲} =$  ؟

۱۳۔ اگر ایک گاڑی کے پیسوں اور محوروں کا وزن و ہو اور اگر ایسے وکے مقابلہ میں جو گاڑی کا کل وزن ہے نظر انداز نہ کیا جاسکے تو ثابت کرو کہ مثال ۵ صفحہ ۱۰ کی مساوات (ج) حسب ذیل ہونی چاہئے

$$Q = \frac{(W + B \text{ جب } ۱ \text{ صہ})}{B \text{ جب } ۲ \text{ صہ}}$$

۱۴۔ ایک انجن جس کا وزن ۱۳۴ پونڈ ہے ایک بوگی پر جس کے پیسے اور محور ۴ ٹن وزن کے ہیں اور چلاؤ پیسوں کے دو جوڑوں پر جن کے پیسے اور محور ۱۰ ٹن وزن کے ہیں سارن ہے۔ بوگی کے محوروں پر ۴۰ ٹن کا وزن اور چلاؤ پیسوں کے محوروں پر ۸۰ ٹن کا وزن بار کیا گیا ہے۔ پیسوں کے نصف قطر علی الترتیب ۴، ۱ اور ۱/۲ ہیں۔ ہر محور جہاں وہ محور کے ضوق میں سے گزرتا ہے ۱/۲ نصف قطر کا ہے اور رگڑ کی قدر ۱/۵ ہے۔ وہ افقی قوت معلوم کرو جو انجن کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے۔

۱۵۔ مثال ۱۴ میں پیسوں پر چکنائی لگائی گئی ہے تاکہ ان میں اور پیسوں کے درمیان رگڑ کی قدر ۱/۱۰ سے بھی کم ہو ثابت کرو کہ انجن کو چکنے پیسوں پر پیسوں کو گھسیٹے بغیر چلایا نہیں جاسکتا اور ان حرکی اعمال کی تشریح کرو جن سے اس صورت میں انجن کو حرکت میں لایا جاسکتا ہے۔

## دوریاں

۵۳۔ دوریاں، ہسیاں اور زنجیریں اکثر اجسام کے ان نظامات کا جزو ہوتی ہیں جو سکون یا قیاسات سے تعلق رکھتے ہیں اور اس لیے دوری (یا رسی یا زنجیر) کے توازن پر غور کرنا ضروری ہے۔ پہلا مسئلہ جس پر ہم غور کریں گے



ایک ایسا زاویہ بنائے گا جو طہ سے خفیف طور پر بڑا ہوگا، فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ + فرط ہے تو فرط وہ چھوٹا زاویہ ہے جو ق اور قی کے عمادوں کے درمیان ہے۔

اس ترقیم کی رو سے تناؤں تان اور تاق کے درمیان زاویہ π - فرط ہے۔ فرض کرو کہ تعادل اور تناؤ تان کے درمیان زاویہ π ہے تو تناؤ تاق اور π کے درمیان زاویہ π - عہ + فرط ہوگا۔ اس لیے

$$\frac{\text{تان}}{\text{تاق}} = \frac{\text{عہ} - \text{فرط}}{\text{عہ} + \text{فرط}} = \frac{\text{عہ}}{\text{عہ} + \text{فرط}}$$

چونکہ جب (π - عہ + فرط) = جب (عہ - فرط) اس لیے

$$\frac{\text{تان}}{\text{عہ}} = \frac{\text{تاق}}{\text{عہ} - \text{فرط}}$$

اور جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلے سے ہر کسر

$$= \frac{\text{تاق} - \text{تان}}{\text{عہ} - \text{فرط}}$$

اب تاق - تان کا اضافہ ہے جبکہ طہ سے طہ + فرط تک تبدیل ہوتا ہے اور یہ تفرقی احصاء کی ترقیم میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرط}}$$

نیز نسب ناما جب عہ - جب (عہ - فرط) جب عہ کا اضافہ ہے جبکہ عہ - فرط سے عہ تک بدلتا ہے اور یہ بھی اسی طریقہ سے لکھا جاسکتا ہے

(۷۶)

$$\frac{\text{فرط}}{\text{عہ}} = \frac{\text{فرط}}{\text{عہ} + \text{فرط}}$$

$$= \frac{\text{فرط}}{\text{عہ} + \text{فرط}} = \frac{\text{فرط}}{\text{عہ} + \text{فرط}}$$

اس لیے ابتدائی کسر



$$\text{اس لیے } \frac{\text{ت ق}}{\text{جب عه}} = \frac{\text{ق طه}}{\text{فرت}} \quad (۱۲)$$

$$\text{یا } \frac{\text{ت ق}}{\text{مس عه}} = \frac{\text{فرت}}{\text{ق طه}} \quad (۱۲)$$

جب انتہا میں ذرہ ف ق کو لا انتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو  
ت ق اور ت ق ناقابل امتیاز ہو جاتے ہیں۔ فرض کرو ان میں سے کسی  
ایک کو ت سے تعبیر کیا گیا ہے اور اس لیے ت صرف ایک نقطہ پر  
تناؤ ہے جس کا عماد، (پ) کے عماد کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ اگر دوسری  
سمت (ف) ق میں عین پھیلنے کو ہو تو نقطہ ق یا ف کسی ایک پر  
کے عماد اور تعامل سر کے درمیان زاویہ صہ بنے گا جو رگر کا زاویہ ہے۔  
اس لیے حاصل ہونا چاہیے

$$\text{عہ} = \frac{\pi}{2} - \text{صہ}$$

اس لیے مس عہ = مم صہ اور مساوات (۱۳) ہو جاتی ہے

$$\text{ت} = \text{مم صہ} \frac{\text{فرت}}{\text{ق طه}} \quad (۱۳)$$

۵۴۔ اگر سطح اور ڈوری کے درمیان تماس کامل چکنا ہو تو صہ = ۰ اور  
اس لیے  $\frac{\text{فرت}}{\text{ق طه}} = ۰$ ۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ت مستقل ہے یعنی

ڈوری کے تمام نقطوں پر تناؤ ایک ہی ہے۔ اس لیے کسی ڈوری کا تناؤ  
نہیں بدلتا جبکہ اسے ایک چکنی سطح پر سے گزرا جاتا ہے، یہ وہی نتیجہ ہے  
جو دفعہ ۳۶ میں حاصل ہو چکا ہے۔

۵۵۔ بالعموم تماس عملاً کامل چکنا نہیں ہوتا، فرض کرو کہ رگر کی قدر  
صہ ہے، اس لیے

صہ = مس صہ اور مساوات (۱۳) لکھی جاسکتی ہے

$$\text{فرت} = \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \text{مہ ت}$$

اور تکمیل کرنے سے  $\frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \text{فر (مہ طہ)}$

فر (لوک ت) = فر (مہ طہ)

لوک ت = مہ طہ + مستقل

یا فرض کرو کہ ۱ پر کا تناؤ ت ہے تو طہ = . رکھنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ یہ مستقل لوک ت کے مساوی ہونا چاہئے، اس لیے

لوک ت - لوک ت = مہ طہ

ت = ت فو طہ

یا اگر ڈوری سطح کو مکر کسی نقطہ ب پر چھوڑے اور اس نقطہ پر کا عماد ۱ پر کے عماد کے ساتھ زاویہ سہ بنائے تو ب پر کے تناؤ کے لئے حاصل ہوتا ہے

ت = ت فو سہ

اس لیے تناؤ ۱ سے ب تک سطح پر گزرنے میں فو سہ سے ضرب کھا جاتا ہے۔ اگر ڈوری (یا رسی) ایک ستون یا مستول کے گرد اگر لپیٹی جائے تو ہر مکمل پھیر کے لیے تناؤ نسبت  $\pi$  میں بڑھ جاتا ہے۔ بلوط پرسن کی رسی کے لیے رگڑ کی قدر مورین (Morin) کی تحقیق کی بموجب

مہ = ۰.۵۳ ہے۔ اس لیے  $\pi$  مہ =  $\pi \times 0.53 = 1.66$  اور  $\pi$  مہ =  $\pi \times 0.53 = 1.66$ ۔ اس لیے سن کی رسی کا تناؤ جو بلوط کے ستون کے گرد لپیٹی گئی ہو۔ ہر مکمل پھیر کے لیے تقریباً اٹھائیس گنا بڑھ جاتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک وزن کو ایک رسی سے لٹکایا گیا ہے جو ایک افقی شہتیر کے گرد لپیٹی ہوئی ہے اور جو شہتیر سے افقاً نکلتی ہے۔ اس کا سراسر ایک فردور کے قابو میں ہے

اگر برسی شہتیر کے گرد  $\frac{1}{4}$  اکمل پھیروں میں لیٹی گئی ہو تو مزدور کو کتنی قوت لگانی چاہئے کہ  
(۱) وزن پھیلنے نہ پائے

(ب) وزن اٹھے (مہ =  $\frac{1}{4}$  فرض کرو)۔

۲۔  $\frac{1}{4}$  پونڈ کا ایک وزن ایک گھردرے مین پر قائم ہے۔ وزن کے (۷۸) قاعدہ سے ایک رسی باندھ دی گئی ہے جو مین کے کنارے پر سے لٹکتی ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک دوسرا وزن باندھا گیا ہے جو آزادانہ لٹکتا ہے۔ اگر مین اور وزن کے درمیان اور مین اور دوسری کے درمیان رگڑ کی قدر علی الترتیب  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  ہو تو معلوم کرو کہ لٹکتا وزن کتنا بھاری ہونا چاہئے کہ دوسرا وزن مین حرکت کر سکے۔

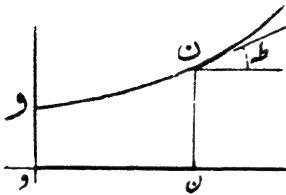
۳۔ ۲۵۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک جہاز کے پیٹے سے اٹھانا ہے۔ ایک رسی جو وزن سے بندھی ہے ایک بھاپ ڈنڈا چرخ کے گرد  $\frac{1}{4}$  پھیروں میں لیٹی ہوتی ہے اور اس کا دوسرا سر ایک طاح بکڑے ہوئے ہے۔ اس کو رسی کا سر کتنی قوت سے کھینچنا چاہئے کہ وزن اٹھ سکے جبکہ ڈنڈا چرخ میں ہو (مہ =  $\frac{1}{8}$ )۔  
۴۔ مثال مابقی میں کسی برکتی قوت لگانی چاہئے اگر ڈنڈا چرخ ساکن ہو۔

۵۔ یہ معلوم ہو کہ دو آدمی ایک وزن کو جو ایک رسی سے بندھا ہے سہار سکتے ہیں جبکہ رسی ایک تختوں کے گرد تین پھیروں میں لیٹی ہوئی ہو۔ اور صرف ایک آدمی سہارا سکتا ہے جبکہ رسی صرف ساڑھے تین پھیروں میں لیٹی ہوئی ہو اگر ہر آدمی ۲۲۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچ سکتا ہے تو سہارے ہوئے وزن کی مقدار معلوم کرو۔

۶۔ رسا کھینچنے کے ایک مقابلہ میں (Tug of war) یہ دیکھا گیا کہ رسی عین ناکرک موقع پر ایک شخصوں سے رگڑ لگاتی ہے اور اسلئے رسی کے دوسرے ایک دوسرے سے آکا زاویہ بناتے ہیں۔ اگر رسی اور شخصوں کے درمیان رگڑ کی قدر  $\frac{1}{4}$  ہو تو ثابت کرو کہ اس واقعہ سے جتنے والے گرد وہ پر اپنی کل کھینچ کا ۲۹۔۵ گنا زائد بار پڑتا ہے۔

## جھولائیل

۵۶۔ جھولائیل سے ایک دلچسپ سوال ہمارے سامنے پیش ہوتا ہے۔ اس میں پیل (جسے افقی فرض کیا گیا ہے) کے وزن کو ایک سوٹا تا انتصالی زنجیروں کے ذریعہ جو پیل کو تار سے مربوط کرتی ہیں سہاڑتا ہے۔



شکل (۴۱)

فرض کرو کہ زنجیروں اور تار کے اوزان نظر انداز کئے گئے ہیں اور پیل کا وزن اس کے طول پر یکساں طور پر منقسم ہے۔

فرض کرو کہ تار کا زیر ترین نقطہ وہ ہے اور کوئی اور نقطہ 'ن' ہے۔ فرض کرو کہ 'و' 'ن' کے انتصالی نیچے پیل کے نقطے 'و' 'ن' ہیں۔ فرض کرو کہ 'ن' = لا۔ فرض کرو کہ 'ن' پر کاتناؤت ہے اور و پر کا

ہ۔ فرض کرو کہ 'ن' پر تار کی سمت 'افق' کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔ تار کے ٹکڑے 'و' 'ن' پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(۴۹)

(ا) و پر کاتناؤت ہ جو افقاً عمل کرتا ہے  
(ب) ن پر کاتناؤت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے

(ج) انتصالی زنجیروں کے تناؤ جو سب کے سب انتصالیاً عمل کرتے ہیں۔  
قوتوں کو افقاً تحلیل کرنے سے

ہ۔ ت جم طہ = ۰ ..... (۱۵)  
انتصالیاً تحلیل کرنے سے

ت جب طہ = س = ۰  
جہاں س ان تمام زنجیروں کے تناؤں کا مجموعہ ہے جو و اور ن کے درمیان

تار سے ٹک رہی ہیں۔ یہ تناؤ پل کے حصہ و ن کو سہارتے ہیں اور اگر پل کا وزن فی اکائی طول و ہو تو و ن کا وزن و لا ہوگا۔ اس لیے  $\text{مس} = \text{ولا}$  اور اس لیے

ت جب طہ = ولا، ..... (۱۶)  
اس مساوات اور مساوات (۱۵)

ت جھ طہ = ھ، ..... (۱۷)  
سے مطلوبہ معلومات حاصل ہوں گی۔

وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جو تار کی ہونی چاہئے تاکہ پل افعال ٹک سکے ہمیں طہ اور لا کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنا ہوگا۔ چنانچہ مساواتوں (۱۶) اور (۱۷) سے ہم ت کو سا قط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ولا}}{\text{ھ}}$$

اگر پل کے اوپر تار کا ارتفاع ما ہو تو تار کے کسی نقطہ ن کے کارٹیری محدود لا، ما سمجھے جاسکتے ہیں اور ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس ن کے محدود لا، ما رشتہ

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{لا}}$$

کے ذریعہ مربوط ہیں۔ مکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \frac{1}{2} \frac{\text{ولا}}{\text{ھ}} + \text{لا ج}$$

جہاں ج مکمل کا مستقل ہے۔

(۸۰) مساوات بالا تار کی کارٹیری مساوات ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ وہ وتر خاص  $\frac{2}{3}$  کے ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لیے تار کو

سکافی کی شکل میں لٹکنا چاہیے۔ افقی تناؤ بڑا ہو تو سکافی کا وتر خاص بھی بڑا ہوگا اور اس لیے تار کا سختی زیادہ ہوگا۔ کامل طور پر مستقیم تار بلا شبہ ناممکنات سے ہے کہ اس صورت میں لامتناہی تناؤ کی ضرورت ہے۔

۵۷۔ تار کے کسی نقطہ پر تناؤ معلوم کرنے کے لیے ہم مساواتوں (۱۶) اور (۱۷) کا مرعہ لیتے ہیں اور متناظر طریق کو جمع کرتے ہیں۔ اس طرح

$$H^2 = H^2 + W^2$$

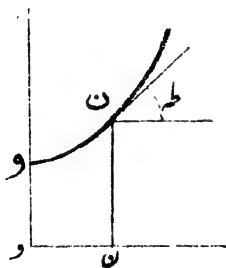
اس مساوات سے اس نقطہ پر تناؤ حاصل ہوگا جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہے۔ اگر پل کا طول ۲ ل ہے تو اس کے کسی ایک سرے پر تناؤ

$$H^2 + W^2$$

ہونا چاہیے۔

## زنجیرہ

۵۸۔ جھولائیل کے مسئلہ میں ہم نے تار کے وزن کو نظر انداز کیا ہے۔ ایک دوسرے مسئلہ پیدا ہوتا ہے جبکہ تار پر سوائے اس کے ذاتی وزن کے کوئی اور بیرونی قوتیں عمل نہ کریں۔ یہ مسئلہ صرف اس دوری کا مسئلہ ہے جس کے دوسرے دو ثابت نقطوں سے بند ہے ہوں اور وہ ان نقطوں کے درمیان آزادانہ لٹک رہی ہو۔



شکل (۴۲)

حسب سابق فرض کرو کہ زیر ترین نقطہ و ہے اور کوئی دوسرا نقطہ ن ہے دوری کے حصہ و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) و پر تناؤ  $H$  جو افقاً عمل کرتا ہے

(ب) ن پر تناؤ  $H$  جو افقاً عمل کرتا ہے

ساتھ زاویہ ط بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے

(ج) ون کا وزن۔ اگر ہم فرض کریں کہ ڈوری کا وزن فی کلاں طولی و ہے اور فاصلہ ون کو س سے تعبیر کریں تو یہ وزن و س ہے جو انتصباً عمل کرتا ہے۔

(۸۱)

افقاً تحلیل کرنے سے

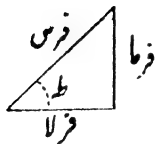
ھ = دت جم طہ = ..... (۱۸)  
انتصباً تحلیل کرنے سے

دت جب طہ = و س = ..... (۱۹)  
منحنی کی وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جس میں ڈوری لٹکتی ہے ہمیں طہ اور س میں ربط معلوم کرنا چاہئے۔ دت کو سا قاط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ھ مس طہ = و س  
یا اگر ہم  $\frac{ھ}{و}$  کی بجائے ایک واحد مستقل م رکھیں تو

س = م مس طہ = ..... (۲۰)  
یہ منحنی کی مساوات کی ایک شکل ہے جس میں س اور طہ محدودوں کے طور پر لئے گئے ہیں۔ اس شکل میں مساوات کو منحنی کی ذاتی مساوات کہتے ہیں۔ لیکن اس مساوات کو کارٹینیسی شکل میں اخذ کرنے کی ضرورت ہے۔  
۵۹۔ اگر شکل (۲۰) میں نقطہ و کو مبداً اور محور و کو افقی اور انتصباً لیا جائے تو حسب ذیل ربط فوراً حاصل ہوتا ہے

فرلا : فرما : فرس = جم طہ : جب طہ : ۱ : ..... (۲۱)



شکل (۲۳)

کیونکہ فرلا اور فرما، ڈوری کے طول کے چھوٹے عنصر فرس کے افقی اور انتصباً فی طس ہیں۔ اولاً ہم رشتوں (۲۱) کا استعمال مساوات (۲۰) کے متغیروں کو س اور طہ سے س اور م میں بدلنے کے لیے کریں گے۔

چنانچہ

$$م = س^۲ م^۲ ط = س^۲ م^۲ ط - س^۲ = س^۲ (فرما^۲ - س^۲)$$

$$اس لیے س = \frac{فرما^۲}{س^۲ م^۲ + م^۲}$$

$$پس فرما = \frac{س فرما^۲}{س^۲ م^۲ + م^۲}$$

اور اس کو مکمل کرنے سے

$$م = س^۲ م^۲ + م^۲ مستقل \dots\dots\dots (۲۲)$$

ہم مکمل کے مستقل کو متعین کر سکتے ہیں اگر اس کا فیصلہ ہو جائے کہ  
مبدأ کو کہاں لینا چاہئے۔ ہم نے اب تک نقطہ و کو مقرر نہیں کیا ہے۔  
چونکہ س سے متخفی کی وہ قوس تعبیر ہوتی ہے جو و سے پیمائش کی گئی ہے  
اس لیے نقطہ و پر س = ۰ اور اس لیے و کا م محدود (مساوات  
(۲۲) میں س = ۰ رکھنے سے) حاصل ہوتا ہے

(۸۲)

$$م = م + م^۲ مستقل$$

فرض کرو کہ ہم و کو م کے مساوی بناتے ہیں اس لیے و پر  
م = م۔ اب تکمل کا نامعلوم مستقل صفر ہونا چاہئے۔ اس لیے مساوات  
(۲۲) ہوگی

$$م^۲ = س^۲ م^۲ + م^۲ \dots\dots\dots (۲۳)$$

آخر میں ہمیں متغیروں کو م اور س سے م اور لا میں متعین کرنا ہے۔  
وہ رشتہ جس کی مدد سے ہم ایسا کر سکتے ہیں رشتوں (۲۱) سے طہ کو ساقط  
کرنے پر حاصل ہوتا ہے اور حسب ذیل ہے

$$(فرما^۲ - س^۲) = (فرما^۲ + س^۲) \dots\dots\dots (۲۴)$$

چونکہ محصلہ مساوات



$$س = \frac{ما - م}{ما - م} = فرس$$

اس مساوات اور مساوات (۲۳) سے فرس کو سا قط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ما (فرما)}{ما - م} = (فرما) + (فرلا)$$

$$اس سے (فرلا) = (فرما) \left[ \frac{ما}{ما - م} - 1 \right]$$

$$\frac{ما}{ما - م} (فرما) =$$

$$اس لیے فرلا = \frac{ما فرما}{ما - م} \quad (۲۵)$$

اس کو تکمیل کرنے سے

$$\frac{ما}{م} = جمر \frac{لا}{م} \quad (۲۶)$$

$$جہاں جمر \frac{لا}{م} = \frac{1}{4} (مو + قو)$$

طالب علم اگر زائدی جیب التمام (جمر) تفاعل سے واقف نہیں ہے تو وہ مساوات (۲۶) کی تصدیق اس طور پر کر سکتا ہے کہ اس کو تفرق کر کے دیکھے کہ آیا مساوات (۲۵) حاصل ہوتی ہے۔

مساوات (۲۶) اس منحنی کی کارٹیزی مساوات ہے جو دوری سے (۸۳) بنتا ہے۔ اس منحنی کو زنجیرہ کہتے ہیں۔

مساوات (۲۳) سے س کی قیمت شکل

$$\begin{aligned} \text{س}^2 &= \text{ما}^2 - \text{م}^2 \\ \text{م}^2 &= (\text{جنر}^2 \frac{\text{لا}}{\text{م}} - 1) \\ \text{م}^2 &= \text{جنر}^2 \frac{\text{لا}}{\text{م}} \end{aligned}$$

میں حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے

$$\begin{aligned} \frac{\text{س}}{\text{م}} &= \text{جنر} \frac{\text{لا}}{\text{م}} \\ \text{جہاں جنر} \frac{\text{لا}}{\text{م}} &= \frac{1}{\frac{1}{\text{م}} - \frac{\text{لا}}{\text{م}^2}} \end{aligned}$$

۶۰۔ قوت نماؤں دو، قوت کو پھیلانے سے جنر  $\frac{\text{لا}}{\text{م}}$  شکل

$$\text{جنر} \frac{\text{لا}}{\text{م}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\text{م}} - \left(\frac{\text{لا}}{\text{م}^2}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{\text{م}} - \left(\frac{\text{لا}}{\text{م}^2}\right)} + \dots$$

میں حاصل ہوتا ہے۔

جب تک لا چھوٹا ہے ہم اس سلسلہ کی تمام رقموں کو سوائے پہلی اور دوسری رقم کے نظر انداز کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ سے حاصل شدہ قیمت کو استعمال کرنے سے مساوات (۲۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

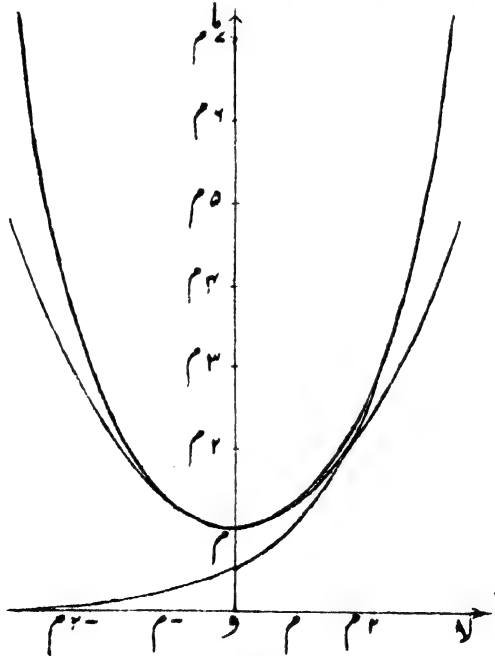
$$\text{ما} = \text{م} + \frac{\text{لا}}{\text{م}^2}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک لا چھوٹا رہتا ہے منحنی قریب قریب ایک مکافی پر منطبق ہوتا ہے جس کا وتر خاص ۲ م یا ۲ھ و ہے۔  
یعنی مکافی وہ ہے جو جھولائیل کے تار سے بنتا ہے جبکہ تار کا افقی تناؤ ۲ھ ہو

اور خود پل کا وزن فی اکائی طول و ہو۔ بلا شک یہ ظاہر ہے کہ جب تا تقریباً  
افقی ہوتا ہے تو اس امر سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ تار کا وزن اس کی قوس کے  
فی اکائی طول و ہے یا فی اکائی طول پر ایک وزن و اس سے نکلیا گیا  
ہے تاکہ وہ افقی طور پر رہے۔

جب 'لا بڑا ہو یعنی ان نقطوں پر جو زیر ترین نقطے سے دور واقع  
ہیں تو بھی ہم زنجیرہ کا ایک سادہ تقرب حاصل کر سکتے ہیں۔ جب 'لا  
بہت بڑا ہو تو  $\frac{1}{m}$  بہت بڑا ہو گا اور  $\frac{1}{m}$  کی قیمت بہت بڑی ہو جائے گی

لیکن  $\frac{1}{m}$  کی قیمت بہت چھوٹی ہو جائے گی۔ اسے جمل  $\frac{1}{m}$  کی قیمت تقریباً  
 $\frac{1}{m}$  ہو جائے گی اور زنجیرہ کی مساوات (۲۶)



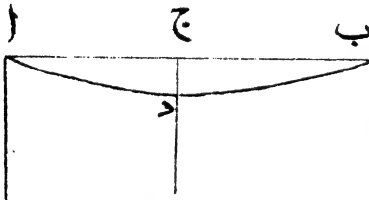
شکل (۲۳)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ہو جائیگی۔ پس لاکھ بڑی قیمتوں کے لئے ذخیرہ قوت نامہ مخفی پر منطبق ہوتا ہے۔  
 شکل (۲۴) میں ذخیرہ کی شکل دکھائی گئی ہے۔ باریک مخفی حسب ذیل ہیں:  
 (۱) قطع مکانی، جس پر ذخیرہ تقریباً منطبق ہوتا ہے جبکہ لاکھ قیمتیں چھوٹی ہوں،  
 (ب) قوت نامہ مخفی، جن پر ذخیرہ تقریباً منطبق ہوتا ہے جبکہ لاکھ قیمتیں بڑی ہوں۔  
 ۶۱۔ خوب تنی ہوئی ڈوری کا جھوک۔ جب کوئی ڈوری یا

(۸۵)

تار اپنے پورے طول پر تقریباً اتنا تنی ہوئی ہو۔ مثلاً تار برقی کا  
 تار۔ تو جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ ڈوری  
 کافی تقرب تک ایک قطع مکانی بناتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ (۱) 'ب'  
 مساوی ارتفاع کے دو ستون ہیں جن کے درمیان ایک تار تننا ہوا ہے۔  
 فرض کرو کہ (ب) کا وسطی نقطہ ج ہے اور فرض کرو کہ د تار کا وہ نقطہ ہے  
 جو ج کے نیچے انتصافاً واقع ہے۔



اب تشاکل سے تار کا نزدیک ترین نقطہ ب  
 د ہو گا اور اس لیے وہ مکانی کا  
 راس ہو گا۔  
 اس لیے مکانی کی مساوات

شکل (۲۵)

$$ج ب = \frac{۲}{و} ج د$$

کیونکہ اس کا وتر خاص بموجب دفعہ (۶۰)  $\frac{۲}{و}$  ہے۔  
 اس لیے اگر ف = ا ب تو جھوک ج د، مساوات

$$ج د = \frac{و}{۲} ج ب$$

$$= \frac{۱}{۸} \frac{د ف}{و} \dots \dots \dots (۲۷)$$

سے حاصل ہوگا۔  
تار کا طول معلوم کرنے کے لیے چھوٹی مقداروں کے اعلیٰ تر رتبے  
لینے ہوں گے اور اس لیے ہمیں زنجیرہ کی مساوات کی طرف رجوع ہونا  
چاہئے۔ چنانچہ

$$s = \frac{1}{4}m \left( \frac{v}{\lambda} - \frac{v}{\lambda'} \right)$$

$$= \frac{1}{4}m \left( \frac{v}{\lambda} - \frac{v}{\lambda'} + \frac{v}{\lambda''} - \frac{v}{\lambda'''} + \dots \right)$$

مطلوبہ مقدار  $s$ ۔  $\lambda$  ہے یعنی  $d$ ۔ ج۔ ب (شکل ۴۵)۔  
جب تار خوب متناہوا ہو تو  $m$  بہت بڑا ہوتا ہے اس لیے ہم  $s$  کی  
وہ رقیں نظر انداز کر سکتے ہیں جو اوپر لکھی ہوئی رقموں کے آگے ہیں۔ پس

$$s - \lambda = \frac{1}{4}m \frac{\lambda}{\lambda'} , \text{ تقریباً}$$

$$= \frac{1}{4}m \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$\lambda = \frac{1}{4}m$  رکھ کر ہم معلوم کرتے ہیں کہ طول  $f$  کے فصل میں

کُل اضافہ بوجہ جھوک،  $s - f = \frac{1}{4}m \frac{\lambda}{\lambda'}$  ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک جھولپُل کا کُل بوجھ ۳۲۰ ٹن ہے، فصل ۶۴ فٹ، اور ارتفاع  
۵۰ فٹ ہے۔ سہارے کے نقطوں پر متناہو معلوم کرو اور نیز زیر ترین نقطہ پر کتنا  
معلوم کرو۔

۲۔ ایک آزادانہ لٹکے ہوئے تار کا وزن ۳۲۰ ٹن ہے۔ سہارے  
کے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ ۶۴ فٹ ہے اور یہ نقطے ایک ہی افقی خط میں ہیں

اور ان کا ارتفاع تار کے زیر ترین نقطے کے اوپر ۵ فٹ ہے۔ سہارے کے نقطوں کے تناؤ اور نیز زیر ترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک تار برقی سلسلہ کا تار اپنے طول کے ایک میل سے زیادہ کا وزن بغیر ٹوٹے برداشت نہیں کر سکتا۔ اگر تار ۸۸ گز کے مساوی وقفوں سے ستونوں کے تناہوا ہو تو کم سے کم قابل اجازت جھوک کیا ہے؟

۴۔ مثال ماسبق میں ایک میل تار برقی سلسلہ کے لیے کتنے تار کی ضرورت ہوگی؟

۵۔ ایک تار برقی سلسلہ ایک خاص قسم کے تار سے جو یکساں فصل کے ستونوں کے تنایا گیا ہے قائم کرنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ستونوں کی تعداد بہت زیادہ ہو تو تار اور ستونوں کی قیمت کا لحاظ کرتے ہوئے سلسلہ سب سے زیادہ کفایت کے ساتھ تیار کیا جاسکتا ہے اگر ستونوں کی قیمت تار کے اس زائد طول کی قیمت سے ڈگنی ہو جو جھوک کی وجہ سے مطلوب ہے۔

## عام مثالیں

۱۔ پتھر کا ایک گند جس کا وزن  $\frac{1}{4}$  ٹن ہے ایک ایسی رسی کے ذریعہ اٹھایا جاتا ہے جو ایک چرخہ پر سے جو پتھر کے اوپر انتصاباً واقع ہے گذرتی ہے اور ایک ڈنڈا چرخہ پر جس کا قطر ایک فٹ ہے لیٹی ہوئی ہے۔ ڈنڈا چرخہ پر دو آدمی کام کرتے ہیں جو ۳ فٹ طول کے گردانے لگھاتے ہیں۔ ہر آدمی کو گردانوں کے عمود وار کتنی قوت لگانا چاہیئے۔

۲۔ ایک شخص ایک ترازو کے پلڑے میں بیٹھ کر ۶۰ پونڈ کی قوت سے ڈنڈی کو انتصابی سمت میں اُس نقطہ پر دباتا ہے جو نصاب اور ڈنڈی کے اُس سرے کے وسط میں ہے جس سے اُس کا پلڑا لٹکا ہوا ہے۔ اگر ڈنڈی کا طول ۵ فٹ ہو تو دو زائد وزن معلوم کرو جو دوسرے پلڑے میں توازن کے لیے رکھنا پڑیگا۔

۳۔ ایک نادرست ترازو کے پلڑے نصاب سے غیر مساوی فاصلوں اور ب پر لٹکتے ہیں لیکن خالی ہونے پر متوازن رہتے ہیں۔ ایک وزن کو جب دونوں پلڑوں میں توازن جاتا ہے تو اس کے اوزان علی الترتیب 'ف' 'ق' حاصل ہوتے ہیں۔

اس کا اصلی وزن معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$\frac{ب}{ق} = \frac{ب}{ق}$$

۴۔ ایک غیر وزنی ڈوری ۴۴ لمبی دو نقطوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ایک دوسرے سے ۱۶ کے فاصلہ پر ہیں باندھ دی گئی ہے۔ ڈوری کے سروں سے ۹ اور ۷ انچ کے فاصلوں پر دو نقطوں سے اوزان باندھے گئے ہیں جو اس طریقہ سے لٹکتے ہیں کہ ان کے درمیان ڈوری کا حصہ افقی ہے۔ اوزان کی نسبت معلوم کرو۔

۵۔ ایک ہلکے تار کے وسطی نقطہ سے ایک وزن لٹکایا گیا ہے اور خود تار کو ایک ڈوری سے ہمارا گیا ہے جو اس کے دوسروں پر بندھی ہے اور ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ تار صرف افقی یا انتصابی محل میں ساکن رہ سکتا ہے۔

۶۔ تین چکنی کھونٹیاں 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک دیوار میں گڑھی ہیں اور وہ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راس ہیں۔ 'ا' بلند ترین ہے اور ضلع 'ج' افقی ہے۔ ایک ہلکی ڈوری ان کھونٹیوں پر سے صرف ایک مرتبہ گزرتی ہے اور اس کے سرے ایک وزن و سے بندھے ہیں جو 'ب' کے نیچے توازن میں لٹکتا ہے۔ ہر ایک کھونٹی پر دباؤ معلوم کرو۔

۷۔ وزن 'ف' اور 'ق' کے دو پھلے ایک غیر وزنی ڈوری میں جس کے سرے ایک سیدھے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں پھسلتے ہیں ڈنڈا افقی سے زاویہ ط پر مائل ہے۔ اس ڈنڈے میں ایک ہلکا پھلکا جس میں سے ڈوری گزرتی ہے پھسلتا ہے اس طور پر کہ وزنی پھلے اس کی مخالف سمتوں میں رہتے ہیں۔ تمام تماس چکنے ہیں اور توازن کی حالت میں 'ف' وہ زاویہ ہے جو ڈنڈے اور ڈوری کے ان حصوں کے درمیان ہے جو ہلکے پھلے سے قریب ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{مس}{سز} = \frac{ف-ق}{ف+ق}$$

۸۔ دو چھوٹے وزنی طلقے ایک چکنے تار میں پھسلتے ہیں، ان کی شکل قطع مکانی ہے جس کا محور افقی ہے۔ طلقوں کو ایک، الکی ڈوری سے مربوط کیا گیا ہے جو ماسک پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ جب طلقے توازن میں ہوتے ہیں تو محور کے نیچے محور سے ان کے امتصافی فاصلے ان کے اوزان کے متناسب ہوں گے۔

۹۔ دو برابر وزنی طلقے ایک تار میں پھسلتے ہیں، ان کی شکل ایک قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم امتصافی ہے۔ طلقوں کو ایک ڈوری سے جو اوپر کے ماسک پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے مربوط کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل تعداد میں لانتنا ہی ہیں۔

۱۰۔ (ج ج) ایک ذوار بعتہ الاضلاع ہے، ضلعوں (ج ب) ج ج، ج د، اور د (پرتو میں عمل کرتی ہیں جو علی الترتیب اضلاع کا عہدہ، یہ جہ نہ گئی ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر یہ قوتیں ذروں کے کسی نظام کو توازن میں رکھیں تو

۱۱۔ ایک ہلکا ڈنڈا کلا ایک چکنے نیم کروی پیالہ میں جس کا نصف قطر ہے پڑا ہے اور اس سے ایک وزن و ایک ایسے نقطے پر باندھا گیا ہے جس کے فاصلے ڈنڈے کے سروں سے  $l$  اور  $b$  ہیں۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں ڈنڈے کا میلان افق کے ساتھ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$2 \left[ \frac{b}{l} - \frac{b}{l} \right] = b - l$$

۱۲۔ ایک غیر وزنی ڈنڈا جس پر یکیت ک اور ک کے کھڑے منکے لگے ہوئے ہیں ایک مائل مستوی پر پڑا ہے اور وہ ایک محور کے گرد جو ڈنڈے میں سے گزرتا ہے اور مستوی پر عمود ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اگر ڈنڈا افقی محل میں ہو تو ثابت کرو کہ وہ اطراف پھسلنا شروع نہیں کرے گا الا آنکہ

$$m > \frac{k \cdot l}{k + b}$$

(۸۸)



جہاں یہ مستوی کا زاویہ ہے اور ۱ اور ب محور سے علی الترتیب ک اور ک کے فاصلے ہیں۔

۱۳۔ وزن و کا ایک منکا جو ایک چکنی غیر زنی دوری میں پڑ دیا گیا ہے زاویہ عہ کے ایک ماٹن مستوی پر ساکن ہے۔ منکے اور مستوی کے درمیان رگڑ کی قدر صہ ہے۔ دوری کے سرے مستوی کے دو نقطوں (ب سے جو ایک ہی ارتفاع پر ہیں) باندھے گئے ہیں۔ بتاؤ کہ منکے کے انتہائی توازن کے محل کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں اور ثابت کرو کہ ایسے محل ن میں دوری کا تناؤ حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{p} \text{ و } \frac{1}{q} (ن ب) \times \text{جم عہ} (\text{مس عہ} - \text{مس عہ})$$

۱۴۔ ایک یکساں دوری ایک کھردرے کرہ پر رکھی گئی ہے اس طور پر کہ وہ ایک افقی چھوٹے دائرہ پر جس کا ارتفاع عہ ہے پڑی ہوئی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر دوری نصف التہاروں پر عین پھسلنے کو ہے تو تناؤ مستقل ہے اور و مم (عہ + صہ) کے مساوی ہے جہاں و دوری کے اس طول کا وزن ہے جو دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے اور صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۵۔ ایک غیر زنی دوری دو ثابت نقطوں سے لگی ہوئی ہے اور اس کے معلومہ نقطوں پر مساوی اوزان بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوری کے مختلف حصوں کے افق کے ساتھ جو میلانات ہیں ان کے تماس ایک سلسلہ حسابیہ بناتے ہیں۔

۱۶۔ ایک چکنی نیم دائری نلی کو ۲ ن مساوی چکنے منکوں سے جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے پڑ کیا گیا ہے، یہ منکے نلی میں عین ٹھیک بیٹھے ہیں۔ نلی ایک انتہائی مستوی میں قائم ہے اور اس کے سرے مساوی ارتفاع پر ہیں۔ اگر سرے سے م ویں اور (م + ۱) ویں منکوں کے درمیان دباؤ مسام ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{کم} = \text{و جب } \frac{m}{n} \text{ قم } \frac{n}{n}$$

۱۷۔ مثال مابقی میں فرض کرو کہ منکوں کو لا انتہا چھوٹا کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی دو منکوں کے درمیان دباؤ نلی کے سرے کے نیچے گہرائی کے متناسب ہوگا۔

۱۸۔ ایک ذرنی ڈوری دو جگہ پر جو ایک ہی ہمواری پر اور ایک دوسرے سے فاصلہ  $l$  پر ہیں لگی ہوئی ہے۔ ڈوری کے دونوں سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور مرکزی حصہ ایک زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے امکان کے لئے ڈوری کا کل طول  $l$  سے کم نہ ہونا چاہئے۔

۱۹۔ وزن  $w$  کی ایک ڈوری دو نقطوں سے جو ایک ہی ہمواری پر ہیں لٹکائی گئی ہے اور اس کے زیر ترین نقطے سے ایک وزن  $w$  باندھا گیا ہے۔ اگر بلند ترین اور زیر ترین نقطوں پر کے تماس انتصابی سے زاویوں  $\alpha$ ،  $\beta$  پر مائل ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 = \frac{w}{w'}$$

۲۰۔ طول  $l$  کی ایک ذرنی ڈوری دو نقطوں پر سہاری گئی ہے اور ان نقطوں پر ڈوری انتصابی سے زاویے  $\alpha$ ،  $\beta$  بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کا ارتفاع دوسرے نقطہ کے اوپر

$$l \left( \frac{1}{4} (\alpha + \beta) - \frac{1}{4} (\alpha - \beta) \right)$$

۲۱۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت کی سمت جو ایک گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے زمین سے زاویہ  $\theta$  پر مائل ہوتی ہے جہاں  $\theta$  جب  $\theta = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$  ہے،  $\alpha$ ،  $\beta$  ایسیوں اور شعروں کے نصف قطر علی الترتیب  $l$  اور  $b$  ہیں اور  $\alpha$ ،  $\beta$  زاویہ ہے۔

(۹۰)

# پانچواں باب

## استوار اجسام کا علم سکون

### استواری

۶۲۔ اگر ہم چینی مٹی کے گیلے ڈھیلے یا نرم موم کو انگلی سے دبائیں تو مٹی یا موم میں نشان پر جائے گا، ہم نے انگلی سے جو قوت لگائی ہے اس نے جسم کی شکل میں تبدیلی پیدا کر دی۔ اگر ہم انگلی سے جیلی کی کیت کو دبائیں تو جیلی میں کوئی نشان نہیں پڑے گا لیکن ہم دیکھیں گے کہ جب تک قوت عمل کرتی ہے جیلی کی شکل بدلی رہتی ہے اگرچہ کہ وہ اپنی اصلی شکل پر عود کرتی ہے جبکہ دباؤ ہٹ جاتا ہے۔

برخلاف ازیں اگر ہم سیسے کی گولی یا ہاتھی دانت کے بلیئرڈ گولے کو انگلی سے دبائیں تو شکل کی کوئی تبدیلی قوت لگانے کے اثناء میں یا اس کے بعد نظر نہیں آئے گی۔ معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ سیسہ اور ہاتھی دانت مٹی اور موم سے زیادہ سخت ہیں اور علمی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ وہ زیادہ استواری ہیں۔

۶۳۔ کامل طور پر استوار جسم وہ ہو گا جو کسی قوت کے تحت خواہ یہ قوت کتنی ہی بڑی ہو اپنی شکل نہ بدلے۔ گولی اور بلیئرڈ گولہ کامل طور پر استوار نہیں ہیں کیونکہ بلیئرڈ گولہ جب دوسرے گولے سے ٹکراتا ہے تو ٹکرائے اثناء میں دباؤ کی شکل گہرائی ہوئی رہتی ہے لیکن فوراً بعد ہی وہ اپنی شکل پر آ جاتا ہے۔ گولی

نشانہ پر لگتے ہی دیتی ہے اور اس کی شکل مستقلاً تبدیل ہو جاتی ہے۔ کامل طور پر استوار جسم فطرت میں موجود نہیں ہے، بلکہ ڈکے گولے یا سیسی کی گولی کا مل طور پر استوار سمجھے جاسکتے ہیں صرف اس وقت تک کہ ان پر کوئی بہت بڑی قوت عمل نہ کرے۔

کامل طور پر استوار جسم کی تعریف ریاضی کی زبان میں حسبِ ذیل ہے:

ایک جسم کامل طور پر استوار ہوتا ہے اگر اس کے کسی دو ذروں کا درمیانی فاصلہ غیر متغیر رہے خواہ جسم پر کوئی قوتیں عمل کریں۔

۶۴۔ کوئی استوار جسم اپنے اندر کسی خط کی سمت کو بدلے بغیر فضا میں (۹۱)

حرکت کر سکتا ہے، ایسی حرکت کو حرکت انتقال کہتے ہیں۔ نیز وہ کسی نقطہ ن کے گرد ن کے محل کو بدلے بغیر گھوم سکتا ہے ایسی حرکت کو ن کے

گرد گردش کی حرکت کہتے ہیں۔ نیز اس میں ایسی حرکت ہو سکتی ہے جو

حرکت انتقال اور گردش کی حرکت سے مرکب ہو۔ اور ہم ثابت کریں گے کہ یہ وہ عام سے عام حرکت ہے جو جسم اختیار کر سکتا ہے۔

۶۵۔ سب سے اول ہمیں یہ معلوم ہونا چاہئے کہ کوئی استوار جسم ثابت ہوگا جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک خط مستقیم میں واقع نہ ہوں۔ کیونکہ فرض کر دو کہ یہ نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں۔

اگر ہم 'ا' اور 'ب' کو ثابت کریں تو چونکہ جسم بموجب فرض کامل طور پر استوار ہے اس لیے کوئی حرکت جو وقوع پذیر ہو سکتی ہے ایسی ہونی چاہئے جس میں 'ا' اور 'ب' سے کسی دوسرے نقطہ ن کے فاصلے غیر متغیر رہیں۔ اس لیے

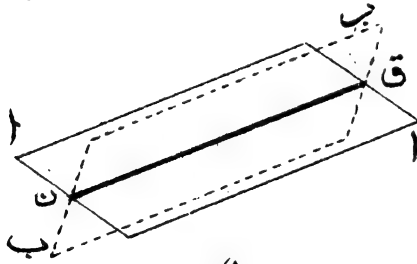
ن کو 'ا' ب کے گرد ایک دائرہ مرہم کرنا چاہئے اور جسم کی حرکت خط 'ا' ب کے گرد گردش کی حرکت ہونی چاہئے۔ پس اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں تو 'ج' کو 'ا' ب کے گرد ایک دائرہ مرہم کرنا چاہئے۔



غیر متغیر رہتے ہیں۔ اس لیے فاصلے ق' م' م' س' س' ق' علی الترتیب ق' م' م' س' س' ق' کے مساوی ہیں۔ اس لیے مثلثات ق' م' س' اور ق' م' س' ہر طرح آپس میں برابر ہیں اور اس لیے ایک دوسرے پر منطبق کئے جاسکتے ہیں۔ پس ان مثلثوں کو ایک دوسرے پر منطبق کرنے کی حرکت مطلوب حرکت ہے اور یہ حرکت ق' کے گرد خالص گردش کی حرکت ہے کیونکہ ق' حرکت نہیں کرتا۔

اب چونکہ استوار جسم کا محل ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے کوئی تین نقطہ ثابت ہوں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم صرف ایک محل اختیار کر سکتا ہے جس میں تین نقطہ ق' م' س' معلومہ مقامات پر ہوں لیکن اس حرکت کے بعد جس کو ہم نے بیان کیا ہے تین نقطہ ق' م' س' اپنے آخری مقامات پر ہیں۔ اس لیے پورا جسم اپنے آخری محل میں ہونا چاہئے اور اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۶۷۔ گردش کا محور۔ گردش کی حرکت میں فرض کرو کہ ن وہ نقطہ ہے



شکل (۶۷)

جو ثابت رہتا ہے۔ ن میں سے گزرنے والا کوئی مستوی (لو اور فرض کرو کہ گردش واقع ہونے کے بعد اس مستوی کا محل ب ہے۔ یہ دو مستوی ن میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے ن میں سے گزرتیوں

ایک خط ن ق' میں متقاطع ہونے چاہئیں۔ اس خط کو گردش کا محور کہتے ہیں۔ گردش کو ایک خیالی نقطے کے گرد جو گردش کے محور پر دوڑے گھماؤ کے طور پر خیال کیا جاسکتا ہے۔

کسی استوار جسم کے توازن کی شرطیں

۶۸۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی استوار جسم ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے تین نقطے جو ہم خط نہوں ثابت ہوں اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم پر خواہ کتنی ہی قوتیں عمل کریں ہم ہمیشہ اس کو اس کے تین نقطوں پر جو ہم خط نہوں تین مناسب طور پر منتخب قوتیں لگا کر ساکن رکھ سکے ہیں۔  
ان قوتوں کو خاص طریقے سے منتخب کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کوئی تین نقطے ہیں صرف اس شرط کے تحت کہ وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں۔ 'ا' پر کے ذریعے پر عمل کرنیوالی قوت کا مناسب انتخاب کر کے ہم ہمیشہ نقطہ 'ا' کو ساکن بنا سکیں گے۔  
جب 'ا' ثابت ہو جائے تو 'ب' حرکت پر مائل ہو گا یا نہیں ہو گا۔  
اگر 'ب' حرکت پر مائل ہے تو 'ب' کی حرکت کی سمت، 'ب' پر عمود ہونی چاہئے کیونکہ 'ا' حرکت نہیں کر سکتا۔ پس 'ا' ثابت ہو جانے کے بعد 'ب' پر 'ب' کے عمود وار ایک قوت لگانے سے 'ب' کو ثابت کرنا ممکن ہونا چاہئے۔

جب 'ا' اور 'ب' دونوں ثابت ہو جائیں تو تیسرے نقطہ 'ج' کے لئے جو حرکت ممکن ہے وہ صرف 'ج' اور 'ب' کے عمود وار ہے  
یعنی مستوی 'ا'، 'ب'، 'ج' کے عمود وار۔ اس طرح 'ج' کو ایک قوت کے ذریعہ جو مستوی 'ا'، 'ب' پر عمود ہو ساکن رکھا جاسکتا ہے اور اس لئے پورا جسم اب ساکن ہے۔ اس لیے یہ ثابت ہو چکا کہ کسی استوار جسم کو قوتوں کے کسی

نظام کے عمل کے خلاف ساکن رکھا جاسکتا ہے اگر حسب ذیل قوتیں تین اختیاری طور پر منتخب نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' پر جو ہم خط نہ ہوں لگائی جائیں:

(۱) ایک قوت نقطہ 'ا' پر، سمت نامعلوم

(ب) ایک قوت 'ب' پر، سمت خط 'ا'، 'ب' کے عمود وار

(ج) ایک قوت 'ج' پر، سمت مستوی 'ا'، 'ب'، 'ج' کے عمود وار۔

وہ شرط کہ قوتوں کا اصلی نظام جسم کو توازن میں رکھے یہ ہے کہ جسم کو ثابت

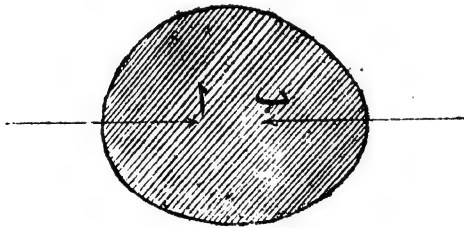
کرنے میں کوئی مزید قوتیں مطلوب نہیں اور اس لیے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' پر جو قوتیں داخل کی گئی ہیں ان میں سے ہر ایک کو معدوم ہونا چاہئے۔

## قوت کی انتقال پذیری

(۹۴)

۶۹۔ ایک استوار جسم پر غور کرو جس پر دو قوتیں 'د' اور 'و' دو نقطوں 'ا' اور 'ب' پر عمل کرتی ہیں یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہیں لیکن مخالف سمتوں 'ب' اور 'ا' میں عمل کرتی ہیں۔

استوار جسم ان دو قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہو گا یا اس کو تین قوتوں 'ف'، 'ف'، 'ف' کے ذریعے جو نقطوں 'ا'، 'ب' اور کسی تیسرے نقطہ 'ج' (جو خط 'ا' ب' میں نہیں ہے) پر عمل کرتی ہیں ساکن رکھا جاسکتا ہے یہ قوتیں ان سمتوں میں عمل کرتی ہیں جن کو قبل ازیں ظاہر کیا جا چکا ہے یعنی 'ف'، 'ف'، 'ف' مستوی (ا ب ج) کے عمود وار اور 'ف' خط (ا ب) کے عمود وار۔



شکل (۴۸)

فرض کرو کہ یہ قوتیں بشرط ضرورت عائد کی گئی ہیں اور اس لیے جسم

قوتوں 'و'، 'ب'، 'ا'، 'ف'، 'ف'، 'ف' کے زیر عمل توازن میں ہے جسم چمکے توازن میں ہے اس لیے کسی خط کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ یا کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر (۵۰) ہے۔



معدوم ہونا چاہئے۔  
 فرض کرو کہ ہم خط 'ا ب' کے گرد معیاروں کے مجموعے پر غور کرتے  
 ہیں۔ قوتیں 'و'، 'و'، 'و'، 'و'، 'و' سب کی سب اس خط سے

ملتی ہیں اور اس لیے ان میں سے ہر قوت کا معیار معدوم ہوتا ہے۔  
 اس طرح خط 'ا ب' کے گرد معیاروں کا مجموعہ واحد قوت 'ف' کے  
 معیار پر مشتمل ہے اور اس لیے ان معیاروں کے مجموعے کے معدوم  
 ہونے کے لیے 'ف' کے معیار کو معدوم ہونا چاہئے۔ اب قوت  
 'ف' کا معیار صرف اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ خود قوت  
 'ف' صفر کے مساوی ہو۔ جس کے یہ معنی ہیں کہ کوئی قوت جسم کو 'ا ب'  
 کے گرد گھومنے سے روکنے کے لیے مطلوب نہیں ہے۔

پس جسم دو قوتوں 'ف' اور 'و' کے زیر عمل ساکن ہے اور (۹۵)  
 اس لیے قوتوں 'ف'، 'ف'، 'و'، 'و' کے زیر عمل توازن میں ہے۔

'ا' میں سے گزرنے والے اور 'ا ب' پر عمود دار خط کے گرد معیار لینے سے  
 ہم دیکھتے ہیں کہ 'ف'، 'و'، 'و' کے معیار معدوم ہوتے ہیں اور اس لیے  
 اس خط کے گرد ان چار قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونے کے لیے  
 'ف' کا معیار صفر کے مساوی ہونا چاہئے اور اس لیے خود 'ف' کو صفر کے  
 مساوی ہونا چاہئے اس طرح جسم کو ساکن رکھنے کے لیے جو قوت مطلوب  
 ہے وہ صرف 'ا' پر کی قوت 'ف' ہے۔

لیکن اب توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ 'و'، 'و' اور 'ف' کے

اجزائے ترکیبی کا مجموعہ کسی سمت میں معدوم ہو۔ و اور  $\phi$  کے اجزاء ترکیبی مساوی اور مختلف ہیں اس لیے  $\phi$  کا جزو ترکیبی ہر سمت میں معدوم ہونا چاہئے یعنی  $\phi$  صفر کے مساوی ہونا چاہئے۔ پس یہ ثابت ہو چکا کہ استوار جسم دو قوتوں  $\phi$  اور  $\psi$  کے زیر عمل توازن میں ہے۔

۷۔ دفعہ مابقی سے فوراً ایک اصول جو قوت کے انتقال پذیری کے طور پر مشہور ہے حاصل ہوتا ہے۔

کسی قوت کا اثر جو ایک استوار جسم پر عمل کرے اس کی مقدار اور اس خط پر جس پر وہ عمل کرتی ہے منحصر ہوتا ہے۔ لیکن اس خط میں اس مخصوص ذرے پر منحصر نہیں ہوتا جس پر قوت لگائی گئی ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ قوت کے خط عمل کے کسی دو نقطوں  $\phi$  اور  $\psi$  پر وہی قوت لگائی گئی ہے۔  $\psi$  پر ایک

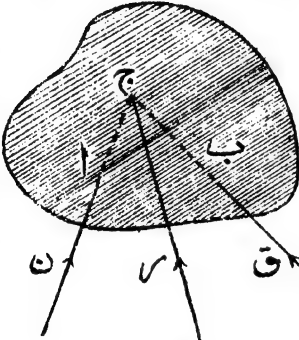


مساوی اور مخالف قوت ان دو قوتوں میں سے کسی ایک کی تعدیل کر سکتی ہے اور اسلئے یہ قوتیں مماثل ہیں۔

## ایک مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کی ترکیب

۸۔ فرض کرو کہ ایک استوار جسم کے دو نقطوں  $\phi$  اور  $\psi$  پر دو قوتیں  $\phi$  عمل کرتی ہیں اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں واقع ہیں۔ اب یہ دو خطوط عمل نقطوں  $\phi$  اور  $\psi$  سے آگے (بشرط ضرورت) خارج کرنے پر کسی نہ کسی نقطہ ج پر ملیں گے۔

قوت کے انتقال پذیری کے اصول سے یہ ظاہر ہے کہ قوت ف خواہ اُپر عمل کرے یا ج پر ایک ہی بات ہے۔ فرض کرو کہ وہ ج پر عمل کر رہی ہے۔ اسی طرح فرض کرو کہ قوت ق، ب کی بجائے ج پر عمل کر رہی ہے۔ اب جسم پر عمل کرنے والی دو قوتیں ف، ق ہیں جو ایک ہی ذرہ ج پر عمل کرتی ہیں۔ ان قوتوں کو تیسرے باب میں سمجھائے ہوئے قاعدوں کی



شکل (۵۰)

بموجب ایک واحد قوت میں جو ج پر عمل کرتی ہے مرکب کیا جاسکتا ہے۔ پس ہم قوتوں کو مرکب کر سکتے ہیں جبکہ خطوط عمل متقاطع ہوں اگرچہ کہ وہ ایک ہی ذرہ پر عمل نہ کریں۔

دو قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کر لینے کے بعد ہم اس حاصل قوت کو کسی تیسری قوت کے ساتھ جو اُسی مستوی

میں واقع ہو دو ابتدائی قوتوں کے طور پر

مرکب کر سکتے ہیں اور اس طرح تین قوتوں کا حاصل دریافت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔

پس قوتوں کی کسی تعداد کو جو سب کی سب ایک مستوی میں واقع ہوں

ایک واحد قوت میں مرکب کیا جاسکتا ہے۔ اس

قوت کو ابتدائی قوتوں کا حاصل کہتے ہیں۔

۲۔ ایک مستے صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ

اہم دو متوازی قوتوں کو مرکب کرنے کی کوشش کرتے ہیں

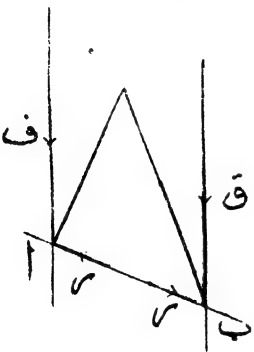
کیونکہ اس صورت میں خطوط عمل متقاطع نہیں ہوتے۔

لیکن یہ مشکل آسانی سے حل ہو جاتی ہے فرض کرو کہ

دو قوتیں ف، ق ہیں جن کو مرکب کرنا ہے

اور فرض کرو کہ ا ب کوئی خط ہے جو

ان کے خطوط عمل کو (ا، ب پر



شکل (۵۱)



$$۴ = ۱لا + ۲لا + ۳لا + \dots$$

$$۴ما = ۱ملا + ۲ملا + ۳ملا + \dots$$

سے حاصل ہوتے ہیں اور اس کی مقدار مساوات

$$۴ا = ۱لا + ۲ما$$

سے معلوم کیا جاسکتی ہے۔ وہ زاویہ طہ جو اس کا خط عمل محور لا کے ساتھ بناتا ہے مساوات

$$\frac{ما}{لا} = \text{مس طہ}$$

سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔  
اس کے خط عمل کا محل معلوم کرنے کے لیے ہم اس واقعہ کا استعمال کرتے ہیں کہ اسی مستوی کے کسی نقطہ کے گرد قوتوں کا اس کے گھومنا .... اور۔ اس کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ اس سے کسی نقطہ کے گرد اس کا معیار معلوم ہوتا ہے اور اس لیے چونکہ اس کی مقدار اور سمت معلوم ہے ہم اس کے خط عمل کا محل معلوم کر سکتے ہیں۔

(۹۸)

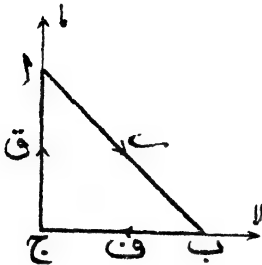
### توضیحی مثال

قوتیں ۴ق، ۳ق، ۲ق، ۱ق، ایک استوار جسم پر عمل کرتی ہیں، یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں اور ان کے خطوط عمل ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں جس کے اضلاع ۱، ۲، ۳ ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ۱، ۲، ۳ ہے اور قوتیں ۴ق، ۳ق، ۲ق، ۱ق علی الترتیب ۴ج، ۳ج، ۲ج، ۱ج پر عمل کرتی ہیں۔ ج کو مبداء فرض کرو اور ج ۱، ۲، ۳، ۴ کو محاورہ، لا، لو۔

فرض کرو کہ حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب ج لا کی سمت میں

تحلیل کرنے سے



شکل (۵۲)

لا = ف +  $\frac{ص}{۲۱}$   
اور اسی طرح ج مابقی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$ما = ق - \frac{ص}{۲۱}$$

اس لیے حاصل کی مقدار ح مساوات

$$ح = لا + ما = (- ف + \frac{ص}{۲۱}) + (ق - \frac{ص}{۲۱})$$

$$= ف + ق + \frac{ص}{۲۱} - \frac{ص}{۲۱} = (ف + ق)$$

سے حاصل ہوگی۔ زاویہ ط جو یہ حاصل محور ج لا سے بناتا ہے مساوات

$$\text{مس ط} = \frac{ما}{لا} = \frac{ق - \frac{ص}{۲۱}}{ف - \frac{ص}{۲۱}}$$

سے حاصل ہوگا۔

خط عمل معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج کے گرد ح کا معیار قوتوں 'ف' 'ق' اور 'ص' کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہونا چاہئے۔ اگر حاصل ج کے خط عمل پر ج سے عمود ع ہو تو

$$ح ع = \frac{۱}{۲۱} ص$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{۱}{۲۱} \frac{ص}{ح} = ع$$

اور اس سے ح کا خط عمل معلوم ہوتا ہے۔

مثالیں

(تمام قوتیں استوار اجسام پر عمل کرتی ہیں)

- ۱- اب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں اب، ب ج، ج د پر علی الترتیب ۱، ۲، ۳ پونڈ کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ حاصل کی مقدار اور ضلعوں کے مرکز کو
- ۲- اب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں اب، ب ج، ج د پر قوتیں ف، ق، س عمل کرتی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ان کا حاصل مربع کے مرکز میں سے گزرے۔

۳- مثال (۲) میں وہ شرط کیا ہے کہ

- (ا) حاصل نقطہ ا میں سے گزرے،
- (ب) حاصل نقطہ ب میں سے گزرے،
- (ج) چاروں قوتیں توازن میں ہوں۔

- ۴- قوتیں ف، ق، س، ایک مثلث اب ج کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور ان کا حاصل مثلث کے اندرونی و بیرونی دائروں کے مرکزوں میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ف      ق      س

ج ب - ج ج - ج ج - ج ج - ج ب

- ۵- اگر چار قوتیں جو ایک ذواربعة الاضلاع کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ ذواربعة الاضلاع مستوی ہونا چاہیے۔

- ۶- اب ج د ایک مستوی ذواربعة الاضلاع ہے اور قوتیں جو اب ج ب ج د سے تعبیر ہوتی ہیں ان ضلعوں پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

اگر توازن موجود ہو تو یہ ذواربعة الاضلاع متوازی الاضلاع ہونا چاہیے۔

- ۷- اگر ایک ذواربعة الاضلاع ایک دائرے میں کھینچا جائے تو ثابت کرو قوتیں جو اس کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور متقابل ضلعوں کے متناسب ہیں اس کو توازن میں رکھیں گی۔ نیز ثابت کرو کہ اس کا عکس بھی درست ہے

- یعنی یہ کہ توازن کے لیے قوتوں کو متقابل اضلاع کے متناسب ہونا چاہیے۔
- ۸- ایک ذواربعة الاضلاع ایک دائرے میں بنایا گیا ہے اور چار قوتیں

اس کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور ان ضلعوں کے طولوں کے بالعکس متناسب ہیں ثابت کرو کہ حاصل کا خط عمل وہ خط ہے جو متقابلہ اضلاع کے زوجوں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۹۔ چار قوتیں ایک ذواربعۃ الاضلاع کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور علی الترتیب ان ضلعوں کے طولوں کے ۱، ب، ج، د، گئے کے مساوی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱ج = ب د$$

اور یہ کہ مزید شرطیں جو توازن کے لیے ضروری ہیں یہ ہیں کہ نسبتیں ۱: ب اور ب: ج وہ نسبتیں ہونی چاہئیں جن میں دتر اپنے نقاط تقاطع پر تقسیم ہوتے ہیں۔

۱۰۔ مثال مابقی میں ثابت کرو کہ پہلے ضلع کے عمودی فاصلہ ذواربعۃ الاضلاع کے ان دو نقطوں سے جو اس ضلع پر نہیں ہیں حسب ذیل نسبت میں ہیں

$$۱(ج - ب) : د(ب - ۱)$$

### متواری قوتیں

۴۔ فرض کرو کہ دو متواری قوتوں ف اور ق کا حاصل معلوم کرنے کے لئے ہم وہ طریقہ استعمال کرتے ہیں جو اوپر سمجھا یا گیا ہے۔

ف کے خط عمل پر کسی نقطہ و کو مبدأ فرض کرو اور ف کے اس خط عمل کو محور و مانو، شکل (۵۳)۔ فرض کرو کہ حاصل س ہے اور اس کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = ۴$$

$$ما = ف + ق$$

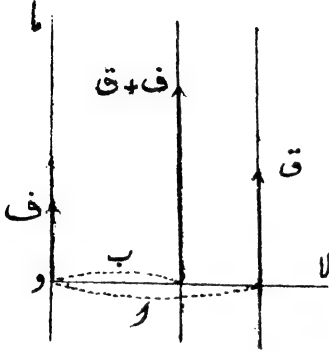
اس لیے حاصل قوت کی مقدار ف + ق ہے اور وہ و کے متواری عمل کرتی ہے فرض کرو کہ اس کا فاصلہ و ما سے ب ہے اور ق کا فاصلہ لا سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب و کے گرد معیار لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$(ف + ق) ب = ق لا$$

(۱۰۰)



اس لئے



$\frac{ب}{ق} = \frac{1}{ق + ق} = \frac{1}{ف}$   
جس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط عمل  
ف اور ق کے درمیانی فاصلے کو  
نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے۔  
اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ  
دو متوازی قوتوں ف، ق کا حاصل

شکل (۵۳)

ان قوتوں کے متوازی مقدار

ف + ق کی ایک قوت ہے جس کا خط عمل، قوتوں ف اور ق  
کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے  
۷۵۔ متوازی قوتوں کا دوسرا ثبوت - (صفحہ ۶۸) سے ہم راست

ثابت کر سکتے ہیں کہ متوازی قوتیں ف، ق اور قوت - (ف + ق) جو قوتوں  
ف، ق کے متوازی ہے اور ایک ایسے خط پر عمل کرتی ہے جو ان قوتوں کے  
درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے توازن میں ہیں۔

ف، ق کے خطوط عمل پر دو نقطے (ا، ب) کو اور کوئی تیسرا نقطہ ج کو جو خط  
(ب) پر نہ ہو۔ تب وہ جسم جس پر قوتیں ف، ق اور - (ف + ق) عمل کرتی  
ہیں حسب ذیل مزید قوتوں کے عمل سے توازن میں رکھا جاسکتا ہے :

(ا) ایک قوت کج جو ج پر عمل کرے اور (ب) ج پر عمود ہو،

(ب) ایک قوت کج جو ب پر عمل کرے اور (ا) ج پر عمود ہو،

(ج) ایک قوت کج جو (ا) پر عمل کرے۔

اس طرح قوتوں

ف' ق'۔ (ف + ق) 'سب' مساوی

کا نظام توازن میں ہوگا۔

خط ا ب کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ سب = ۰۔ اور ا کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ سب = ۰۔ اور اگر ایسا نہیں ہے تو وہ خط ب پر عمل کرتی ہے اور ایسی صورت میں وہ مساوی میں ضم کی جاسکتی ہے۔  
تو توں ف' ق' کے مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ مساوی کا کوئی جزو ترکیبی مستوی کے عمود وار نہیں ہو سکتا۔ اس لیے چار باقی قوتیں

ف' ق'۔ (ف + ق) 'سب' مساوی

سب کی سب ایک مستوی میں ہیں۔

پھر ف کے خط عمل کے

متوازی اور عمود وار تحلیل کرنے سے  
ہم دیکھتے ہیں کہ سب کے دونوں اجزاء  
ترکیبی معدوم ہوتے ہیں اور اس لیے  
مساوی = ۰۔ اس لیے ابتدائی قوتیں  
توازن میں آتی ہیں۔

۶۔ تو توں کو مرکب کرنے کے

ان طریقوں کی صیرفا تو وسیع ہو سکتی

ہے اور اس لیے متوازی قوتوں کی

کسی تعداد کو ایک واحد حاصل تو

میں مرکب کیا جاسکتا ہے۔ ہم حاصل کو اٹانے اور تحلیل کرنے سے دیکھتے

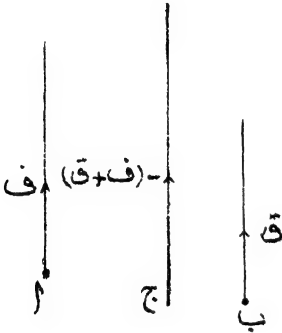
ہیں کہ حاصل 'ابتدائی قوتوں کے خطوط عمل کے متوازی ہے اور اس کی

مقدار ان قوتوں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے۔

یہ نتیجہ اجسام کے اوزان کے سلسلہ میں اہمیت رکھتا ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی استوار جسم پر چار فیزکس کے اثر کو

یعنی اس منقرض قوتوں کے توازن کے حاصل کو جن سے جسم بنا ہے



شکل (۵۴)

(۱۰۱)

ایک واحد قوت سمجھا جاسکتا ہے جو ایک واحد خط پر انتصاباً عمل کرتی ہے۔  
آئندہ باب میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ استوار جسم خواہ کسی محل میں ہو یہ خط  
ہمیشہ ایک معین نقطے میں سے گزرتا ہے جو جسم کے لحاظ سے ثابت  
ہوتا ہے، اس نقطہ کو مرکز ثقل کہتے ہیں۔

۷۔ اس کو تسلیم کئے بغیر متعدد سادہ صورتوں میں ہم خط عمل معلوم  
کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک ایکساں ڈنڈے پر بحث کر رہے  
ہیں۔ دو مساوی ذروں کے اوزان جو ڈنڈے کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر  
ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کئے جاسکتے ہیں جو ڈنڈے کے مرکز میں  
عمل کرتی ہے۔ تمام ذروں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کرنے پر ہم  
دیکھیں گے کہ ایک ایکساں ڈنڈے کا وزن اس کے وسطی نقطہ پر عمل  
کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے۔

اس طرح ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک دائری قرص، ایک دائری  
حلقہ یا کرہ کا وزن اس کے مرکز پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے۔ ایک  
متوازی السطوح یا مکعب کا وزن اس کے وزنوں کے نقطہ تقاطع پر عمل  
کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے اور علیٰ ہذا۔

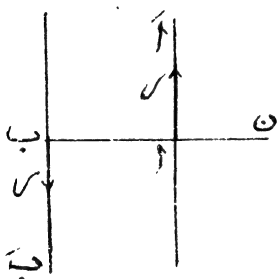
## جفت

۸۔ اگر ہم دو متوازی قوتوں کو جو مقدار میں مساوی مگر علامت میں  
مختلف ہوں مرکب کرنے کی کوشش کریں تو ہمیں حاصل کے طور پر ایک  
ایسی قوت ملے گی جو مقدار میں صفر ہوگی اور اس کا خط عمل لاتنا ہی پر ہوگا۔  
اگرچہ ایسی کسی قوت کی مقدار صفر ہوتی ہے لیکن اس کے اثر کو نظر انداز نہیں  
کیا جاسکتا کیونکہ اس کا معیار معدوم نہیں ہوتا اس وجہ سے کہ وہ ترکیبی قوتوں کے  
معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر شکل ۵۵ میں دو متوازی  
مخالف قوتوں کے خطوط عمل (A) و (B) ہوں اور ہر قوت م کے  
مساوی ہو اور اگر ان کی سمت کے علی القوائم ایک خط (C) ہو تو

ن میں سے گزرنے والے اور قوتوں کے مستوی کے علی القوائم خط کے گرد ان کے معیاروں کا مجموعہ

$$= \text{ن} \times \text{ب} - \text{ن} \times \text{ا}$$

$$= \text{ن} \times \text{ف}$$



شکل (۵۵)

یہاں قوتوں کے خطوط عمل کا درمیانی فاصلہ ف ہے۔ قوتوں کا ایسا زوج جو مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہو اور ایک ہی خط میں عمل نہ کرے جفت کہلاتا ہے ان کا معیار کسی نقطہ ن کے گرد جو ان کے خطوط عمل کے مستوی میں ہو نقطہ ن کے محل پر منحصر نہیں ہوتا اور اس کو جفت کا معیار کہا جاتا ہے۔

## توازن کی شرط

۱۔ چونکہ ہم مستوی قوتوں کے کسی نظام کا حاصل یا توازن کا حاصل ہوا ہو سکتا ہے یا ایک جفت اس لئے وہ شرط کہ حاصل صفر کے مساوی ہو یہ ہوگی کہ حاصل واحد قوت صفر ہو اور کوئی جفت عمل نہ کرے۔ حاصل قوت کا جزو ترکیبی کسی سمت میں معدوم ہوتا ہے اگر اس سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو۔ اس لئے حاصل قوت کے معدوم ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو مختلف سمتوں میں اجزائے تحلیلی معدوم ہوں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے تو کوئی حاصل نہیں ہو سکتا الا جفت کے اور چونکہ جفت معیار وہی ہوتا ہے خواہ اسے کسی نقطہ کے گرد لیا جائے اس لئے کوئی جفت نہیں ہو سکتا اگر کسی ایک نقطے کے گرد معیار صفر ہو۔ پس ہم مستوی قوتوں کے کسی نظام کے توازن کی ضروری اور کافی شرط حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر دو سمتوں میں قوتوں کے اجزاء تخلیلی کا مجموعہ منفرداً معدوم ہو اور اگر کسی نقطے کے گرد معیاروں کا مجموعہ بھی معدوم ہو۔

(۱۰۳) ہم توازن کی اس شرط کو ایک مختلف شکل میں بیان کر سکتے ہیں:

ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر کسی تین نقطوں کے گرد جو ایک ہی خط میں نہ ہوں معیاروں کے مجموعے جدا جدا صفر ہوں۔

کیونکہ اگر کسی ایک نقطہ کے گرد معیار صفر ہو تو حاصل جفت نہیں ہو سکتا۔ اس لیے وہ ایک واحد قوت ہونا چاہئے۔ اگر دو نقطوں (ا) و (ب) میں سے ہر ایک کے گرد معیار معدوم ہوں تو اس قوت کا خط عمل بالعموم (ج) ہونا چاہئے لیکن اگر کسی تیسرے نقطہ ج کے گرد بھی جو (ج) میں نہیں ہے معیار معدوم ہو تو خود قوت کو معدوم ہونا چاہئے۔

## منشائیں

- ۱۔ ۲ فٹ طویل خط کے دو سرہوں پر اور وسطی نقطہ پر علی الترتیب ۱۲، ۵ پونڈ کی متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔
- ۲۔ مثال مابقی کی قوتوں کا حاصل معلوم کرو جبکہ ان کی مقداریں ۵، ۱۲ اور ۷ پونڈ ہوں۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار تین قوتیں جن میں سے ہر ایک کی مقدار ۲۰ ہے عمل کرتی ہیں۔ حاصل معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا ایک نظام جو ایک مستوی کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار عمل کرتی ہیں اور ان ضلعوں سے تعبیر ہوتی ہیں ایک جفت کے مماثل ہے جس کا معیار کثیر الاضلاع کے رقبے کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے۔

۵۔ اگر تین نقطوں کے گرد جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں کوئی ہم مستوی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے مساوی ہوں اور انک الگ صفر نہ ہوں تو

ثابت کرو کہ یہ نظام ایک جفت کے مماثل ہے۔

۶۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول ۳ فٹ اور وزن ۲۴ پونڈ ہے۔ ۱۶ اور ۱۸ پونڈ کے وزن اس کے دو سروں پر پیوست کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈنڈے کو کس نقطہ پر سہارنا چاہئے کہ وہ عین متوازن ہو۔

۷۔ ۲۰ پونڈ وزن کا ایک ایکساں شہتیر اپنے دو سروں سے لٹکایا گیا ہے اور ۵۰ پونڈ کا ایک وزن اس کے ایک ایسے نقطہ سے لٹکتا ہے جس کے فاصلے سروں سے ۷ فٹ ۱ اور ۳ فٹ ہیں۔ ان نقطوں پر دباؤ معلوم کرو جن سے شہتیر لٹکا ہوا ہے۔

۸۔ ۵۰ پونڈ وزن اور ۱۸ فٹ طول کے ایک یکساں ڈنڈے کو دو آدمی اپنے شانوں پر لئے جا رہے ہیں وہ ڈنڈے کے سروں سے علی الترتیب ۲ فٹ اور ۳ فٹ کے فاصلوں پر چلتے ہیں۔ ۵۰ پونڈ کا ایک وزن شہتیر کے وسطی نقطے سے لٹکایا گیا ہے۔ وہ کل وزن معلوم کرو جو ہر شخص لیے جا رہا ہے۔

۹۔ ایک گھنٹی جس کا وزن ۳۲ پونڈ ہے دو مساوی گروں سے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۳ انچ ہے اور جو لوہے کی ایک سلاخ سے جڑے ہوئے ہیں بنائی گئی ہے، گروں کے مرکوزوں کا درمیانی فاصلہ ۱۶ انچ ہے ایک کرہ کو اب جدا کر لیا جائے تو گھنٹی کے باقی حصہ کا وزن ۲۰ پونڈ معلوم ہوتا ہے اس حصہ کو کہاں سہارنا چاہئے کہ وہ عین متوازن ہو سکے۔

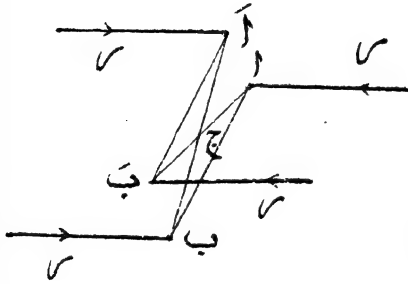
## متوازی مستویوں میں جفت

۸۰۔ دفعہ (۷۹) کے نتیجہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو جفت جو ایک ہی مستوی میں عمل کریں ایک ہی اثر پیدا کرتے ہیں اگر ان کے معیار مساوی ہوں کیونکہ ان میں سے ایک کو الٹانے سے توازن کی تمام شرطیں پوری ہو سکتی ہیں۔

اس طرح ہم ایک جفت کا اثر صرف اس کا معیار معلوم کر کے متعین کر سکتے ہیں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ وہ حقیقی مستوی جس میں

جفت عمل کرتا ہے کوئی اہمیت نہیں رکھتا صرف اس کی سمت اہم ہے  
دوسرے الفاظ میں:

مساوی معیاروں کے جفت جو متوازی مستویوں میں  
عمل کریں وہی اثر پیدا کرتے ہیں۔  
اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم ایک جفت کو الٹاتے ہیں اور



شکل (۵۶)

ثابت کرتے ہیں کہ اب یہ دو جفت  
توازن میں ہیں۔ فرض کرو کہ پہلا  
جفت دو قوتوں پر مشتمل ہے  
جن میں سے ہر ایک 'س' کے  
مساوی ہے اور فرض کرو کہ ان کے  
خطوط عمل کا ایک مشترک عمود  
ثانی الذکر سے نقطوں 'ا' 'ب' پر  
ملتا ہے۔ فرض کرو کہ دوسرے  
جفت کے مستوی میں 'ا' 'ب'  
ایک خط ہے جو 'ا' 'ب' کے مساوی

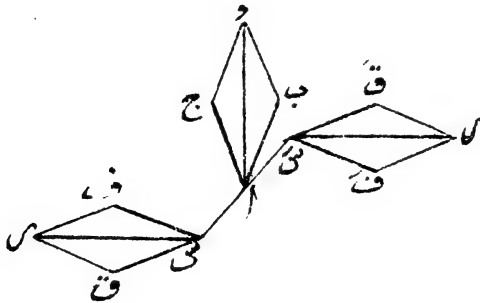
اور متوازی ہے اور فرض کرو کہ دوسرے جفت کو الٹانے کے بعد وہ دو قوتوں  
'س' سے تعبیر ہوتا ہے جو 'ا' 'ب' پر عمل کرتی ہیں۔ ہم اس جفت کو یہ  
سمجھ سکتے ہیں کہ وہ الٹائے ہوئے دوسرے جفت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ  
اس کا معیار دوسرے جفت کے معیار کے مساوی اور مخالف ہے اور  
وہ اُسی مستوی میں ہے جس میں دوسرا جفت ہے۔

اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ چار قوتیں جن میں سے ہر ایک  
'س' کے مساوی ہے اور جو علی الترتیب 'ا' 'ب' 'ا' 'ب' پر عمل کرتی ہیں  
توازن میں ہیں۔ بموجب عمل 'ا' 'ب' 'ا' 'ب' ایک متوازی الاضلاع  
ہے اس لیے ج جو اس کے وتروں کا نقطہ تقاطع ہے ہر ایک وتر کا

نقطہ وسطی بھی ہے۔  
 دو متواز قوتیں  $س$ ،  $س$  جو علی الترتیب  $۱$ ،  $۲$  پر عمل کرتی ہیں  
 ایک واحد قوت  $۲$   $س$  میں جو  $۱$   $ب$  کے وسطی نقطہ  $ج$  پر عمل کرتی ہے  
 مرکب کیجا سکتی ہیں اور اسی طرح دو قوتیں  $س$ ،  $س$  جو  $ب$ ،  $۱$  پر عمل کرتی ہیں  
 ایک قوت  $۲$   $س$  میں جو  $۱$   $ب$  کے وسطی نقطہ  $ج$  پر عمل کرتی ہے مرکب  
 کیجا سکتی ہیں۔ یہ دو قوتیں  $۲$   $س$ ،  $۲$   $س$  مساوی ہیں اور ایک ہی نقطہ  $ج$  پر  
 مخالف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ اس لئے توازن ہے اور یہ ثابت  
 ہوتا ہے کہ دو جفت مماثل ہوتے ہیں اگر ان کے معیار مساوی ہوں  
 اور اگر وہ مستوی جن میں وہ عمل کرتے ہیں متوازی ہوں۔  
 ۸۱۔ وہ سمت جو اس مستوی پر عمود ہو جس میں ایک جفت عمل کرتا ہے  
 اس جفت کا محور کہلاتی ہے چنانچہ دو جفت جن کا محور ایک ہی ہو اور جن کے  
 معیار مساوی ہوں مماثل ہوتے ہیں۔

### جفتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کرنا

۸۲۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی جفت ایک مقدار (اس کا معیار) اور  
 ایک سمت (اس کا محور) سے متعین ہو جاتا ہے۔ اس لئے اس کو ایک



شکل (۵۷)



خط مستقیم سے پوری طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے، اس خط کی سمت محور کی سمت ہوگی اور اس کا طول جفت کے معیار کی مقدار کو کسی پیمانے پر تعبیر کر کے گا۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ جفت قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کئے جاسکتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر دو جفت مقدار اور سمت میں دو خطوں 'ا ب'، 'ا ج' سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل ایک جفت ہوگا جو مقدار اور سمت میں 'ا د' سے تعبیر ہوگا جہاں 'ا د' اس متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے 'ا ب'، 'ا ج' ہیں۔

فرض کرو کہ 'ا ب'، 'ا ج' دو خط ہیں جو اپنی سمت اور مقدار سے دو جفتوں کے محوروں اور معیاروں کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ 'ا ب'، 'ا ج' میں ایک خط ہے جو مستوی 'ا ب' پر عمود ہے جہاں 'ا ب' خط کا وسطی نقطہ ہے۔ 'ا ب' اور 'ا ج' میں سے مستوی 'ا ج' کے متوازی مستویاں کھینچو اور فرض کرو کہ جفت 'ا ب' کی بجائے ان دو مستویوں میں توتیں 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں جہاں خطوط 'ف'، 'ق'، 'س' (۱۰۲) دونوں 'ا ب' پر عمود ہیں۔ اسی طرح فرض کرو کہ جفت 'ا ج' کی بجائے ان ہی دو مستویوں میں توتیں 'ق'، 'س' اور 'ق'، 'س' ہیں۔ اب ان دو جفتوں کی بجائے چار توتیں 'ف'، 'س'، 'ق'، 'س' ہیں۔

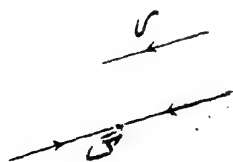
متوازی الاضلاعوں 'ف'، 'س'، 'ق'، 'س'، 'ا ب'، 'ا ج'، 'ف'، 'س'، 'ق'، 'س' کی تکمیل کرو۔ صریحاً یہ متوازی الاضلاع سب کے سب ایک دوسرے کے مشابہ ہیں اور پہلے اور دوسرے متوازی الاضلاعوں کے

نظیری خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ اس طرح اس جفت کی بجائے جو ا د سے تعبیر ہوتا ہے دو قوتیں ک س، ک س کی جا سکتی ہیں۔ لیکن یہ دو قوتیں ان چار قوتوں ک س، ق س، ق س، ک س کے ٹھیک مائل ہیں جن میں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جفت ا ب، ا ج تحویل ہو سکتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

### قوتیں فضا میں

۸۳۔ جب ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتیں سب کی سب ایک ستوی میں نہ ہوں تو ان کا حاصل بالعموم ایک واحد قوت نہیں ہوگا۔ مسئلہ۔ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جاسکتے ہیں جہاں قوت ایک اختیاری طور پر منتخبہ نقطہ پر عمل کرے۔

فرض کرو کہ گ منتخبہ نقطہ ہے اور ک کوئی قوت ہے جس کا خط عمل گ میں سے نہیں گذرتا۔ گ پر دو مساوی اور مخالف قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ک کے مساوی اور اس کے خط عمل کے متوازی ہو ان میں سے ایک قوت کو



ابتدائی قوت ک کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک جفت حاصل ہوتا ہے، اس لیے ابتدائی قوت ک کی بجائے ایک قوت (جو ابتدائی قوت کے مساوی اور متوازی ہے) لیکن نقطہ گ پر عمل کرتی ہے) اور ایک

شکل (۵۸)

جفت رکھے جاسکتے ہیں۔  
 نظام کی تمام قوتوں کے ساتھ ہی عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ  
 قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے  
 (۱) قوتوں کی ایک تعداد جو متغیہ نقطہ گ پر عمل کرتی ہیں،  
 اور (ب) جفتوں کی ایک تعداد

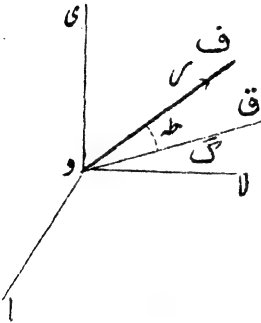
رکھی جاسکتی ہے۔  
 گ پر عمل کرنے والی قوتوں کو گ پر کی ایک واحد قوت میں  
 مرکب کیا جاسکتا ہے اور جفتوں کو ایک واحد جفت میں مرکب کیا جاسکتا  
 ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔  
 ۸۲۔ مسئلہ۔ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے  
 کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جاسکتے  
 ہیں جہاں جفت کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہو۔

دفعہ ۸۳ کے مسئلہ سے اس نظام کی بجائے ایک قوت (جو کسی  
 نقطہ پر عمل کرے) اور ایک جفت رکھے جاسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس  
 قوت کی مقدار  $r$  ہے اور اس کا خط عمل  $OF$  ہے۔ فرض کرو کہ جفت کا  
 معیار گ ہے اور اس کا محور  $OC$  ہے۔ اگر زاویہ  $FOC$  کو طہ  
 سے تعبیر کیا جائے تو ہم اس جفت کو دو جفتوں میں تحلیل کر سکتے ہیں،  
 (۱) معیار گ جم طہ کا ایک جفت جس کا محور  $OF$  ہے،  
 اور (ب) معیار گ جب طہ کا ایک جفت جس کا محور  $OC$  ہے  
 عمود ہے۔

ان میں سے دوسرے جفت کی بجائے کوئی دو قوتیں رکھی جاسکتی  
 ہیں بشرطیکہ وہ ایسی منتخب کی جائیں کہ وہ اس جفت کے مماثل ہوں  
 فرض کرو کہ ان میں سے ایک قوت  $r$  ہے جو  $OF$  پر عمل کرتی ہے یعنی یہ وہ قوت  
 ہے جو اس قوت  $r$  کی جو پہلے ہی سے  $OF$  پر عمل کرتی ہے تبدیل  
 کرتی ہے۔ جفت کی دوسری قوت وہ قوت  $r$  ہونی چاہئے جو  $OC$  کے

متوازی خط پر اس سے ایک ایسے فاصلہ پر عمل کرے جو  $\frac{گ}{ج}$  جب طہ کے مساوی ہے

قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے  
اب حسب ذیل قوتیں اور جفت  
ہیں:



شکل (۵۹)

(۱) قوتیں ۴ گ-م-ج-و ف پر  
عمل کرتی ہیں  
(ب) قوت م-ج-و ف کے متوازی  
(ج) جفت گ-ج طہ جس کا محور  
و ف کے متوازی ہے۔

دو قوتیں (۱) ایک دوسرے کی  
تعدیل کرتی ہیں اور اس لیے صرف

ایک قوت م-ج اور ایک جفت گ-ج طہ رہ جاتا ہے جس کا محور قوت  
کے خط عمل کے متوازی ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

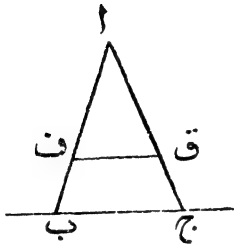
قوت کے اس خط عمل کو جو اب جفت کا محور بھی ہے قوتوں کے  
نظام کا مرکزی محور کہتے ہیں۔ قوتوں کا کوئی نظام سب سے زیادہ سادہ  
طریقہ پر مبنی ہو جاتا ہے اگر قوت اور جفت کی مقدار اور مرکزی محور کا محل اور  
سمت معلوم ہوں۔ ایسے کسی نظام کو سچ (Wrench) کہتے ہیں۔

### توضیحی مثالیں

۱۔ دو مساوی یکساں تختے قبضے کے ذریعہ ایک سرے پر جوڑے  
گئے ہیں اور وہ اس طرح کھڑے ہیں کہ ان کے آزاد سرے ایک جھکنے آغوش  
مستوی پر ٹکے ہوئے ہیں اور انہیں پھسلنے سے ایک دوسرے کے ذریعہ  
روکا گیا ہے جو ہر تختے سے ایک ہی ارتفاع پر بندھی ہے۔ اس سی کا  
تناؤ اور قبضے پر عمل معلوم کرو۔

(۱۰۸)

شکل میں فرض کرو کہ (ب) (ج) دو تختے ہیں جو (ا) پر قبضے سے جوڑے گئے ہیں اور فرض کرو کہ (ب) (ج) ہی ہے۔ تختہ (ب) پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:



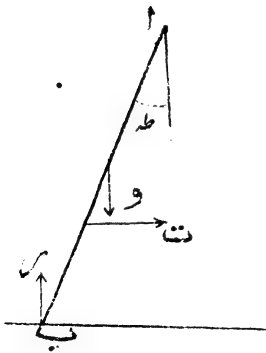
شکل (۶۰)

(۱) قبضہ (ا) پر کا عمل؛  
(ب) (ج) کا تناؤ جو (ب) (ج) پر عمل کرتا ہے؛  
(ج) پائین ب پر کا تعامل؛  
(د) وزن۔

ان چار قوتوں میں سے (ا) اور

(ب) وہ قوتیں ہیں جن کو معلوم کرنا مطلوب ہے۔ قوت (ج) بھی فی الحال نامعلوم ہے۔ قوت (د) کو جیسا کہ دفعہ ۷۷ میں سمجھایا جا چکا ہے ایک واحد قوت و سمجھا جاسکتا ہے جو تختے تکامل وزن ہے اور جو کہ تختہ جیسا کہ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ قوت اس کے وسطی نقطے میں سے عمل کرتی ہے۔

قوت (ج) کو جو ب پر کا تعامل ہے معلوم کرنے کا ایک سادہ طریقہ ہے۔ چونکہ ب پر تماس پکنا ہے اس تعامل کی سمت انتصاباً اوپر ہونی چاہئے۔ فرض کرو کہ اس کی مقدار  $\mu$  ہے۔



شکل (۶۱)

تساؤل کی بنا پر دوسرے تختے کے پائین ج پر ٹھیک متضاد تعامل ہونا چاہئے۔ اب اس پورے نظام کے توازن پر غور کرو جو دو تختوں اور رسی پر مشتمل ہے۔ اس نظام پر جو بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں وہ صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن  
(ب) ج اور ج پر کے تعامل۔  
اگر ہم انتصاباً تحلیل کریں تو

چونکہ نظام توازن میں ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$92 - 92 = 0$$

اس لیے  $0 = 92$ ، ہر تعامل ایک تختے کے وزن کے عین مساوی ہے جیسا کہ ہمیں توقع ہوئی چاہئے تھی۔

تختہ (ج) پر عمل کرنے والی چار قوتوں میں سے آخری دو قوتیں اب معلوم ہیں اور پہلی دو معلوم کرنی ہیں۔ اگر ہم (د) کے گرد معیار لیں تو قوتوں (ب) (ج) اور (د) کے درمیان ایک مساوات طے لگی جس سے نامعلوم قوت (ب) یعنی تناؤ معلوم ہو گا۔

اگر ہم تناؤ کو  $T$  سے تعبیر کریں اور زاویہ جب (ج) کو  $2$  طہ سے تو (د) کے گرد معیار لینے سے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$0 = 92 = \text{جب جب طہ} - 92 \times \frac{1}{4} \text{ جب جب طہ} - T \times \text{اف جم طہ} = 0$$

$$\text{اس لیے } T = \frac{\text{جب}}{\text{اف}} \text{ و مس طہ کیونکہ } 92 = 0$$

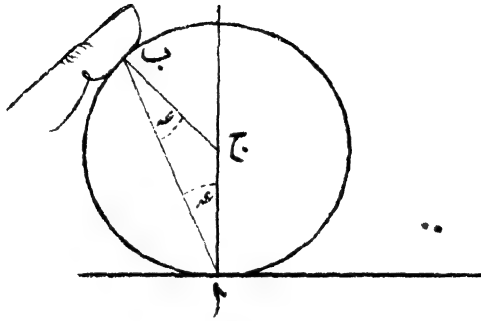
نیز انقار انتصا یا تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ (د) پر کامل مقدار  $T$  کی ایک افقی قوت پر مشتمل ہونا چاہئے جس کی سمت  $T$  کی سمت کے مخالف ہو۔ (۱۰۹)

۲۔ ایک حلقہ ایک میز پر کھڑا ہے اور اس کے ایک نقطے پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ ڈالا گیا ہے۔ دونوں تماسوں پر رگڑ کی قدیں معلوم ہیں۔ امتحان کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹ جائے گا۔

فرض کرو کہ حلقہ اور میز کا نقطہ تماس (د) ہے اور حلقہ اور انگلی کا نقطہ تماس (ج)۔ فرض کرو کہ (د) اور (ج) پر رگڑ کے زاوے صہ، صہ ہیں۔ فرض کرو کہ (ج) انتصابی کے ساتھ زاویہ عمہ بنتا ہے۔

حلقے پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب ذیل ہیں:

- (ا) تعادل نقطہ ا پر  
(ب) تعادل نقطہ ج پر  
(ج) حلقہ کا وزن



شکل (۶۲)

آخری قوت کو ایک واحد قوت و سمجھنے سے جو حلقہ کے انتصابی قطر ج ا پر عمل کرتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب تک حلقہ ساکن رہتا ہے وہ تین قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے۔

پس دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کے رو سے ان تین قوتوں کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

یہ معلوم ہے کہ وزن کا انتصابی خط ج ا ہے اور ا پر کے تعادل کا خط ا میں سے گزرنا چاہئے۔ اس لئے یا تو

(د) وہ نقطہ جس میں تین خطوط عمل ملتے ہیں ا ہونا چاہئے یا  
(ب) ا پر کا تعادل ج ا پر عمل کرنا چاہئے اس لئے وہ نقطہ جس میں تین خطوط عمل ملتے ہیں ج ا میں ا سے سوا کوئی دوسرا نقطہ ہوگا۔

یہ دو مری صورت فوراً خارج کی جاسکتی ہے کیونکہ اگر ا پر کا تعادل ج ا پر عمل کرتا ہے تو اسکو اہر وزن کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جاسکتا ہے اور اب

توازن اس قوت اور جب پر کے تعامل کے تحت ہونا چاہئے۔ اس کے لیے ضروری ہے کہ ہر قوت معدوم ہو یعنی جب پر کوئی دباؤ نہ ہو اور (۱) پر کا تعامل ملحقہ کے وزن کے عین برابر ہو۔ اس سے سرکھا توازن کی ایک حالت ملتی ہے۔ لیکن ملحقہ میز پر کھڑا ہے اور اس پر صرف اس کا وزن عمل کرتا ہے۔ لیکن توازن کی یہ حالت وہ نہیں ہے جس سے ہمیں اس مثال میں واسطہ ہے۔

اب ہم صورت (ع) پر غور کریں گے۔ اگر تین خطوط عمل (۱) پر ملتے ہیں تو جب پر کے تعامل کو جب (۱) پر عمل کرنا چاہئے اور یہ بات درست ہونی چاہئے خواہ جب پر کا دباؤ کتنا ہی بڑا ہو۔ پس جب پر کا تعامل عماد کے ساتھ ہمیشہ زاویہ عم بنا رہیگا اگر عہ 'ب' پر کے رگڑ کے زاویہ صہ سے کم ہے تو تعامل کے لیے یہ ایک ممکن خط عمل ہوگا اور جب پر کوئی پھسلن واقع نہ ہو سکے گی خواہ جب پر کتنا ہی بڑا دباؤ عمل کرے۔

برخلاف ان میں اگر عہ 'صہ' سے بڑا ہے تو توازن ناممکن ہے خواہ جب پر کا دباؤ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ اس لیے اگر توازن ہے تو جب پر کا دباؤ معدوم ہونا چاہئے۔

اور اس طرح ہم توازن کی اسی حالت پر پہنچتے ہیں جو صورت (ب) میں حاصل ہوئی تھی۔

جوں ہی جب پر کا دباؤ

قابل قدر ہو جاتا ہے توازن 'ب' پر

پھسلن واقع ہونے کی وجہ سے ٹوٹ جاتا

ہے کیونکہ جب پر توازن برقرار رکھنے کے

لیے تعامل کو ایسے زاویہ پر عمل کرنا پڑیگا

جو رگڑ کے اصلی زاویہ سے بڑا ہو۔

اس طرح حل دو مختلف

صورتوں میں پیش ہوتا ہے:

**صورت (۱)** اگر عہ 'صہ' سے بڑا ہے تو جوں ہی جب پر دباؤ ڈالا جاتا ہے

حرکت واقع ہوتی ہے۔ ملحقہ 'ب' پر پھسلتا ہے اور اس لیے (۱) پر لڑھکتا ہے۔



شکل (۶۳)



**صورت (۲)** اگر عہہ صہ سے کم ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب پر تواء کتنا ہی بڑا دباؤ ڈالا جائے جب پھسلن واقع نہیں ہو سکتی۔ اب یہ امتحان کرنا باقی ہے کہ آیا ۱ پر پھسلن واقع ہوگی۔

اس سوال کا نصفیہ کرنے کے لیے ہمیں یہ معلوم کرنا چاہئے کہ آیا ۱ پر کا تعامل انتصابی کے ساتھ ایک ایسے زاویہ پر عمل کرنا ہوا معلوم کیا جاسکتا ہے جو اتنا بڑا ہو جتنا ۱ پر گرگا زاویہ ہے یعنی صہ۔ اب حلقہ پر تین توتیں عمل کرتی ہیں یعنی ۱ اور جب پر کے تعامل کا م (کاب) (فرض کرد) اور حلقہ کا وزن و۔ ان توتوں کے خطوط نقطہ ۱ پر ملتے ہیں اور لامی کے مسئلے سے ہم توتوں کی مقدار اور ان کے درمیانی زاویوں کے درمیان رشتے معلوم کر سکتے ہیں۔

ان تین توتوں کے خطوط عمل شکل (۶۳) میں تعبیر کئے گئے ہیں۔ و اور کاب کا درمیانی زاویہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں ہمیشہ عہ کے مساوی ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ کاب اور انتصابی کے درمیان زاویہ ط ہے اب لامی کے مسئلے سے

$$\frac{\text{کاب}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{کاب}}{\text{جب ط}} = \frac{\text{و}}{\text{جب (عہ - ط)}}$$

کاب کی قیمت معلوم نہیں ہے، لیکن آخری دو کسروں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{و}}{\text{کاب}} = \frac{\text{جب (عہ - ط)}}{\text{جب ط}} = \text{جب عہ مم ط} - \text{جم عہ}$$

$$\text{اس لیے مم ط} = (\text{جم عہ} + \frac{\text{و}}{\text{کاب}}) \text{ جم عہ}$$

(۱۱) اس مساوات سے ہم زاویہ ط کی قیمت میں تبدیلیاں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ کاب کو بتدریج بڑایا جاتا ہے۔ چنانچہ جب کاب = ۰ تو ط کی قیمت = ۰۔ پھر جیسے کاب صفر سے بڑھتا ہے ط مسلسل بڑھتا ہے لیکن قیمت ط = عہ سے متجاوز نہیں ہوتا اور اس قیمت پر وہ اس وقت پہنچتا ہے جبکہ کاب = ∞۔

اگر عہہ صہ سے کم ہے تو ط کی قیمت، قیمت صہ میں سے گزرے گی جبکہ کاب ایک خاص قیمت پر پہنچے۔ یعنی جبکہ

$$\text{کپ} = \frac{\text{وجہ صہ}}{\text{جپ (عہ - صہ)}}$$

اور اس نقطہ پر لپ پھسلن واقع ہوگی۔  
اگر صہ ۱ سے بڑا ہے تو طہ کی قیمت، قیمت صہ پر کبھی بھی نہیں پہنچے گی  
اور اس لیے (۱ پر کبھی بھی پھسلن واقع نہیں ہوگی۔ اس لئے توازن ہرگز نہیں  
ٹوٹے گا اور جتنی قوت سے جب پر ہم دبائیں گے اتنی ہی زیادہ مضبوطی سے  
حلقہ انگلی اور میز کے درمیان گرفت میں رہے گا۔

اب ہم محصلہ نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر ذیل میں درج کرتے ہیں:  
اگر عہ ۱ سے کم ہو تو حلقہ میز پر لٹکتا ہے جو ہی ہم جب پر دبانا شروع  
کرتے ہیں۔

اگر عہ ۱ سے زیادہ صورتیں ہیں:

(۱) عہ ۱ سے کم ہو تو حلقہ (۱ پر پھسلے گا جو ہی کافی دباؤ لگایا جائے

(ب) عہ ۱ سے کم ہو تو حلقہ کسی دباؤ کے تحت بھی متحرک نہیں کیا جاسکتا۔

حلقہ کو انگلی کے نیچے سے (۱ پر پھسلنا کر نکالنے کے لیے اس صورت میں

وہ اچھلکر ہاتھ میں آجائے گا جیسا کہ مشہور ہاتھ کی چالاکی کے کرتب میں کیا جاتا ہے)

حلقہ کو ایسے نقطہ پر دبانا ضروری ہے جس پر عہ ۱ سے بڑا ہو لیکن عہ ۱ سے

کم ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر عہ ۱ سے بڑا ہو تو حلقہ کو اس طریقے سے پھینکنا ناممکن

ہے یہ صرف اس وقت کیا جاسکتا ہے جبکہ انگلی کے ساتھ حلقے کا تماس میز کے

ساتھ حلقے کے تماس سے زیادہ کھڑا ہو۔

## عام مثالیں

۱۔ دو یکساں سیڑھیوں کو جن میں سے ہر ایک ۱۲ فٹ لمبی اور ۲۰ پونڈ وزنی

ہے سرے پر جوڑ کر ایک دوہری سیڑھی بنائی گئی ہے، سیڑھیوں کے ان نقطوں کو

جو زمین سے ۵ فٹ بلند ہیں، ۲ فٹ لمبی رسی سے ملحق کیا گیا ہے، یہ

دوہری سیڑھی ایک پکنے افقی مستوی پر کھڑی ہے اور ایک شخص جس کا وزن

۱۶۰ پونڈ ہے ایک جانب ۹ فٹ بلندی تک چڑھتا ہے۔ رسی کا تناؤ علوم کرو۔  
 ۲۔ ایک وزنی یکساں ڈنڈے کو دو دوریوں سے جن کے طول ۱' ب  
 ہیں سہارا گیا ہے، دوریوں کے اوپر کے سرے ایک ہی نقطے سے باندھے  
 گئے ہیں اور نیچے کے سرے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں۔ ثابت  
 کرو کہ دوریوں کے تناؤ علی الترتیب ۱' اور ۲' کے متناسب ہیں۔  
 ۳۔ دو جھوٹی ثابت کھونٹیاں ایک ایسے خط میں ہیں جو افق سے  
 زاویہ طہ پر مائل ہے۔ ایک کھدرا پتلا ڈنڈا چلی کھونٹی کے نیچے سے گزرا ہے  
 اور اوپر کی کھونٹی پر لٹکا ہے، یہ اونچی کھونٹی ڈنڈے کے مرکز ثقل سے نیچے ہے۔  
 کھونٹیوں سے اس مرکز ثقل کے فاصلے علی الترتیب ۱' اور ۲' ہیں اور مرکز ثقل کی قدر  
 صہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ڈنڈا عین حرکت کے نقطے پر ہو تو

$$\text{صہ} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب} + \text{ا}} \text{مس طہ}$$

۴۔ دو وزنی یکساں ڈنڈوں کے سرے، دو ہلکی دوریوں سے مربوط (۱۱۲)  
 ہیں اور یہ پورا نظام ایک ڈنڈے کے وسطی نقطے سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت  
 کرو کہ توازن کی حالت میں یا تو ڈنڈے متوازی ہوتے ہیں یا دوریاں متوازی ہوتی  
 ہیں۔

۵۔ دو ڈنڈے (ا، ب) ج، د ایک چمکنے میز پر پڑے ہیں اور دونوں ہوتی  
 دوریوں (ج، ب) د سے باہم ملحق ہیں۔ اگر یہ نظام اُن قوتوں سے  
 جو ڈنڈوں کے وسطی نقطوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں رکھا گیا ہو تو ثابت کرو کہ  
 اگر دوریاں متوازی نہیں ہیں تو

(ا) ڈنڈے متوازی ہونے چاہئیں،

(ب) تناؤ دوریوں کے متناسب ہونے چاہئیں۔

۶۔ (ا، ب) ج، د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ج، د تروں (ج،  
 ب) کا نقطہ تقاطع ہے۔ ثابت کرو کہ (ا، ب) ج، د پر کی متوازی قوتیں  
 ۷، ۵، ۱۶، ۴، ۳ حسب ذیل دو سری متوازی قوتوں کے مماثل ہیں ج، د کے

وسطی نقطہ پر ۸، جب ج کے وسطی نقطہ پر ۱۰، اور ح پر ۱۴  
 ۷۔ ایک ٹھوس مکعب زاویہ عہ کے ایک کھردرے مائل مستوی پر رکھا گیا  
 ہے اس کے قاعدے کے دو کنارے خطوط میلان اعظم پر ہیں۔ رگڑ کا زاویہ صہ  
 ہے۔ ثابت کرو کہ اگر عہ < ۵۴° تو مکعب فوراً اونڈھا کرے گا لیکن اگر  
 صہ > ۵۴° تو مستوی پر نیچے پھسلے گا۔ اگر عہ، صہ یا ۵۴° میں سے کسی  
 کم ہو تو وہ رگڑ معلوم کر دجو عمل میں آتی ہے۔

۸۔ طول ۲ ل اور وزن و کا ایک یکساں ڈنڈا ایک چینی کھونٹی پر لٹکا ہوا  
 ہے، کھونٹی پر اس کا فاصلہ انتصابی دیوار سے ف (ل) ہے اور اس کی سمت  
 افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔ اس کا نیچلا سر دیوار پر دباؤ ڈالے ہے اور  
 اوپر کا سر ایک انتصابی ڈوری کے ذریعہ تھاما گیا ہے۔ ڈوری کا تناؤ معلوم کرو  
 اور ثابت کرو کہ وہ معدوم ہو گا اگر

$$\text{طہ} = \arctan \frac{1}{2}$$

۹۔ دو مساوی ایکساں کرے جن میں سے ہر ایک کا وزن و اور  
 نصف قطر ۱ ہے ایک چکنے نیم کروی پیالے میں جس کا نصف قطر ب ہے  
 پڑے ہوئے ہیں۔ ان دو کرؤں کے درمیان دباؤ معلوم کرو اور نیز ہر کرہ کا  
 دباؤ پیالے پر دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک یکساں ڈنڈے کے سرے چکنے مائل مستویوں پر ہیں جنکے  
 میلان افق سے عہ اور بہ ہیں۔ افق کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو۔  
 ۱۱۔ مثال ۱۰ میں ڈنڈے کے وزن کے مساوی ایک وزن ڈنڈے  
 سے پیوست کیا گیا ہے۔ اس وزن کو کس نقطہ پر لگانا چاہئے کہ ڈنڈا افق ساکن رہ سکے۔

۱۲۔ وزن و کا ایک ایکساں دائری حلقہ ہے جس پر وزن و کے ایک  
 منکے کو پیوست کیا گیا ہے۔ حلقہ ایک کھردری کھونٹی پر لٹک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ  
 اگر جب صہ <  $\frac{1}{2}$  تو حلقہ بغیر پھسلے ساکن رہ سکتا ہے خواہ اس کا کوئی نقطہ

کھوٹی پرٹکے جہاں صہ رگر کا زاویہ ہے۔

۱۳۔ ایک خمس ا ب ج > ع، پانچ مساوی یکساں وزنی ڈنڈوں کو سروں پر چکنے قضوں کے ذریعہ جوڑ کر بنایا گیا ہے۔ یہ خمس ایک انتصابی مستوی میں تنشا کلا سہارا گیا ہے اس طور پر کہ ا سب سے اوپر ہے اور ا ب، ا ع، دو چکنی کھونٹیوں کو مس کرتے ہیں جو ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر خمس متعظم ہو تو کھونٹیاں، ا ب اور ا ع میں سے ہر ایک کو نسبت

$$1 + \text{جب } \frac{1}{2} : 2 : 3 \text{ جب } \frac{1}{2} : 2$$

میں تقسیم کرنی چاہئیں۔

۱۴۔ طول ل کا ایک یکساں شہتیر نصف قطر ا کے ایک نیم کروی پیلے (۱۱۳) کی افقی کور کے سہارے پڑا ہے اور اس کا پھیلا سہارے پیلے کی چکنی مقعر سطح پر ٹکا ہوا ہے۔ انتصابی کے ساتھ اس کا میلان معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک بیلا گردشی مکانی نما کی شکل کا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے۔ ایک یکساں ڈنڈا اس کے پر کی ایک میخ پر ٹکا ہوا ہے اور اس کا پھیلا سہارا اندرونی سطح پر ہے۔ دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ انتصابی کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو۔

۱۶۔ وزن و کا ایک یکساں شہتیر ایک انتصابی دیوار پر اور ایک افقی مستوی پر جس کے ساتھ وہ زاویہ عہ بناتا ہے ٹکا ہوا ہے، دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ شہتیر کے نچلے سرے کو ایک ڈوری کے ذریعہ دیوار کے پائین سے باندھا گیا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک سید ہے یکساں وزنی ڈنڈے کا ایک سر ایک کھر ڈرے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرے سرے کو ایک رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطے سے ملحق کیا گیا ہے۔ اگر ڈوری، ڈنڈے اور افقی مستوی کے کل تعامل کے میلان سمت انتصابی کے ساتھ علی الترتیب طہ، فہ، یہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{م م طہ} \pm 2 \text{ م م فہ} - \text{م م یہ} = 0$$

- ۱۸۔ ایک ہی مادی شے کے لیکن مختلف طول کے دو یکساں ڈنڈے  
(ب) ج آزادانہ طور پر جب پر جوڑے گئے ہیں اور ایک انتصابی  
دیوار پر نقطوں (ا) اور ج پر ثبت کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب پر کے  
تغافل کی سمت زاویہ (ب) ج کی تنصیف کرتی ہے۔
- ۱۹۔ وزن و کے ایک یکساں منتظم مسدئی تختہ (ب) ج د ع ف  
کو تین کھونٹیوں پر جو کونوں (ا) ب پر اور د ع کے وسطی نقطہ پر واقع ہیں افقی  
محل میں مہارا لگیا ہے۔ کھونٹیوں پر دباؤ معلوم کرو۔
- ۲۰۔ دو کرے جن کے نصف قطر (ا) ب اور وزن و و ہیں علی الترتیب  
طول ل ل کی دو ریلوں کے ذریعہ چھت کی ایک ہی کنڈی سے آزادانہ لٹکتے  
گئے ہیں۔ اگر ل ل + ۲ ا تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو پہلی ڈوری انتصابی کے ساتھ  
بناتی ہے حسب ذیل ہے ۱

و

جب

$$\frac{(و + و)}{(ل + ل)}$$

- ۲۱۔ ایک یکساں ڈنڈا طول ل ل کی دو دو ریلوں کے ذریعے جو اس کے  
سروں سے اور دو کنڈیوں سے بندھی ہیں لٹکتا ہے۔ کنڈیاں ایک ہی افقی خط  
میں ایک دوسرے سے فاصلہ (ا) پر ہیں۔ اگر دو ریاں ایک دوسرے کو عبور  
کریں اور افق کے ساتھ علی الترتیب زاوے ع ع بنائیں تو ثابت کرو کہ جب  
ڈنڈا توازن میں ہوتا ہے تو

$$\text{جب } (ع + ع) = (ل \text{ جم } ع) = (ل \text{ جب } ع) = (ع)$$

- ۲۲۔ طول ۲ ب کا ایک یکساں تختہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک  
سرا ایک کھردرے افقی مستوی پر ہے اور تختہ نصف قطر (ا) کے ایک پکٹے ثابت  
اسطوانہ کو جو مستوی پر پڑا ہے مس کرتا ہے اور مستوی کے ساتھ زاویہ ۲ ع بناتا  
ہے۔ رگڑ کی قدر صہ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ممکن ہے اگر

$$(ل \text{ جب } ص) = (ب \text{ مس } ع \text{ جم } ۲ ع \text{ جب } ۲ ع + ص)$$

- ۲۳۔ دو مساوی اور مشابہ متساوی الساقین فائے جن میں سے ہر ایک کا

وزن و اور انتصابی زاویہ ۲۷ ہے پہلو بہ پہلو رکھے گئے ہیں، ان کے قاعدے ایک افقی میز پر ہیں اور وہ میز کو وہ ایک کنارے پر عین مس کرتے ہیں۔ وزن و اور نصف قطر س کا ایک چکنا کرہ ان کے درمیان سہارا گیا ہے اور وہ ہر ایک کے ایک رخ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے لیے یہ ضروری ہے کہ

$$مہ < \frac{د م م ع}{و + ۹۲} ، س > ۱۲ جب ع م س ع (۱ + \frac{۹}{و})$$

جہاں مہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے اور ۱۲ فانی کے قاعدے کا طول ہے۔ ۲۴ - وزن و کا ایک مستطیلی تختہ ایک ثابت کھردرے کُندے پر جس کی شکل ایک افقی مستدیر اسطوانے کی ہے آڑا پڑا ہوا ہے۔ تعامل کی حالت میں افقی کے ساتھ یہ تختہ جو زاویہ بناتا ہے وہ عہ تک بڑھ جاتا ہے جبکہ اس کے نیچے کے اوپر کے سروں پر علی الترتیب وزن و اور و رکھے جاتے ہیں اور یہ زاویہ بہتک گھٹ جاتا ہے جب کہ ان وزنوں کا باہمی تبادلہ کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ تختہ کامیلا افق کے ساتھ جبکہ اس پر کوئی وزن نہ ہو حسب ذیل ہے:

$$و (و + ۹ + و) (و ع - و ب)$$

$$و (و + و - و) (و - و)$$

جہاں و وہ وزن ہے جس کو اوپر کے سروے پر رکھنے سے تختہ افقاً متوازن ہوتا ہے۔ ۲۵ - ایک زنجیر ۲۸ بالکل مشابہ کڑیوں سے بنی ہے اور متصلہ کڑیوں کے درمیان تماس کامل چکے ہیں۔ سروں پر کی دو کڑیاں ایک افقی تار میں پھسل سکتی ہیں لیکن یہاں تماس کھردرے ہیں اور رگڑ کی قدر صاف ہے ثابت کرو کہ توازن کے انتہائی محل میں اوپر کی کڑیوں میں سے کسی ایک کا میلان انتصابی کے ساتھ حسب ذیل ہے

$$مس \frac{۱ - ۲۲ ن م}{۱ - ۲۲}$$

۲۶ - نصف قطر س کے دو مساوی دائری قوس جن کے کنارے چکے ہیں

اپنے چپے رخون پر دو چکنے انتصابی مستویوں کے درمیان کوئی نہ میں رکھے گئے ہیں، یہ مستوی زاویہ ۲۷۰ پر ایک دوسرے سے ملے اور قوس ایک دوسرے کو اس خط پر مس کرتے ہیں جو اس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ بڑے سے بڑا قوس جو ان کے درمیان بغیر ان کو ہٹائے بٹھایا جا سکتا ہے وہ ہے جس کا نصف قطر  $r$  (قطعہ - ۱) ہے۔

۲۷۔ مثال ما سبق کے نتیجے میں کیا ترمیم کرنی ہوگی اگر تمام تماس کھردرے ہوں اور ہر تماس پر رگڑ کا زاویہ صفر ہو۔

۲۸۔ دو یکساں سیڑھیاں ایک سرے پر جوڑی گئی ہیں اور یہ دو ہری سیڑھی ایک کھردرے افقی مستوی پر اپنے دوسرے سروں پر کھڑی ہیں۔ ایک شخص جس کا وزن ایک سیڑھی کے وزن کے مساوی ہے ایک سیڑھی پر چڑھتا ہے ثابت کرو کہ دوسری سیڑھی پہلے پھسلے گی۔

اگر وہ پھسلنے لگے جبکہ شخص فاصلہ  $L$  تک چڑھ چکا ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر

$$\frac{L + L}{L + L} \text{ ہے جہاں } L \text{ ہر سیڑھی کا طول ہے اور } \theta \text{ وہ زاویہ ہے جو ہر سیڑھی}$$

انتصابی سے بناتی ہے۔

۲۹۔ ایک غیر ذنی سیڑھی وزن  $W$  کے ایک چکنے مکعب کے سہارے چکنی زمین پر کھڑی ہے اور سیڑھی کا پایہ مکعب کے زیر ترین کناروں میں سے ایک کے وسطی نقطہ کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ بندھا ہے۔ وزن  $W$  کا ایک شخص سیڑھی پر چڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سیڑھی مکعب کے سرے سے باہر نکلی ہوئی ہو تو مکعب الٹ جائیگا قبل اس کے کہ شخص مکعب کے سرے پر پہنچے الا انکہ

$$\theta < 2 \text{ و } \theta \text{ (جب } \theta = 0 \text{ جمعه)}$$

جہاں  $\theta$  افق کے ساتھ سیڑھی کا زاویہ میلان ہے۔

۳۰۔ چار مساوی کڑے ایک چکنے کڑی پیالے کی تہ میں پڑے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں کڑوں کے مرکز ایک افقی مستوی میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دوسرا مساوی کڑہ ان پر رکھا جائے تو پیالے کے کڑے جھانکے



اگر پیالے کا نصف قطر ایک کرہ کے نصف قطر کے  $(1 + 137/2)$  گنے سے بڑا ہو۔  
 ۳۱۔ تین مساوی کُرے ایک چکنے افقی مستوی پر ساکن ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ان کے مرکز ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں اور کُرے کو باہم ایک ہمین ڈوری سے جو ان کے گرد گزرتی ہے اور مرکزوں کے مستوی میں ہے باندھا گیا ہے۔ اگر دوسرا مساوی کرہ ان کے متشاکلا رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ بقدر  $\frac{1}{413}$  وکے بڑھ جاتا ہے جہاں و اوپر کے کرہ کا وزن ہے۔

۳۲۔ ایک قائم مستدیر مخروط جس کا انتصابی زاویہ  $2^\circ$  ہے اپنے قاعدہ کے سہارے ایک افقی کھردرے مستوی پر ساکن ہے۔ اس کے راس سے ایک ڈوری باندھ کر ڈوری کو افقی سمت میں بتدریج بڑھنے والی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ معلوم کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹے گا۔  
 ۳۳۔ ایک وزنی ذرہ کو ایک کھردرے مائل مستوی پر رکھا گیا ہے جس کا میلان رگڑ کے زاویہ کے ٹھیک مساوی ہے۔ ذرہ سے ایک تاکا باندھ کر تاکے کو مستوی کے ایک سوراخ میں سے جو ذرہ کے نیچے ہے گزارا گیا ہے لیکن تاکا سوراخ میں سے گزرنے والے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تاکے کو سوراخ میں سے بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر رسم کرے گا۔  
 ۳۴۔ وزن و کا ایک ایکساں کبھی کندہ ایک کھردرے مائل مستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک کنارہ افقی ہے۔ اور کندے کے سہارے ایک کھردرا کرہ ہے جس کا وزن وہ ہے اور جس کا نصف قطر کعب کے ایک کنارے سے کم ہے۔ مستوی کے میلان کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ وہ مختلف طریقے معلوم کرو جن میں توازن ٹوٹ سکتا ہے اور معلوم کرو کہ کسی معلوم صورت میں کون سا طریقہ واقع ہوگا۔

۳۵۔ ایک کھردرے ایکساں ڈنڈے کو ایک افقی مستوی پر رکھا گیا ہے اور اس کے طول کے نقاط تنکیت میں سے ایک نقطہ پر ایک افقی قوت

اس کے طول کے عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے۔ معلوم کرو کہ کس نقطہ کے گرد ڈنڈا گھومنے لگیگا۔

۳۶۔ ایک وزنی سلاح (ج) کو طول ل کی دو مساوی ڈوریوں کے ذریعہ جو ابتداً متوازی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ وہ جفت معلوم کرو جس کو سلاح پر لگانا ہو گا تاکہ سلاح کو افقی مستوی میں زاویہ طہ میں سے گھما دینے کے بعد سارا رکھا جاسکے۔

۳۷۔ ایک دروازے کے قبضوں کا خط اتصالی سے زاویہ عہ پرائل ہے۔ ثابت کرو کہ وہ جفت جب عہ جب طہ کے متناسب ہے جو دروازے کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے جو توازن کے محل سے زاویہ طہ پر پائل ہو۔ (۱۱۶)

۳۸۔ ثابت کرو کہ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کو دو مساوی قوتوں میں جو مرکزی محور سے مساوی طور پر پائل ہوں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔  
۳۹۔ ثابت کرو کہ دو قوتوں ف اور ق کا مرکزی محور این کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلہ م کو قطع کرتا ہے اور اس کو نسبت

ق (ق + ف جم طہ) : ف (ف + ق جم طہ)  
میں تقسیم کرتا ہے جہاں طہ قوتوں کی سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ صدر جفت کا میعار حسب ذیل ہے

م ف ق جب طہ

$\sqrt{ف^2 + ق^2 + ۲ ف ق جم طہ}$

۴۰۔ ثابت کرو کہ دو معلومہ رینجوں (س، ہ) اور (س، ہ) کے حاصل کا محور رینجوں کے محوروں کے درمیانی چھوٹے فاصلہ ۲ م کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا فاصلہ وسطی نقطہ سے حسب ذیل ہے:

$\frac{(س، - س،) م + (س، - س،) جم طہ}{س، + س، + ۲ س، س، جم طہ}$

جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو رینجوں کے محوروں کے درمیان ہے۔

(۱۱۷)

## چھٹا باب مرکز ثقل

۸۵۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کمیتوں کے ایک نظام پر جاذبہ ارض کا عمل متوازی قوتوں کے ایک نظام سے تعبیر ہو سکتا ہے، یہ قوتیں ان قوتوں پر مشتمل ہوتی ہیں جو ہر ذرے پر ذرے کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہیں اور ان کی سمت انتصابی نیچے وار ہوتی ہے۔ ان قاعدوں کی بموجب جو باب ماسبق میں سمجھائے جا چکے ہیں ان قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جاسکتا ہے۔ اس قوت کی مقدار تمام ترکیبی قوتوں کا

مجموعہ ہے اور اس لیے وہ جسم کا کل وزن ہے، اور اس قوت کی

سمت ترکیبی قوتوں کے متوازی ہونے کی وجہ سے خود انتصابی

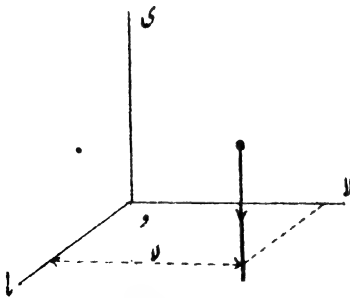
نیچے وار ہے۔ اس باب میں اس قوت کے خط عمل کے محل کو معلوم

کرنے کا مسئلہ زیر بحث رہیگا۔

۸۶۔ فرض کرو کہ ذروں کی

کمیتیں ک، ک، ک، ... ہیں۔

فرض کرو کہ قائم محور لیے گئے ہیں جن میں محوری انتصابی ہے اور فرض کرو کہ پہلے ذرے کے مختلّہ لا، ما، ی، ہیں، دوسرے ذرے کے مختلّہ



شکل (۶۴)

لا، 'ما، 'ی، اور علیٰ ہذا القیاس۔

پہلے ذرے کا وزن ک، ج ہے اور اس کا خط عمل مستوی ولا، ما کو ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے محدّد لا، 'ما، 'ی ہیں۔ اس لیے اس قوت معیار محور و ما کے گرد ک، ج لا، ہے۔

فرض کر دو کہ حاصل کا خط عمل مستوی ولا، ما کو نقطہ لا، 'ما، 'ی پر قطع کرتا ہے۔ اب حاصل کا معیار محور و ما کے گرد (ک، ج) لا، ہے جہاں ک، ج سے تمام ذروں کی کمیتوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

چونکہ حاصل کا معیار جدا جدا قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

(۱۱۸)

$$(ک، ج) لا، = (ک، ج) لا،$$

$$لا، = \frac{ک، ج}{ک}$$

$$ما، = \frac{ک، ج}{ک}$$

ان مساواتوں سے اس نقطہ کے محدّد لا، 'ما، 'ی حاصل ہوتے ہیں جس پر حاصل کا خط عمل مستوی ولا، ما سے ملتا ہے۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ نقطہ لا، 'ما، 'ی پر کی کمیت ک، ج نقطہ لا، 'ما، 'ی پر کی کمیت ک، ج وغیرہ کے مرکز ہندسی کے محدود حسب ذیل ہیں

$$لا، = \frac{ک، ج}{ک} ، ما، = \frac{ک، ج}{ک} ، ی = \frac{ک، ج}{ک}$$

اس لیے وہ نقطہ جس پر مرکز ہندسی میں سے گزرنے والا امتصافی مستوی ولا، ما کو قطع کرتا ہے

$$\frac{ک، ج}{ک} ، لا، ، \frac{ک، ج}{ک} ، ما، ، \frac{ک، ج}{ک} ، ی$$

ہونا چاہئے یعنی یہ نقطہ، نقطہ لا، 'ما، 'ی ہونا چاہئے جس پر حاصل قوت کا

خط عمل مستوی دلا ما سے ملتا ہے۔ اس لیے  
جاذبہ ارض کی حاصل قوت کا خط عمل وہ انتصابی خط  
ہے جو ذروں کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔

یہ بھی وجہ ہے کہ نقطوں کی کسی تعداد کا مرکز ہندسی جب کہ ان نقطوں کو  
اُن ذروں کی کیفیتوں کی بموجب وزنی بنایا گیا ہو جو ان نقطوں پر ہیں ذروں کا  
مرکز ثقل کہلاتا ہے۔ ایک استوار جسم پر جاذبہ کا اثر جیسا کہ ہم دیکھ چکے  
ہیں ایک واحد قوت سے تعبیر ہوتا ہے جو جسم کے مرکز ثقل میں سے  
انتصائباً نیچے وار عمل کرتی ہے، اس قوت کی مقدار جسم کے کل وزن کے  
مساوی ہوتی ہے۔ اس لئے جاذبہ کا عمل وہی ہے جو ہوتا اگر جسم کی  
کل کمیت ایک واحد ذرے میں جو مرکز ثقل پر رکھا ہو مرکز ہوتی۔

(۱۱۹)

۸۷۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک استوار جسم کو یا اجسام کے نظام کو  
ایک دوری کے ذریعہ لٹکائیں تو مرکز ثقل دوری کے انتصائباً نیچے ہونا  
چاہئے۔ کیونکہ نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں دو قوتوں میں تحلیل  
ہوتی ہیں۔ دوری کا تناؤ اور وزن جو مرکز ثقل پر عمل کرتا ہے۔  
اور توازن کی حالت میں یہ دو قوتیں ایک ہی خط پر عمل کرنی چاہئیں۔  
اسی طرح یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر ایک جسم کو ایک نقطہ پر اس طریقہ  
رکھا جائے کہ وہ اس نقطہ پر توازن کی حالت میں ہو تو مرکز ثقل اس نقطہ  
کے انتصائباً اوپر ہونا چاہئے۔

۸۸۔ دفعہ (۷۷) میں مرکز ثقل کے عمل کی چند سادہ مثالیں بیان  
کی جا چکی ہیں۔ وہ حسب ذیل تھیں :

(۱) ایک یکساں ڈیڑے کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے،  
(ب) ایک یکساں دائری قرص، دائری حلقہ، یا کرہ کا مرکز ثقل  
اس کے مرکز پر ہوتا ہے،

(ج) ایک مکعب یا متوازی السطوح کا مرکز ثقل مرکز پر ہوتا ہے

(یعنی وتروں کے نقطہ تقاطع پر)۔  
**۸۹۔** اجسام کے کسی نظام کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے جبکہ اس کے حصوں میں سے ہر ایک کا مرکز ثقل معلوم ہو۔ کیونکہ ہر حصہ کے وزن کو ایک واحد قوت سمجھنے سے جو اس کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتی ہے ہمیں عمل کرنے والی متوازی قوتوں کی ایک تعداد ملے گی اور ان متوازی قوتوں کو بیان کردہ قاعدوں کی بموجب مرکب کرنے سے حاصل کے خط عمل سے وہ خط معلوم ہوگا جس پر کل وزن عمل کرے گا۔ اس طرح اجسام کے کل نظام کا مرکز ثقل جداگانہ اجسام کے مرکز ثقل کا مرکز ہندسی ہوگا جبکہ ان مرکز ثقل کو جسموں کی کمیتوں کی بموجب وزنی سمجھا گیا ہو۔

**۹۰۔** مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک رقص کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو طول ل اور وزن و کے ایک تار پر جس کے ساتھ وزن و کا ایک دائری شاقول لٹکا ہوا ہے مشتمل ہے۔ فرض کرو کہ شاقول کے دائرے کا مرکز تار کے سرے سے فاصلہ  $l$  پر ہے۔

فرض کرو کہ تار  $AB$  ہے، شاقول کا مرکز  $J$  ہے اور تار کا وسطی نقطہ  $D$  ہے۔ تار کا مرکز ثقل  $D$  پر ہوگا اور شاقول کا  $J$  پر، اس لیے اس نظام کا مرکز ثقل نقطوں  $D$  اور  $J$  کے مرکز ہندسی پر ہوگا جبکہ ان نقطوں کو نسبت  $و : ل$  میں وزنی بنایا گیا ہو۔ اس مرکز ثقل کو  $ث$  سے تعبیر کیا جائے تو ضابطہ

$$لا = \frac{ل \times ج}{و + ج}$$



شکل (۶۵)

سے جبکہ خط  $AD$   $J$  کو محور  $لا$  اور  $ل$  کو مبدل فرض کیا جائے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{و \times ج + ل \times و}{و + ج}$$

$$= \frac{(1-1) + \frac{1}{4} \text{ ول}}{9}$$

## مثالیں

۱۔ ایک مربع کے تین کونوں میں سے ہر ایک پر ۳ پاؤنڈ کے وزن رکھے گئے ہیں اور چوتھے کونے پر ۵ پاؤنڈ کا ایک وزن رکھا گیا ہے۔ مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۔ متقوسہ کے ایک مربع کے ایک کونے سے ۳ انچ کنارے کا ایک مربع کاٹ لیا گیا ہے۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو اگر اول الذکر مربع کا کمٹارا ۶ انچ ہو۔

۳۔ ۶ اونس وزن اور ۶ انچ طول کے ایک پتلے ڈنڈے کو ۶ اونس وزن اور ۶ انچ نصف قطر کے ایک دائرے پر اس طرح ثبت کیا گیا ہے کہ اس کے سرے دائرے کے محیط پر ہیں۔ کل کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۴۔ بائیسکل کے ایک پمپہ کا قطر ۲۶ انچ اور وزن ۳ پاؤنڈ ہے۔ اس کے ہر آڑے کا طول ۱۱ انچ ہے اور ہر آڑا پمپہ کے مرکزی محور سے نصف انچ فاصلے ناف (Hub) سے نکلتا ہے۔ اگر ایک آڑے کو پمپہ سے جدا کر لیا جائے تو پمپہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۵۔ ایک ہتھوڑے کا دستہ لکڑی کا اسطوانہ ہے جس کا طول ۸ انچ، نصف قطر ۳ انچ، وزن ۸ اونس ہے۔ ہتھوڑے کا سرالوہ کا ایک سطوانہ ہے جس میں ایک سوراخ بنا ہوا ہے جس کے اندر دستہ ٹھیک بیٹھتا ہے۔ ہتھوڑے کے اس سرے کا طول ۳ انچ، نصف قطر ۱ انچ اور وزن ۳ پاؤنڈ ہے۔ مرکز ثقل کا تقریبی محل معلوم کرو۔

۶۔ ایک صندوق بغیر ڈھکن کے ایک انچ موٹی لکڑی سے بنایا گیا ہے۔ اس کے اندرونی ابعاد ۱۲ x ۱۲ x ۱۲ انچ ہیں اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

۷۔ طول ۲۸ انچ کے ایک یکساں پتلے ڈنڈے کو اس طریقہ سے خمایا گیا ہے کہ ۱۲ انچ اور ۱۶ انچ کے دو حصے ایک دوسرے کے علی التوا ٹھہریں۔ مرکز ثقل

معلوم کرو۔

۸۔ ایک یحسان تار کو ایک مثلث کی شکل میں خایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تار کا مرکز ثقل اس دائرے کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے جو اس مثلث کے اندر بنایا گیا ہو جو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے۔

۹۔ ایکساں کثافت کے دیوار سے شکل T کا گنیا بنایا گیا ہے، آڑے جزو کے ابعاد  $۶ \times ۲ \times \frac{1}{4}$  انچ ہیں اور کھڑے جزو کے ابعاد  $۸ \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$  انچ۔ آڑے جزو کو اس طرح تراشا گیا ہے کہ اس کی نیچے کی سطح مستوی ہے۔ کل نظام کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

۱۰۔ وزنوں و، و، و کے تین منکے ایک دائری تار میں پروئے گئے ہیں اور جب منکے دائرے کے نقطوں ا، ب، ج پر ہوتے ہیں تو کل نظام کا مرکز ثقل دائرہ کے مرکز و پر منطبق ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{و_1}{ج ب و ج} = \frac{و_2}{ج ب و ا} = \frac{و_3}{ج ب ا و}$$

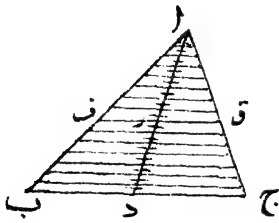
## پترے کا مرکز ثقل

۹۱۔ پتر ایتلا اور مستوی ہوتا ہے اور اس کی موٹائی اور کثافت ایکساں ہوتی ہے مثلاً ایک مقوے کی چلار سے ہم کوئی شکل کاٹ لیں۔ کسی پترے کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرنا اکثراً اہم ہوتا ہے۔

۹۲۔ مثلث کا مرکز ثقل۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج ایک مثلثی پترے

ہے جس کے مرکز ثقل کے محل کو معلوم کرنا مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ مثلث کو قاعدہ ب ج کے متوازی خطوں سے لائتھائیٹک پیٹوں کی ایک بہت بڑی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ کوئی پٹی ف ق ہے۔ چونکہ





شکل (۶۶)

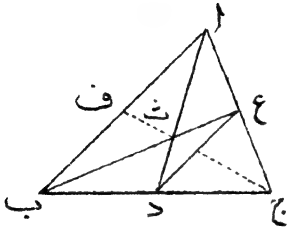
موجب فرض ہم اس پٹی کو لا آتھا  
 کم عرض اور موٹائی کی سمجھ سکتے ہیں  
 اس لیے ہم اس کو ایک پتلا  
 ایکساں ڈنڈا تصور کر سکتے ہیں۔  
 کسی پتلے ایکساں ڈنڈے کا مرکز ثقل  
 اس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے،  
 اس لیے پٹی 'ف' 'ق' کے وزن کو  
 رد عمل کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے  
 جو 'ق' کا وسطی نقطہ ہے۔

دوسری پٹیوں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جاسکتی ہے۔  
 اس لیے پورے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کے ایک نظام کے  
 اوزان جو ان پٹیوں کے وسطی نقطوں پر واقع ہوں رکھے جاسکتے ہیں۔  
 اب اگر قاعدہ 'ب ج' کا وسطی نقطہ 'د' ہو تو تمام پٹیوں کے وسطی  
 نقطے خط 'ا د' میں واقع ہوتے ہیں۔ اس لیے مثلث کے وزن کی بجائے  
 ذروں کی ایک تعداد کے اوزان ہیں جو سب کے سب خط 'ا د'  
 میں واقع ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پورے مثلث کے مرکز  
 ثقل کو خط 'ا د' میں واقع ہونا چاہئے۔

(۱۲۲) اسی طرح ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مثلث کو ضلع 'ا ج' کے متوازی  
 پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب یہ معلوم ہو گا کہ مثلث کے  
 مرکز ثقل کو خط 'ب ج' میں واقع ہونا چاہئے جہاں 'ع' ضلع 'ا ج' کا وسطی  
 نقطہ ہے۔

ان دہیتجوں سے مرکز ثقل کا محل پوری طرح متعین ہو جاتا ہے،  
 چنانچہ اس کو خطوط 'ا د'، 'ب ج' کا نقطہ تقاطع ہونا چاہئے۔  
 'د' کو ملاؤ۔ مثلثات 'د ج'، 'ع ج'، 'ب ج' (مشابہ ہیں جن سے  
 مثلث 'د ج'، 'ع ج'، مثلث 'ب ج' کے ابعاد کا عین نصف ہے۔

اس لیے د، ع، ا ب کے متوازی اور اس کا نصف ہونا چاہئے۔  
اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ د ث ا اور ا ث ب مشابہ مثلث



شکل (۶۷)

ہیں جن میں سے مثلث د ث ا ع  
مثلث ا ث ب کے باہر کا نصف

ہے۔ اس لیے د، ا ث کا  
نصف ہے۔

اس طرح د ث، ا د کو  
نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

اگر ہم ج کو ف سے ملائیں جو  
ا ب کا وسطی نقطہ ہے تو ہم

اُسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں کہ ج، ف، ا د کو نسبت ۱:۲ میں تقسیم  
کرتا ہے۔ اس لیے ج، ف کو بھی نقطہ ث میں سے گزرنا چاہئے۔

ان تین خطوں ا د، ج، ف کو جو مثلث کے راسوں  
مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطوں سے ملاتے ہیں مثلث کے خطوط وسطی

کہا جاتا ہے۔ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ یہ تین خطوط وسطی ایک ہی نقطہ ث

میں ملتے ہیں اور یہ نقطہ مثلث کا مرکز ثقل ہے۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا ہے  
کہ مرکز ثقل ہر خط وسطی کو نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے یعنی وہ خط وسطی پر

قاعدے سے اپنے کل طول کے ایک مثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۳۔ کسی کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل۔ کسی مستقیم الاضلاع  
کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل اس کو مثلثوں میں تقسیم کر کے اور ہر مثلث کی بجائے

اس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھ کر معلوم کیا جاسکتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل تین مساوی ذروں کے مرکز ثقل پر منطبق

ہوتا ہے جو اس کے راسوں پر رکھے گئے ہوں۔

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کا مرکز ثقل مرکز عمودی پر منطبق ہو تو مثلث متساوی الاضلاع ہے۔

۳۔ مقوی کے ایک مربع کو ایک وتر پر اتنا موڑا گیا ہے کہ اس کو دو حصے علی التمام ہیں۔ اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

۴۔ ایک مثلثی پترے کا رجب حصہ ایک خط سے جو قاعدے کے متوازی ہے کاٹ لیا گیا ہے۔ بقیہ حصہ کا مرکز ثقل کہاں ہے؟

۵۔ ایک پترے سے جس کی شکل متساوی الاضلاع مثلث کی ہے ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث کاٹ لیا گیا ہے جس کا قاعدہ وہی ہے جو ابتدائی مثلث کا ہے۔ شکل ۷ کے بقیہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۶۔ ایک ذواربۃ الاضلاع کا مرکز ثقل اس کے ایک وتر پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وتر دوسرے وتر کی تہیف کرتا ہے۔

## مرکز ثقل کو کل تکمل سے معلوم کرنا

۹۴۔ متغیر کثافت کے ایک ڈنڈے کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ اب ایک ڈنڈا ہے جس کا وزن فی اکائی طول نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ پر اس کا وزن فی اکائی طول  $q$  ہے۔

فرض کرو کہ  $F$ ،  $Q$  دو متصلہ نقطے ہیں جن کے فاصلے نقطہ  $A$  سے علی الترتیب  $LA$  اور  $LA'$  فرمائیں۔ اب طول  $FQ$  فرما ہے

$$b \quad \text{---} \quad c \quad \text{---} \quad 1$$

اور اس کی کمیت  $q$  فرما ہے

جہاں  $q$  سے اس نقطہ پر کی کمیت

فی اکائی طول تعبیر ہوتی ہے۔

جب  $LA$  کو  $LA'$  انتہا چھوٹا بنایا جاتا

ہے تو نقطہ  $A$  سے  $FQ$  کے مرکز ثقل کا فاصلہ  $LA$  لایا جاسکتا ہے۔ پس

شکل (۶۸)

اگر لآ سے وہ فاصلہ تعبیر ہو جو (سے پورے ڈنڈے کے مرکز ثقل کا ہے تو

$$\frac{\Sigma (ک لا)}{\Sigma ک} = \bar{لا}$$

جہاں ک کسی عنصر کی مثلاً ف ق کی کیت ہے اور حاصل جمع ان تمام ذروں کے لیے معلوم کیا گیا ہے جن سے ڈنڈا بنا ہے۔ نہ فرلا رکھنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{\Sigma (نہ لا فرلا)}{\Sigma (نہ فرلا)} = \bar{لا}$$

یا تکملی احصاء کی تقسیم میں

$$\bar{لا} = \frac{ک می نہ لا فرلا}{ک می نہ فرلا} \dots \dots \dots (۲۸)$$

جہاں تکمیل ہر صورت میں پورے ڈنڈے پر لیا جاتا ہے۔ متغیر نہ، لا کا ایک تفاعل ہو گا اور تکمیل کی تکمیل نہیں ہو سکتی جب تک کہ اس تفاعل کی ٹھیک شکل معلوم نہ ہو۔

۹۵۔ ایک خاص مثال لو اور فرض کرو کہ کثافت ایک سرے سے دوسرے سرے تک ایکساں طور پر بڑھتی ہے۔ فرض کرو کہ (۱) کثافت صفر ہے اور ب پر ث۔ اگر ڈنڈے کا طول (۱) ہو تو (۱) سے فاصلہ لا پر کثافت ث (لا) ہوگی۔ اس لیے ہمیں ضابطہ (۲۸) میں رکھنا چاہئے (۱۲۴)

$$\text{نہ ث} = \left( \frac{لا}{۱} \right)$$

اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{L} = \frac{M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{L}$$

$$M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)$$

جہاں تک  $L = 0$  سے  $L = 1$  تک ہے۔ نسب نما اور شمار کنندہ کو  $\frac{1}{L}$  سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{L} = \frac{M \cdot L}{L}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز ثقل ڈنڈے پر ابتدائی سرے سے ایک طول کے دو مثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۶۔ ہم اس نتیجے کو مثلث کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

۹۷۔ حسب دفعہ ۹۲ ہم مثلث کو متوازی بیٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور

ہر بیٹی کی بجائے اس کے وسطی نقطہ پر ایک ذرہ رکھتے ہیں ہر ذرہ کا وزن

اس بیٹی کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے جس کی جگہ پر اس کو رکھا گیا

ہے اور وہ بیٹی کے عرض اور طول کے متناسب ہونا چاہئے۔ اگر کسی

ذرہ کا فاصلہ  $L$  سے خط وسطی  $L/2$  پر پیمائش کردہ  $L$  ہو تو بیٹی کا عرض  $L/2$

کے متناسب ہے جو وہ طول ہے جو خط وسطی پر منقطع ہوتا ہے، اور بیٹی کا

طول  $L$  کے متناسب ہے جو ضلع  $L$  سے فاصلہ ہے۔ اس طرح  $L/2$

(۱۲۵)

کو صرف  $L/2$  کے متناسب ہونا چاہئے اور جیسا کہ ہم ابھی معلوم کر چکے

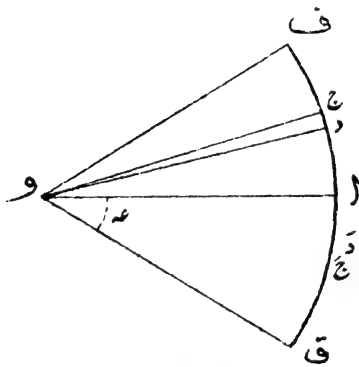
ہیں اس سے حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{L} = \frac{1}{2}$$

جہاں  $\Delta$  خط وسطی کا طول ہے۔ یہ ٹھیک وہی نتیجہ ہے جو پہلے حاصل ہوا تھا۔

۹۷۔ دائری قوس کا مرکز ثقل۔ اسی طریقہ کو ایک تار کا

مرکز ثقل معلوم کرنے میں جو ایک دائری قوس  $ف ق$  کی شکل میں نمایا گیا ہے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز  $و$  ہے اور قوس کا وسطی نقطہ  $ا$  ہے اور فرض کرو کہ پوری قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ  $۲$  عمہ بنتا ہے۔ تار کے نصف حصے  $ف ا$  کے ایک چھوٹے



شکل (۶۹)

عنصر  $ج$  دہرے ہو کر  $و$  فرض کرو کہ زاویہ  $دو ا$  طہ ہے اور زاویہ  $ج و ا$  طہ + فرطہ ہے اور اسلئے اس عنصر کے محاذی مرکز پر زاویہ فرطہ بنتا ہے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر  $\Delta$  ہو تو اس عنصر کا طول  $\Delta$  فرطہ ہے اس لئے اگر تار کی کمیت فی اکائی طول  $و$  ہو تو اس عنصر کی کمیت  $\Delta$  فرطہ ہوگی۔ یہ اور اس کے مشابہ عنصر  $ج د$  جو تار

کے دوسرے نصف حصے میں ہے ملکر مساوی ذروں کا ایک زوج بناتے ہیں جن کا فاصلہ مرکزی خط  $و ا$  سے مساوی ہے۔ ان کی بجائے کمیت  $۲$   $\Delta$  فرطہ کا ایک واحد ذرہ ان کے مرکز ثقل پر رکھا جاسکتا ہے۔ یہ مرکز ثقل خط  $و ا$  میں اس نقطہ پر ہے جس پر ان دو عنصروں کو ملائیوا لا خط  $و ا$  کو قطع کرتا ہے۔ اس لیے اس مرکز ثقل کا فاصلہ  $و$  سے  $\Delta$  جم طہ ہے۔ اس کو لایے اور کمیت  $۲$   $\Delta$  فرطہ کو  $ک$  سے تعبیر کرنے سے پورے تار کے مرکز ثقل کا فاصلہ  $(و سے)$   $\Delta$  حسب ذیل مساوات سے حاصل

ہوتا ہے

$$\frac{\Sigma (ک لا)}{\Sigma (ک)} = \bar{لا}$$

$$= \frac{\text{کل حجم طہ (۲ و ۱ فرطہ)}}{\text{کل ۲ و ۱ فرطہ}}$$

(۱۲۶) جہاں تکمل طہ =۔۔ سے طہ = عہ تک ہے۔ مختصر کرنے سے

$$\bar{لا} = \frac{\text{ا ک طہ =۔۔ جم طہ فرطہ}}{\text{کل طہ =۔۔ فرطہ}}$$

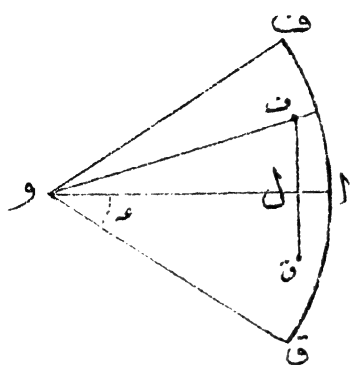
$$(۲۹) \dots\dots\dots = \frac{\text{ا جب عہ}}{\dots\dots\dots}$$

اس سے مرکز ثقل کا محل معلوم ہوتا ہے۔

جب عہ بہت چھوٹا ہو تو جب عہ اور عہ مساوی ہوتے ہیں اور اس لیے عہ کی بہت چھوٹی قیمتوں کے لیے ضابطہ (۲۹)  $\bar{لا} = ۱$  میں تحول ہوتا ہے جیسا کہ ہونا چاہئے۔ اس سے صرف یہ واضح ہوتا ہے کہ قوس کا انحنا ویسے جیسے گھٹنا ہے مرکز ثقل قوس کے وسطی نقطہ کے قریب اور قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ بالآخر جب عہ =۔۔ تو قوس ایک سیدھا ڈنڈا بن جاتی ہے اور مرکز ثقل ٹھیک اس کے وسطی نقطہ پر حاصل ہوتا ہے۔ اس قوس کے لیے جو ایک نیم دائرے میں خالی گہنی ہو ہم عہ =  $\frac{\pi}{۲}$  لیتے ہیں کچنا پنچہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\frac{\pi}{۲} \text{ ا جب عہ}}{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱۲}{\pi} = ۳.۶۳۶۶ = ۱ + ۰.۶۳۶۶$$

۹۸ — دائری قوس ق کا مرکز ثقل بمثلی احصاء کے استعمال کے بغیر ایک دلچسپ طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔



تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ قوس  
 اف کا مرکز ثقل اس نصف قطر میں  
 واقع ہونا چاہیے جو زاویہ او ف  
 کی تقصیف کرتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ مرکز  
 ثقل ف ہے اور فرض کرو کہ قوس  
 ابق کا مرکز ثقل ق ہے۔ اب پورے  
 قوس ف ق کا مرکز ثقل ف ق کا  
 نقطہ وسطی ل ہونا چاہیئے۔

اب چونکہ زاویہ فول ہے اس لیے

شکل (۷۰)

ول = وف بم  $\frac{1}{4}$  نع

(۱۲۷) اس رشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

(قوس ۲ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

جَمْ =  $\frac{M}{4} \times$  (قوس عم کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اسی طرح

(قوس ع کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$= \text{جم} \frac{e}{p} \times \left( \frac{e}{p} \right) \text{کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے}$$

او علیٰ ہذا بقیاس۔ اس طریقہ پر عمل جاری رکھ کر اور اندراج کر کے ہم حاصل کرتے ہیں  
(توس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$\frac{1}{1+0.2} \times \dots \times \frac{1}{1+0.2} = \frac{1}{1+0.2}$$

x (قوس  $\frac{عم}{ہن}$  کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اگر ہم ن کو بہت بڑالیں تو  $\frac{1}{n}$  کی قیمت صفر ہوتی ہے۔ اس لئے

قوس  $\frac{e}{p}$  کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے 1 کے مساوی ہو جاتا ہے جو دائرہ کا



نصف قطر ہے۔ پس ن کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے  
(قوس ۲ عہ کے مرکز نقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$= ۱ = \text{جم } \frac{\text{عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ}}{۴} \text{ جم } \frac{\text{عہ}}{۸} \dots \dots \dots \infty \text{ تک}$$

$$\text{اب } \text{جم } \frac{\text{عہ}}{۲} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ } ۲ \text{ جب } \frac{\text{عہ}}{۲}}$$

$$\text{جم } \frac{\text{عہ}}{۴} = \frac{\text{عہ } ۲ \text{ جب } \frac{\text{عہ}}{۲}}{\text{عہ } ۴ \text{ جب } \frac{\text{عہ}}{۴}} \text{ وغیرہ}$$

$$\text{اس لیے } \text{جم } \frac{\text{عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ}}{۴} \text{ جم } \frac{\text{عہ}}{۸} \dots \dots \text{جم } \frac{\text{عہ}}{۲^n} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ } ۲^n \text{ جب } \frac{\text{عہ}}{۲^n}}$$

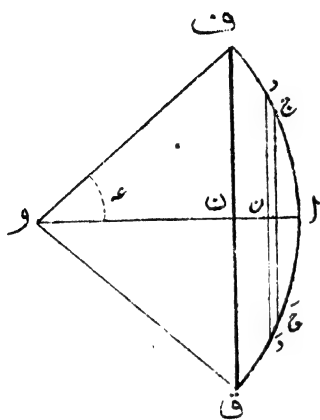
ن کو لامتناہی بنانے سے جب  $\frac{\text{عہ}}{۲^n}$  کی قیمت  $\frac{\text{عہ}}{۲^n}$  کے مائل ہو جاتی ہے،  
اس لیے  $۲^n \text{ جب } \frac{\text{عہ}}{۲^n}$  عہ کے مائل ہو جاتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } \frac{\text{عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ}}{۴} \text{ جم } \frac{\text{عہ}}{۸} \dots \dots \infty \text{ تک} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$$

اس لئے قوس ۲ عہ کے مرکز نقل کا فاصلہ مرکز سے  $۱ = \frac{\text{عہ}}{\text{عہ}}$  ہے جو محصلہ نتیجہ کے مطابق ہے۔

۹۹۔ قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل۔ فرض کرو کہ ہم ایک دائرہ کے (۱۲۸)

قطعہ خاف ا ق ن کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو دو طرف ن ق سے جس کے محاذی مرکز و پیرزاویہ ۲ عہ بنتا ہے کٹتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پورے قطعہ کو اس وتر کے متوازی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور فرض کرو کہ شکل ۱۷ میں نمونے کی ایک پٹی ج ج د د ہے جو وتروں ج ج اور د د سے محدود ہے فرض کرو کہ زاویہ ج و (ط ہے اور زاویہ د و ا، ط + قرط ہے۔ اب پٹی کا



شکل (۱۷)

عرض ج د جب ط یا ا جب ط فرط  
ہے اور اس کا طول ۲ ن یا ۲ ا جب ط  
ہے۔ اس لئے رقبہ ۲ ا جب ط فرط  
ہے۔ اس کی کمیت پوری کی پوری  
ن پر مرکز سمجھی جا سکتی ہے جہاں  
ن کا فاصلہ مرکز و سے اجم ط ہے۔

اس طرح اگر پورے قطعہ کے  
مرکز ثقل کا فاصلہ و سے لا ہو تو  
لا =  $\frac{ن (اجم ط) (۲ ا جب ط فرط)}$

جہاں تکل کو ط = سے ط = ع تک  
لینا چاہئے۔ مختصر کرنے سے

$$\frac{ن جب ط اجم ط فرط}{ن جب ط اجم ط فرط} لا = ۱$$

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{۳} جب ط ع}{\frac{۱}{۳} (ع - جب ط ع)}$$

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{۳} جب ط ع}{۱ - \frac{۱}{۳} جب ط ع}$$

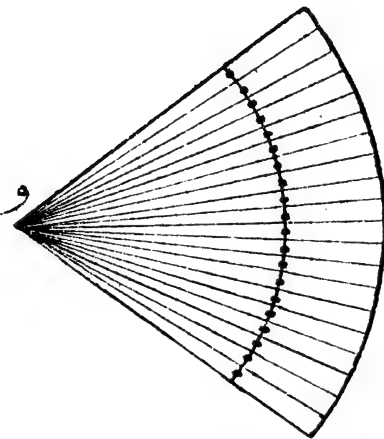
ع =  $\frac{۲}{۳}$  رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک نیم دائرہ کا مرکز ثقل مرکز سے  
فاصلہ  $\frac{۲}{۳}$  پر ہوتا ہے۔

(۲۹)

۱۰۰۔ قطاع دائرہ کا مرکز ثقل۔

قطاع دائرہ کے مرکز ثقل کو اس طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ  
قطاع دائرہ کو ایک مثلث اور ایک قطعہ دائرہ سے بتا ہوا سمجھا جائے۔

اب چونکہ مثلث کا مرکز ثقل اور قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل معلوم کئے جاسکتے ہیں اس لئے پوری شکل کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے۔

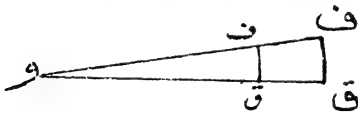


شکل (۷۲)

اس سے سادہ طریقہ حسیل ہے۔ ہم قطاع دائرہ کو نصف قطروں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ بہت تنگ مثلثوں کی ایک بڑی تعداد میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ ہر مثلث کے وزن کی بجائے اس کے مرکز ثقل ایک ذرہ رکھا جاسکتا ہے جس کا وزن مثلث کے وزن کے مساوی ہو۔ اب انتہا میں جبکہ مثلث صغیر عرض کے ہو جاتے ہیں ہر ایک کا مرکز ثقل اس کے

خط وسطیٰ پر دائرہ کے مرکز سے  $\frac{2}{3}$  فاصلہ پر ہوگا جہاں  $\frac{1}{3}$  دائرہ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے تمام ذرے  $\frac{2}{3}$  نصف قطر کے ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

کسی ذرہ کا وزن اس مثلث و ف ق کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے جس کی بجائے اس کو رکھا گیا ہے۔ اس لیے اس کو مثلث کے قاعدہ و ف ق کے متناسب ہونا چاہئے اور پھر یہ و ف ق کے متناسب ہے جو نصف قطر  $\frac{1}{2}$  کے دائرہ کا ایک ٹکڑا ہے جو مثلث کے اندر ہے۔ اس طرح اس ذرہ کا وزن جس کو اس دائرہ کے چھوٹے ٹکڑے و ف ق میں رکھنا ہے طول و ف ق کے متناسب ہے۔ انتہا لینے اور مثلثوں کی تعداد کو لامتناہی بنانے سے



شکل (۷۳)

کے دائرہ کا ایک ٹکڑا ہے جو مثلث کے اندر ہے۔ اس طرح اس ذرہ کا وزن جس کو اس دائرہ کے چھوٹے ٹکڑے و ف ق میں رکھنا ہے طول و ف ق کے متناسب ہے۔ انتہا لینے اور مثلثوں کی تعداد کو لامتناہی بنانے سے

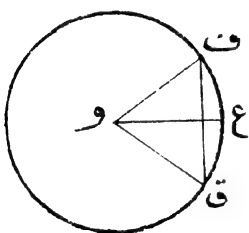
(۱۳۰)

ہم معلوم کرتے ہیں کہ ذروں کی اس بڑی کی بجائے ایکساں کثافت کا ایک تار رکھا جا سکتا ہے۔ ایسے تار کا مرکز ثقل پہلے معلوم کیا جا چکا ہے۔ اگر تار کا زاویہ ۲۰ عہ ہو تو مرکز ثقل اس نصف قطر پر جو تار کے وسطی نقطہ میں سے گذرتا ہے مرکز سے فاصلہ  $\frac{2}{3}$  ل جب عہ پر واقع ہے۔

اس طرح نصف قطر ل اور زاویہ ۲۰ عہ کے ابتدائی قطاع دائرہ کا مرکز ثقل قطاع دائرہ کے مرکزی محور پر مرکز سے فاصلہ  $\frac{2}{3}$  ل جب عہ پر واقع ہے۔

۱۰۱۔ کروئی ٹوپی کا مرکز ثقل۔ وہ ٹکڑا جس کو ایک کروئی خول

سے ایک مستوی کے ذریعہ کاٹ لیا جائے کروئی ٹوپی کہلاتا ہے۔  
کروئی ٹوپی کا مرکز ثقل جس کو ایک ایکساں کروئی خول سے کاٹ لیا گیا ہو ان طریقوں سے جو قبل ازیں سمجھائے جا چکے ہیں بہت آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔



شکل (۷۴)

فرض کرو کہ ف ق کروئی ٹوپی ہے اور و اس کرہ کا مرکز ہے جس سے یہ ٹوپی کاٹی گئی ہے۔ فرض کرو کہ و ع وہ نصف قطر ہے جو مستوی ف ق پر جس سے ٹوپی محدود ہے عمود ہے اور فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ل ہے۔

کوئی مستوی جو ف ق کے متوازی ہے کرہ کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ع پر واقع ہو گا قطع کریگا۔ اس لیے ف ق کے متوازی مستویوں کی ایک بڑی تعداد لینے سے ہم کروئی ٹوپی کو تنگ دائری ملقوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا مرکز و ع پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ہم

ایک واحد حلقہ پر جو ستویں 'ا' و 'ب' سے منقطع ہوا ہے  
غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ زائدے

١٥٤٠ ب و ع على الترتيب

طہ اور طہ + قرطہ کے مساوی ہیں

اس لیے حلقہ کے محاذی مرکز پر

زاویہ فرطہ بنتا ہے۔ حلقہ کا عرض

اب، لفرطہ ہے۔ اس کے

محیط کو انتہا میں دائرہ اور ا کے

محیط کے مساوی فرض کیا جاسکتا

ہے۔ چونکہ  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  جب ط

اس لیے یہ محیط  $\pi_2 = 1$  جب ط

اس لیے زیر بحث حلقہ کو طول  $\pi r$  جب طہ اور عرض  $r$  فرطہ کی ایک (۱۳۱)

تنگ پٹی سمجھا جاسکتا ہے۔ اس لیے اس کا رقبہ  $\pi r$  واجب طہ فرط ہے۔

جب فرطہ کو بہت چھوٹا بنایا جاتا ہے تو قوس ب (ا) کو طول اور ط

کا ایک خط سیفم خیال کیا جاسکتا ہے جو وع کے ساتھ تراویہ  $\frac{7}{4}$  - طہ یثلام

ہے۔ اس طرح او ع پر ب ا کے ظل ب ا کا طول و فرقہ حجم  $(\frac{7}{4} - \frac{1}{4})$  (ط)

یا واجب طہ فرط ہے۔ حلقہ باب ۱ کا رقبہ اب حسب دلیل حاصل ہوتا ہے

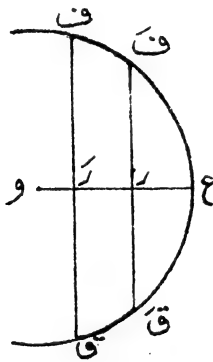
۲۲۱ جب ط مرط

یا

اسی طرح ہر چھوٹے ملقہ کی بجائے ڈنڈے کا متناظر عنصر رکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح پوری ٹوپی کی بجائے ڈنڈے کے طول روع کو رکھا جاسکتا ہے (شکل ۷۴) جو مادی مستوی ف ق اور کرہ کے درمیان قطع ہوتا ہے۔ چونکہ ڈنڈا یکساں ہے ڈنڈے کے حصہ روع کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہے۔ اس لیے یہ نقطہ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل ہے۔

۱۰۲۔ ایک پیٹی کا مرکز ثقل جو ایک کروی خول سے دو

متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹی گئی ہو۔ اسی طریقہ سے ہم اُس پیٹی کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں جو ایک یکساں کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹی گئی ہو۔ شکل ۷۶ میں فرض کرو کہ ف ق ف ق



شکل (۷۶)

دو مستوی ہیں۔ اب ہم ف ق کے متوازی مستویوں سے پیٹی کو تنگ حلقوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

ہر حلقہ کی بجائے حسب سابق ایک ایکساں ڈنڈے کے متناظر عنصر کو محور و ع پر رکھا جاسکتا ہے اور اس لیے پوری پیٹی کی بجائے اس ڈنڈے کے حصہ روع کو

رکھا جاسکتا ہے جو وہ حصہ ہے جو دو مستویوں ف ق اور ف ق

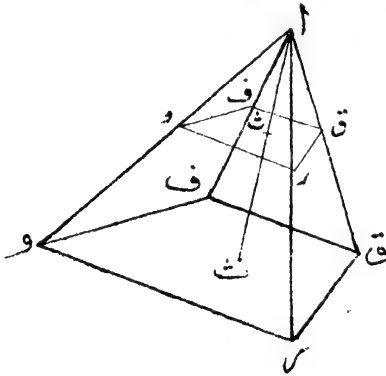
کے درمیان متقطع ہوتا ہے۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل روع کا وسطی نقطہ ہے۔

ایک ٹھوس جسم کا مرکز ثقل

۱۰۳۔ مستوی قاعدے کے ایک مخروط مضلع کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ ایک مخروط مصلع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ وفاق کوئی مستوی شکل ہے اور اس کا اس  $\Delta$  ہے۔ ہم کسی تیناس مخروط مصلع کے مرکز ثقل کو معلوم کرنے کے لیے اس کو اس کے قاعدے کے متوازی مستویوں کے ایک سلسلے کے ذریعہ پتیلے طبقوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایسا کوئی متوازی طبقہ وفاق رہے، اس طبقہ کے متعلق یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ لا انتہا پتلا پتر ہے۔ فرض کرو کہ ایک ایکساں پترے کا مرکز ثقل جو قاعدہ وفاق کا پرطبق ہوتا ہے ث ہے



شکل (۷۷)

اور فرض کرو کہ  $\Delta$  پترے وفاق سے  $\Delta$  پر ملتا ہے۔

اب متشابه اشکال کے علم مہندسہ سے یہ ظاہر ہے کہ پترے

وفاق میں  $\Delta$  ایک ایسا

محل اختیار کرتا ہے جو ٹھیک

طور پر اس محل کے متناظر ہے

جو پترے وفاق میں

نقطہ  $\Delta$  کا ہے۔ اس لیے پترے

وفاق کا مرکز ثقل  $\Delta$  ہے

اور اس لیے اس پترے کی کمیت کی بجائے  $\Delta$  پر ایک واحد ذرہ کی کمیت

رکھی جاسکتی ہے۔

اسی طرح سے مخروط مصلع

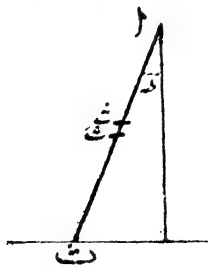
کو جتنے پتروں میں تقسیم کیا گیا ہے

ان میں سے ہر ایک کی بجائے

ایک واحد ذرہ اس نقطہ پر رکھا

جاسکتا ہے جس پر یہ پترہ  $\Delta$  ث

کو قطع کرتا ہے۔ اس طرح پورے



شکل (۷۸)

مخروط مضلع کی بجائے یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ ذروں کا ایک سلسلہ خط  
ا ث پر رکھا گیا ہے۔ یہ ذرے متغیر کثافت کا ایک ڈنڈا بناتے ہیں۔  
اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس ڈنڈے کے مرکز ثقل پر منطبق ہوگا۔  
اب ڈنڈے کا مرکز ثقل اس طریقہ سے جس کی صراحت دفعہ ۹ میں  
کی جا چکی ہے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس پترے پر غور کرو جو متصلہ متوازی  
پتروں کے درمیان واقع ہے جبکہ یہ پترے خط ا ث کو علی الترتیب ث ث  
پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ا ث = لا اور ا ث = لا + فرلا چنانچہ  
یہ پترہ خط ا ث پر طول فرلا قطع کرتا ہے۔

(۱۳۳)

فرض کرو کہ ا ث اور اس عمود کے درمیان جو ا سے پترے کے  
قاعدے پر کھینچا گیا ہے زاویہ طہ بنتا ہے۔ اس لیے پترے کی موٹائی  
= ث ث جم طہ = فرلا جم طہ  
اگر مخروط مضلع کے قاعدہ کا رقبہ س ہو تو زیر بحث پترے کا رقبہ

$$= \frac{لا^۲}{۲ ا ث س}$$

کیونکہ مختلف پتروں کے رقبے اُن کے خطی ابعاد کے مربعوں کے متناسب  
ہیں۔ اس لیے زیر غور پترے کا جم

$$= \frac{لا^۲}{۲ ا ث س} \times س فرلا جم طہ$$

اگر اس پترے کی بجائے ایک ذرہ رکھا جائے جو ڈنڈے ا ث  
کے طول فرلا پر ہو تو ڈنڈے کی کثافت نہ ہونی چاہئے

$$= لا^۲ \times \frac{س جم طہ}{۲ ا ث}$$

اس طرح ڈنڈا ا ث ایسی کثافت کا ہونا چاہئے جو سیرے (۱)  
سے فاصلہ (لا) کے مربع کے متناسب ہے۔

اب دفعہ ۹۲ کے ضابطہ کی رو سے اس ڈنڈے کے مرکز ثقل کا



فاصلہ (لا) نقطہ ۱ سے حسب ذیل ہے:

$$\frac{\text{لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3}{\text{لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3} = \text{لا}$$

$$\frac{\text{لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3}{\text{لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3} =$$

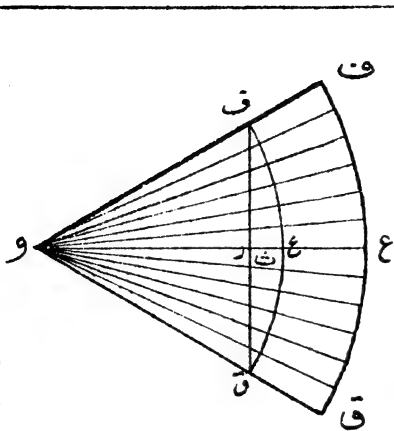
$$\frac{\frac{1}{3} \text{ لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3}{\frac{1}{3} \text{ لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3} =$$

$$\frac{3}{3} \text{ لا}^1 \text{ لا}^2 \text{ لا}^3 =$$

اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل 'ا' میں نقطہ ۱ سے 'ا' کے طول کے تین چوتھائی فاصلہ پر ہے۔

۱۰۴۔ ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل۔ اب ہم ایک کرہ کے

قطاع کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں یعنی اس حجم کا جو ایک ٹھوس کرہ میں سے قائم مستدیر مخروط سے جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو قطع کر لیا گیا ہو۔ اس مقصد کے لیے ہم قطاع کے قاعدہ 'ف' کے رقبہ کو بہت چھوٹے چھوٹے عضروں میں تقسیم کرتے ہیں اور اس طرح رقبہ کے ان عضروں کو قاعدے مان کر اور ان کو مشترک راس 'و' سے ملا کر قطاع کے حجم کو بہت چھوٹی عمودی تراش کے متعدد مخروط مضلع میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ سب مخروط مضلع ایک ہی ارتفاع کے ہیں اور اس لیے ان کی کمیتیں ان کے قاعدوں کے متناسب ہیں۔ ہر مخروط مضلع کا مرکز ثقل 'و' سے اس فاصلہ کے تین چوتھائی پر واقع ہے جو 'و' اور اس مخروط مضلع کے قاعدہ کے درمیان ہے اور اس لیے 'و' سے ایک ایسے فاصلہ پر واقع ہے جو کرہ کے نصف قطر کے تین چوتھائی کے برابر ہے۔ پس اگر ہم ایک اور



شکل (۹۹)

واقع ہوں گے اور ان سے کروی ٹوپی ف ع ق بنے گی (دیکھو دفعہ ۹۹) ہر مخروط مضلع کی کمیت قاعدے کے متناسب ہے اور نیز کروی خول ف ع ق کے اس حصہ کے متناسب ہے جو مخروط مضلع سے منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے کروی خول ف ع ق جسکو اصلی حجم کی بجائے لینا ہے یکساں کثافت کا ہونا چاہئے۔

اب کرہ کے قطاع و ف ق کی بجائے یکساں کروی خول ف ق ہے اور اس کروی خول کا مرکز ثقل ٹا معلوم ہے جو شکل (۹۹) میں ر ع کا وسطی نقطہ ہے۔ اس لئے یہ نقطہ ٹا مطلوبہ مرکز ثقل ہے۔ اگر مخروط کا انتصابی زاویہ جس سے قطاع محدود ہے ۲ ع ہو اور کرہ کا نصف قطر ۱ ہو تو

$$و ع = \frac{3}{4} \text{ اور } \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ و جم ع}$$

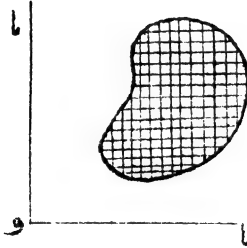
اس لیے و ٹا =  $\frac{3}{4} (1 + \text{جم ع})$  مخصوص صورت میں اگر ع =  $\frac{3}{4}$  تو قطاع نیم کرہ ہو جاتا ہے اور و ٹا =  $\frac{3}{8}$

(۱۳۵)

اس طرح نیم کرہ کا مرکز ثقل اُس نصف قطر پر جو اس کے قاعدہ پر عمود ہے مرکز سے نصف قطر کے  $\frac{1}{2}$  فاصلہ پر واقع ہوتا ہے۔

**اُن قزموں اور گروہوں کے مرکز ثقل جو راست تکمیل سے حاصل ہوں**

۱۰۵۔ پترے کا مرکز ثقل۔ کسی شکل کے پترے کا مرکز ثقل تکمیل کے ذریعہ معلوم کرنے میں ہم پترے کے مستوی میں محوروں ولا، واما کا کوئی سہولت بخش جٹ لیتے ہیں اور یہ خیال کرتے ہیں کہ پترہ خطوں کے دو سلسلوں سے جن میں سے ایک محور ولا کے متوازی اور دوسرا محور واما کے متوازی ہے چھوٹے عناصر میں منقسم ہے۔



شکل (۸۰)

اُس چھوٹے مستطیلی عنصر  $\Delta$  غور کرو جس میں لا کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو واما کے متوازی ہیں لا اور لا + فرلا ہیں اور ما کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو ولا کے متوازی ہیں ما اور ما + فرما ہیں۔

اس عنصر کا رقبہ فرلا فرما ہے اور اس لئے اگر اس نقطہ پر پترے کے فی کائی رقبہ کی کمیت نہ ہو تو اس عنصر کی کمیت نہ فرلا فرما ہوگی۔ مزید بریں جب فرلا، فرما کو لا آہٹا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو آہٹا میں اس کمیت کو ایک ذرہ سمجھا جاسکتا ہے۔ ایسے پترے کی کل کمیت کو متعدد ذروں کی قیمتیں سمجھا جاسکتا ہے۔

دفعہ ۸۶ میں ہم نے ذروں کے مرکز ثقل کے لیے حسب ذیل ضابطے (۱۳۶) حاصل کئے تھے:

$$\bar{لا} = \frac{\sum لا}{\sum ک} ، \bar{ما} = \frac{\sum ما}{\sum ک}$$

موجودہ صورت میں یہ ضابطے ہو جاتے ہیں

$$\bar{L} = \frac{M_1 \text{ شہ لا فرلا فرما}}{M_1 \text{ شہ فرلا فرما}}, \bar{M} = \frac{M_1 \text{ شہ ما فرلا فرما}}{M_1 \text{ شہ فرلا فرما}} \quad (۳۰)$$

علامت جمع  $\Sigma$  کی بجائے تکمل کی علامتیں ہیں اور تکمل کو پترے کے پورے رقبہ پر لیتا ہوگا۔

اگر پترایکساں ہے تو شہ کی قیمت مستقل ہے اور اس لیے

$M_1 \text{ شہ لا فرلا فرما} = M_1 \text{ شہ لا فرلا فرما}$   
 اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے مندرجہ بالا ضابطوں کو شہ پر تقسیم کرنے سے  
 یہ ضابطے حسب ذیل ضابطوں میں تحویل ہوتے ہیں:

$$\bar{L} = \frac{M_1 \text{ لا فرلا فرما}}{M_1 \text{ فرلا فرما}}, \bar{M} = \frac{M_1 \text{ ما فرلا فرما}}{M_1 \text{ فرلا فرما}}$$

۱۰۶۔ ٹھوس جسم کا مرکز ثقل۔ کسی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل معلوم

کرنے میں ہم جسم کو مستویوں کے تین نظاموں کے ذریعہ جو محدودوں کے  
 تین مستویوں کے متوازی ہوں چھوٹے ٹھوس عناصر میں تقسیم کرتے ہیں۔  
 تب کسی چھوٹے عنصر کا حجم فرلا فرما فری ہوگا۔ پس دفعہ ۸۶ کے ضابطوں  
 سے جسم کے مرکز ثقل کے محدد حسب ذیل شکل میں حاصل ہوتے ہیں:

$$\bar{L} = \frac{M_1 \text{ شہ لا فرلا فرما فری}}{M_1 \text{ شہ فرلا فرما فری}}, \bar{M} = \frac{M_1 \text{ شہ ما فرلا فرما فری}}{M_1 \text{ شہ فرلا فرما فری}}$$

$$\bar{Y} = \frac{M_1 \text{ شہ ی فرلا فرما فری}}{M_1 \text{ شہ فرلا فرما فری}}, \quad (۳۱)$$

(۱۳۷)

اگر جسم تباہ ہے تو نہ مستقل ہے اور ضوابط ہو جاتے ہیں

$$\frac{\text{مکئی کی لا فرلا فرما فری}}{\text{مکئی کی لا فرلا فرما فری}} = \frac{\text{مکئی کی لا فرلا فرما فری}}{\text{مکئی کی لا فرلا فرما فری}} ، \text{ وغیرہ}$$

۱۰۷۔ قطبی محدودوں کا استعمال۔ تکمیل کے ذریعہ مرکز ثقل معلوم

کرنے میں محدودوں کا کوئی اور نظام استعمال کیا جاسکتا ہے۔ کارٹیزی محدودوں کے علاوہ جو محدود اس مقصد کے لیے زیادہ مفید ہیں وہ صرف قطبی محدود ہیں۔

کسی پیرے کے مرکز ثقل کو قطبی محدودوں میں یہ فرض کر کے معلوم کیا جاسکتا ہے کہ کارٹیزی محدودوں لا، ما اور قطبی محدودوں ر، طہ میں حسب ذیل روابط موجود ہیں:

لا = رجم طہ ، ما = رجب طہ  
پس ان اندراجات سے ضوابط (۳۰) ہو جاتے ہیں

$$\frac{\text{مکئی شہ (رجم طہ) (رفر فرطہ)}}{\text{مکئی شہ (رفر فرطہ)}} = \text{رجم طہ}$$

$$\frac{\text{مکئی شہ رجم طہ فر فرطہ}}{\text{مکئی شہ رفر فرطہ}} =$$

$$\frac{\text{مکئی شہ (رجب طہ) (رفر فرطہ)}}{\text{مکئی شہ (رفر فرطہ)}} = \text{رجب طہ}$$

$$\frac{\text{مکئی شہ رجب طہ فر فرطہ}}{\text{مکئی شہ رفر فرطہ}} =$$

جن میں  $\bar{r}$ ،  $\bar{r}^2$ ، مرکز ثقل کے قطبی محدود ہیں۔ ان مساواتوں کی منتظر  
طرفوں کو تقسیم کرنے سے مساوات

$$\frac{\text{مکئی شہ راجب طہ فر فرطہ}}{\text{مکئی شہ راجم طہ فر فرطہ}} = \text{مس طہ}$$

حاصل کیجا سکتی ہے جس سے صرف محدود طہ معلوم ہو سکتا ہے۔  
اسی طرح ہم کسی ٹھوس جسم کے مرکز ثقل کو قطبی محدودوں میں یہ فرض  
کر کے معلوم کر سکتے ہیں کہ کارٹیزی محدودوں لا، ما، ی اور قطبی محدودوں رطہ، فہ  
میں حسب ذیل روابط موجود ہیں:

لا = راجب طہ جم فہ، ما = راجب طہ جب فہ، ی = رجم طہ  
اسی استعمالہ کو عمل میں لانے سے ضوابط (۳۱) میں سے پہلا ضابطہ  
ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{مکئی شہ راجب طہ جم فہ} (\text{راجب طہ فر فرطہ فر فہ})}{\text{مکئی شہ راجب طہ فر فرطہ فر فہ}} = \text{راجب طہ جم فہ}$$

$$\frac{\text{مکئی شہ راجب طہ جم فہ فر فرطہ فر فہ}}{\text{مکئی شہ راجب طہ فر فرطہ فر فہ}} = \dots (۳۲)$$

اسی طرح باقی دو ضابطے ہو جاتے ہیں:

$$\frac{\text{مکئی شہ راجب طہ جب فہ فر فرطہ فر فہ}}{\text{مکئی شہ راجب طہ فر فرطہ فر فہ}} = \text{راجب طہ جب فہ} \dots (۳۳)$$

$$\frac{\text{مکئی شہ راجب طہ جم فہ فر فرطہ فر فہ}}{\text{مکئی شہ راجب طہ فر فرطہ فر فہ}} = \text{رجم طہ} \dots (۳۴)$$

۱۰۸۔ ٹھیک اسی کے مشابہ طریقہ سے محدودوں کے کسی اور نظام میں مرکز ثقل کے محل کے محدودوں کے لیے ضابطے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ کسی جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے کے لیے وہ طریقہ کافی ہیں جنکی تفہیم اوپر کی گئی ہے، نیز ان طریقوں کو ملا کر بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم ایک ہی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل تین مختلف طریقوں سے معلوم کریں گے۔

## توضیحی مثال

(۳۹)

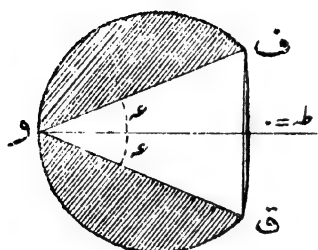
ایک قائم مستدیر مخروط و ف ق کو ایک ٹھوس متجانس کرہ سے کوئڈ کر نکالا گیا ہے مخروط کا راس و، کرہ کی سطح پر اور اس کا محور کرہ کا ایک قطر تھا۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

طریقہ (۱)۔ قطبی محدود۔ فرض کرو کہ اول ہم قطبی محدود استعمال کرتے ہیں۔ مخروط کے راس و کو مبدأ قرار دو اور مخروط کے محور کو ابتدائی خط۔ اگر مخروط کا نیم اتصالی زاویہ  $\theta$  ہے تو مخروط کی مسادات  $\tau = \theta$  ہے۔ اگر کرہ کا نصف قطر  $R$  ہے تو کرہ کی مسادات  $r = R$  حجم  $\tau$  ہے۔ مرکز ثقل، تشکل کی وجہ سے محور  $\tau = 0$  پر واقع ہونا چاہئے، اس لئے  $\tau = 0$  اور مسادات (۳۴) ہو جاتی ہے

$$\tau = \frac{\text{مکمل کثرتہ راجب طہ حجم طہ فر فرطہ فرطہ}}{\text{مکمل کثرتہ راجب طہ فر فرطہ فرطہ}}$$

$$\tau = \frac{\text{مکمل کثرتہ راجب طہ فر فرطہ فرطہ}}{\text{مکمل کثرتہ راجب طہ فر فرطہ فرطہ}}$$

جسم کو متجانس فرض کیا گیا ہے، اس لئے نہ مستقل ہے اور اس لئے اس کو شمار کنندے اور نسب غادوں میں تکمل کی علامت سے باہر رکھا جاسکتا ہے



شکل (۸۱)

ذ کے لئے مکمل کے حدود ف = .  
سے ف =  $\pi^2$  تک ہیں اور اس لئے  
ہر صورت میں اس تحلیل کے عمل کی  
تکمیل کی جاسکتی ہے۔ مکمل کر کے  
 $\pi^2$  شہ پر تقسیم کرنے سے حاصل  
ہوتا ہے

$$= \frac{\text{مکمل ر جب طہ جم طہ فر فر طہ}}{\text{مکمل ر جب طہ فر فر طہ}}$$

پھر ہم ر کے لحاظ سے مکمل کر سکتے ہیں جس کے لئے حدود ہیں  $r = \pi$ ۔  
 $r = 2$  لہ جم طہ چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$= \frac{\text{مکمل } \frac{1}{4} (2 \text{ لہ جم طہ}) \text{ جب طہ جم طہ فر طہ}}{\text{مکمل } \frac{1}{4} (2 \text{ لہ جم طہ}) \text{ جب طہ فر طہ}}$$

$$= \frac{\text{مکمل } \frac{3}{4} (2 \text{ لہ جم طہ جب طہ فر طہ})}{\text{مکمل } \frac{3}{4} (2 \text{ لہ جم طہ جب طہ فر طہ})}$$

بالآخر طہ کے لئے مکمل کے حدود طہ = ع تا طہ =  $\frac{\pi}{4}$  (کہا کا  
ماس مستوی) ہیں۔ پس چونکہ

$$\text{مکمل } \frac{\pi}{4} \text{ جب طہ فر طہ} = \frac{1}{4} [\text{جم طہ}] = \frac{\pi}{4} \text{ جم طہ}$$

$$\text{مکمل } \frac{\pi}{4} \text{ جب طہ فر طہ} = \frac{1}{4} [\text{جم طہ}] = \frac{\pi}{4} \text{ جم طہ}$$

(۸۲۰) اس لیے ان قیمتوں کو درج کرنے سے



$$r = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = \frac{1}{\frac{2}{r}} = \frac{r}{2}$$

اس طرح مرکز ثقل مخروط کے محور پر اس سے فاصلہ  $\frac{r}{2}$  پر واقع ہے۔

طریقہ (۲)۔ کاریٹری محدود۔ اب ہم کاریٹری محدود کو

مرکز ثقل کا محل معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔ وہ کو مبدا فرض کرو اور مخروط کے محور کو محور لاؤ۔ اب مخروط کی

مسادات ہے

$$MA^2 = LA^2 + MS^2$$

اور گروہ کی مساوات ہے

$$LA^2 + MA^2 = LA^2 + MS^2$$

دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

$$LA = \frac{MS}{2}$$

مرکز ثقل فرما فری

شکل (۸۲)

ہر تکملہ میں ہم اول  $MA$  اور  $LA$  کے لحاظ سے ایسا بیان کر سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں

میں ہمیں ایک ہی تکملہ کی قیمت معلوم کرنی ہے یعنی  $MA$  فرما فری کی جہاں حدود حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

$$MA^2 = LA^2 + MS^2$$

$$MA^2 + LA^2 = LA^2 + MS^2$$

اور

یہ مسئلہ وہی ہے کہ ایک مستدیر انگوٹھی کا رقبہ معلوم کیا جائے جس کے

اندرونی و بیرونی نصف قطر علی الترتیب  $LA$  و  $MA$  ہیں۔

(یہ انگوٹھی بلاشبہ جسم کا وہ مقطع ہے جو مستوی  $MA$  کے متوازی مستوی پر

حاصل ہوتا ہے)۔ اس انگوٹھی کا رقبہ ہے

$\pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2) - \pi (2 \text{ لا}^2 \text{ مس}^2 \text{ ع}) = \pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع})$   
 اور جس فرما فری کی بجائے یہ قیمت رکھنے سے ضابطہ ہو جاتا ہے

$$\frac{\pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع})}{\pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع})} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

اب تکمل کے حدود ہیں مبادا لا = لا سے لا ۲ حجم ۲ ع تک جو مستوی  
 ف ق پر لا کی قیمت ہے۔ تکملوں کی قیمتیں معلوم کر کے ان حدود کو درج کرنے  
 سے حاصل ہوتا ہے

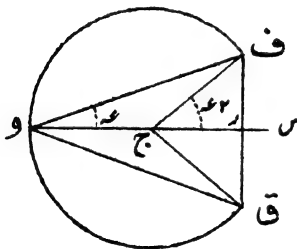
$$\frac{\pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع}) \times \frac{1}{3} - \pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع}) \times \frac{1}{3}}{\pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع}) \times \frac{1}{3} - \pi (2 \text{ لا} - \text{لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ ق}^2 \text{ ع}) \times \frac{1}{3}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

= لا حجم ۲ ع

جو وہی نتیجہ ہے جو طریقہ (۱) سے حاصل ہوا تھا۔

طریقہ (۳) ہندسی طریقہ۔ مرکز ثقل کو اس طرح بھی معلوم کیا جاسکتا

(۱۴۱)



شکل (۸۳)

ہے کہ دئے ہوئے حجم کو ایسے سادہ ترجموں  
 کے مجموعوں اور فرقوں میں تحلیل کیا جا  
 جن کے مرکز ثقل معلوم ہوں۔

کل کرہ و ف ر ق اور کرہ و ق  
 مخروط و ف ر ق کو تفریق کرنے سے  
 وہ حجم حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز ثقل  
 معلوم کرنا ہے۔ اب کرہ کا مرکز ثقل

اور مخروط کا مرکز ثقل معلوم ہے اور قطعہ ف ر ق کا مرکز ثقل بہت آسانی سے  
 اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ اس کو قطاع ج ف ر ق اور مخروط

ج ف ر ق کا فرق سمجھا جائے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ابتدائی شکل (کرہ و ف س ق)۔ (مخروط و ف ر ق)۔ (قطاع ج ف س ق) + (مخروط ج ف ر ق)

سے بنی ہے۔

ان کے حجم اور وج پر ان کے مرکز ثقل کے فاصلے نقطہ و سے حسب ذیل ہیں:

مرکز ثقل کا فاصلہ و سے

شکل

کرہ +

مخروط و ف ر ق -  $\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)$  (ج ۲ جم ۱ ع ۲)

قطاع ج ف س ق -  $\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)$  (ج ۲ جم ۱ ع ۲)

+ مخروط ج ف ر ق  $\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)$  (ج ۲ جم ۱ ع ۲)

اس جدول میں منفی علامت سے یہ مراد ہے کہ شکل کو جدا کرنا چاہئے

یعنی اس کے حجم کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے۔

و سے کسی مرکز ثقل کے فاصلہ کو لا سے تعبیر کریں اور ضابطہ (دفعہ ۶)

$$\frac{\sum k}{\sum k} = \bar{L}$$

کو استعمال کریں تو پوری شکل کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے حسب ذیل حاصل ہوتا ہے:

$$\bar{L} = \frac{\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)}{\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)}{\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)}{\frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) - \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r) + \frac{1}{4} \pi r^2 (2r + \frac{1}{2}r)}$$

جس کو مختصر کیا جائے تو

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{جم}^2 \text{عہ}$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

## عام مثالیں

(۱۴۲)

۱۔ ایک مستوی ذوار بقتع الاضلاع (ب ج د کو وتر ا ج سے تقصیف کیا گیا ہے اور یہ وتر کو وتر ب د سے نسبت ا : ب میں تقسیم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذوار بقتع الاضلاع کا مرکز ثقل (ج) میں واقع ہے اور اس کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں نسبت ۱۲ : ۱ + ب : ۲ + ا ہے۔

۲۔ ایک یکساں تار کو ایک دائری قوس اور دو حدودی نصف قطروں کی شکل میں موڑا گیا ہے اور اس کل نظام کا مرکز ثقل مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ مسن (ا) =  $\frac{\pi}{2}$  بنتا ہے۔

۳۔ ایک دائری میز کے تین پائے کو ر کے نیچے انتصافاً واقع ہیں اور ایک مثلث متساوی الاضلاع بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کل میز کے وزن سے کم وزن میز کو الٹ نہیں سکتا۔

۴۔ ایک مثلثی میز تین پایوں پر جو اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں پر ہیں سہارا ہوا ہے اور اس پر کسی محل میں ایک وزن و رکھا گیا ہے۔ یہ معلوم ہوا کہ ایک راس پر وزن ف رکھنے سے میز کا توازن عین ٹوٹتا ہے۔ اسی طرح دوسرے راسوں پر توازن ق، س رکھنے سے اس کے توازن میں عین خلل واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف + ق + س وزن و کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۵۔ ایک مثلثی پترے کے تین کونوں پر تین وزن کیلوں کے ذریعہ جوڑ دیے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، مثلث کے مقابل کے ضلع کے طول کے متناسب ہے اور تینوں کا باہم وزن پترے کے ابتدائی وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل نو نقضی دائرہ کے مرکز پر ہے۔

۶۔ ایک مثلثی پترے کو جس کا وزن و اور جس کے اضلاع ا، ب، ج ہیں

طول  $L_1, L_2, L_3$  کی ڈوریوں کے ذریعہ جو اس کے راسوں سے بندی ہیں ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ وک  $L_1$ ، وک  $L_2$ ، وک  $L_3$  ہیں جہاں

$$k = [3(L_1 + L_2 + L_3) - (a - b - c)] \frac{1}{2}$$

۷۔ ایک گھڑی کی سوئی کو ایک پکھنے لکھن پر رکھ کر کس طرح تیار کیا جاسکتا ہے کہ وہ گھڑی کاری (watchwork) کے ذریعہ وقت بتلائے جبکہ ایک وزن گھڑی کی سوئی میں چھپا ہوا سوئی کے ساتھ اطراف گھومے۔

۸۔ یکساں مادے سے بنا ہوا نکلہ کی شکل کا ایک جسم دو قائم مستدیر مخروطوں سے محدود ہے جن کے ارتفاع ۶ اور ۲ انچ ہیں اور جن کا قاعدہ مشترک ہے جو نصف قطر ایک انچ کا ایک دائرہ ہے۔ اس جسم کو ایک ڈوری کے ذریعہ جو مستدیر قاعدہ کی کور کے ایک نقطہ سے بندی ہے لٹکایا گیا ہے۔ نکلہ کے محور کا میلان انتصابی کے ساتھ معلوم کرو جبکہ وہ آزادانہ لٹک رہا ہو۔

۹۔ ایک پورا گنجنہ میز پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ ہر کارڈ اپنے نیچے کے کارڈ سے گنجنے کے طول کی سمت میں اتنا نکلا ہوا ہے کہ وہ عین گرتے تو ہے بلالفاظ ان کارڈوں کے جو اس کے نیچے ہیں۔ ثابت کرو کہ متواتر کارڈوں کے

سروں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقیہ بناتے ہیں۔  
۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں طور پر وزنی ڈوری کے کسی حصہ  $FF$  (۱۴۳) کا مرکز ثقل،  $H$  اور  $Q$  پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کے اوپر انتصاباً واقع ہوتا ہے جبکہ ڈوری آزادانہ لٹک رہی ہو۔

۱۱۔ ایک کروی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر  $a$ ،  $b$  ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ حسب ذیل ہے

$$\frac{3}{8} (a + b) (a^2 + b^2)$$

$$8 (a^2 + ab + b^2)$$

۱۲۔ ایک لنگر چھلے کو ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز اور محور میں

گزر تا ہے دو مساوی حصوں میں قطع کیا گیا ہے۔ کسی ایک نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو۔  
۱۳۔ ثابت کرو کہ رتاشی کے مقابلہ میں ایک شخص کو جو قوت (پکینج) لگائی  
پڑتی ہے وہ اس کے وزن کا  $\frac{1}{2}$  ہے جہاں  $\frac{1}{2}$  اس خطا کا افقی نقل ہے جو اس کی  
ایڑیوں کو اس کے مرکز ثقل سے ملاتا ہے اور ب زمین کے اوپر رسی کی

بلندی ہے۔ ۱۴۔ ثابت کرو کہ ایک گھڑا جس کا وزن ۹ پونڈ ہے زمین کے اوپر ارتفاع

ف پر  $\frac{1}{2}$  پونڈ کی افقی کینج اس طرح عائد کر سکتا ہے کہ اپنے مرکز ثقل کو اس محل سے  
ارتفاع آگے بڑھائے جبکہ وہ اپنے قدموں پر سیدھا کھڑا ہوا تھا۔

۱۵۔ متغیر کثافت اور مادے کی ایک سلاح کو ایک شخص اپنی دو انگشتائے  
شہادت پر اس طرح سہارے ہوئے ہے کہ سلاح افقی محل میں ہے۔ شخص اپنی ان انگلیوں کو  
ایک دوسرے کی جانب ان کو ایک ہی افقی مستوی میں رکھے ہوئے حرکت  
دیتا ہے اور سلاح کو ایک یا دونوں انگلیوں پر سے پھسلنے سے نہیں روکتا۔  
ثابت کرو کہ جب اس کی انگلیاں مل جاتی ہیں تو سلاح کا مرکز ثقل ان دو نقاط  
تماس کے وسط میں ہوتا ہے جن پر سلاح اس کی انگلیوں کو مس کرتی ہے۔  
۱۶۔ ایک نیم دائری قرص انتصابی مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ  
اس کا منحنی کنارہ ایک کھردرے افقی مستوی پر اور اُسے ہی کھردرے ایک  
انتصابی مستوی پر لٹکا ہوا ہے، رگڑ کی تدریج ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کم سے کم زاویہ جو  
اجاط کرنے والا قطر انتصابی کے ساتھ بنا سکتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\text{ج} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) \times \frac{1}{\pi}$$

۱۷۔ نصف قطر  $\frac{1}{2}$  اور وزن  $W$  کا ایک نیم کرہ ایک چمکنے میں پر اس طرح  
رکھا ہوا ہے کہ اس کی منحنی سطح میز پر ہے اور طول  $L$  ( $L > \frac{1}{2}$ ) کی ایک ڈوری  
اس کی کور کے ایک نقطہ اور میز کے ایک نقطہ سے بندھی ہے۔ ثابت  
کرو کہ ڈوری کا تناؤ ہے

$$\frac{3}{8} \text{ و } \frac{1}{2} - 1$$

۱۸۔ وزن و کا ایک مثلثی پتر تین انتصابی ڈوریوں سے جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں اس طرح سہارا گیا ہے کہ مثلث کا مستوی افقی ہے۔ وزن و کا ایک ذرہ مثلث کے مرکز عمودی پر رکھا گیا۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{9}{2} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{3+1}$$

۱۹۔ ایک پترے کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک مکافہ اور اس کے محور پر کے

ایک عمود وار خط سے محدود ہے۔

۲۰۔ اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس مکافہ نام سے ایک

مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور پر عمود ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۱۔ اُس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک قطع ناقص کے دو نیم قطروں

کے درمیان محدود ہے۔

۲۲۔ اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس ناقص نام سے ایک

مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۳۔ ایک ناقص نام خول کے نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو متشابه ہم مرکز

اور ہم محور ناقص ناموں سے اور مرکز میں سے گذرنے والے ایک مستوی سے محدود ہے۔

۲۴۔ ایک قائم مستدیر مخروط کو جس کے قاعدہ کا نصف قطر ہے دو مساوی

حصوں میں ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور میں سے گذرتا ہے تقسیم کیا گیا

ہے۔ ثابت کرو کہ کسی ایک حصہ کا مرکز ثقل محور سے  $\frac{1}{3}$  فاصلہ پر واقع ہے۔

۲۵۔ ایک پتر نیم کروی مکافہ  $\frac{1}{2}$ ، محور  $\frac{1}{2}$  اور معین  $\frac{1}{2}$  سے

محدود ہے۔ اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۶۔ منحنی

۱ =  $\Delta$  جب ۳ طہ

کے ایک سادہ ملحقہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۷۔ ایک کرہ کے ایک ٹن کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۸۔ نصف قطرب کے ایک نیم کرہ میں نصف قطر  $\Delta$  کا ایک اسطوانی

سوراخ آریار اس طرح بنایا گیا ہے کہ وہ نصف قطر جو نیم کرہ کے قاعدہ پر عمود ہے

سوراخ کا مرکزی خط بھی ہے۔ شکل کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۹۔ اس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو دائروں

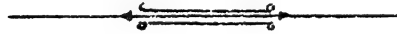
$$\Delta + \Delta^2 = \Delta^2 + \Delta^2 = 2\Delta^2$$

سے محدود ہے۔

۳۰۔ ایک عدسہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو تین شیشے سے بنا ہوا ہے

اور جس کی کروی سطحوں کے نصف قطر،  $r$ ،  $s$  ہیں اور جس کی موٹائی مرکز پر  $m$  ہے

اور کنارے پر صفر۔





# ساتواں باب

## کام

(۱۴۵)

۱۰۹۔ کام کی پیمائش۔ کام کی مختلف قسمیں ہیں لیکن علم حیل میں جس کام سے ہمیں واسطہ رہے گا وہ صرف وہ کام ہے جو اجسام کو جن پر قوتیں عمل کرتی ہوں حرکت دینے میں انجام پاتا ہے۔ ایسے کام کو حیلی کام کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ حیلی کام ہوتا ہے جب کبھی کوئی جسم اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے مقابلہ میں حرکت کرتا ہے مثلاً وزن اٹھانے میں، کھڑداری سطح پر کوئی وزنی شے گھسیٹنے میں یا چکدار ڈوری تنانے میں۔ پہلی صورت میں کام قوت جاذبہ کے خلاف انجام پاتا ہے، دوسری صورت میں اس گڑا کی قوت کے خلاف جو متحرک شے پر کھڑداری سطح لگاتی ہے، اور تیسری صورت میں ڈوری کے تناؤ کے خلاف۔

کئے ہوئے کام کی مقدار کا تخمینہ کرنے میں صریحاً دو چیزوں کو ملحوظ کرنا ہو گا یعنی اس قوت کی مقدار کو جو جسم پر عمل کرتی ہے اور اس فاصلہ کو جو قوت کے خلاف جسم نے طے کیا ہے۔ کام کی مقدار صریحاً قوت کے راست متناسب ہوگی۔ ۲۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک معلوم بلندی تک اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اس کام کا ڈگن ہو گا جو ۱۰۰ پونڈ کے ایک وزن کو اسی بلندی تک اٹھانے میں مطلوب ہو گا۔ نیز کام اس فاصلے کے بھی متناسب ہو گا جو طے ہوا ہے۔ کسی وزن کو ۲ فٹ تک

اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اس کام کا ڈگنا ہوگا جو اسی وزن کو ایک فٹ تک اٹھانے میں مطلوب ہوگا۔ اس لئے کئے ہوئے کام کی مقدار قوت اور فاصلہ کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

ایک پونڈ کے وزن کو ایک فٹ ارتفاع تک اٹھانے میں جو کام ہوتا ہے اس کی مقدار کو ایک فٹ پونڈ کہتے ہیں۔

اوپر کے بیان سے یہ ظاہر ہے کہ وپونڈ کے وزن کو فٹ پونڈ تک اٹھانے میں کئے ہوئے کام کی مقدار و فٹ پونڈ ہے۔

نیز کسی جسم کو فٹ پونڈ کی ایک قوت کے خلاف س فٹ تک حرکت دینے میں کیا ہوا کام س فٹ پونڈ ہے اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

ایک جسم کو ایک ایکساں قوت کے خلاف کسی فاصلہ تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ قوت اور فاصلہ کا حاصل ضرب ہے۔

مثلاً فرض کریں کہ ایک ریل گاڑی کو ایک ہموار راستہ پر کھینچنے میں جو قوت

مطلوب ہوتی ہے وہ ۱۰۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ تب اس گاڑی کو ۱۰۰ ایمل کے فاصلہ تک کھینچنے میں جو کام ہوگا وہ

$$= ۱۰۰ \times ۱۰۰۰۰ \text{ فٹ پونڈ}$$

۱۱۰۔ کام کرنے کی شرح۔ کام کو اکثر ایک مقررہ وقت میں انجام

دینا ہوتا ہے اور اس لیے اکثر اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ وہ شرح معلوم کی جائے جس سے کام ہو رہا ہے۔ کام کرنے کی وہ شرح جس میں ۳۳۰۰۰

فٹ پونڈ کا کام فی منٹ ہوتا ہے ایک اسی طاقت کہلاتی ہے۔ اسی طاقت کو بالعموم ۱۔ ط (H. P) سے تعبیر کیا جائے گا۔

اس اکائی کو واٹ (Watt) نے جاری کیا تھا کیونکہ یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک معمولی گھوڑے کے کام کرنے کی شرح ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوا ہے کہ بہت کم گھوڑے مسلسل ایک اسی طاقت کے ساتھ کسی مدت تک کام کر سکتے ہیں۔

آپسی طاقت کا حساب لگانے کے لیے ذیل میں ایک مثال دی جاتی ہے:  
 فرض کرو کہ اس انجن کی آپسی طاقت مطلوب ہے جو ایک ٹرین کو ۳۰  
 میل فی گھنٹہ کی شرح سے کھینچتا ہے جبکہ رگڑ کی مزاحمت '.....' پونڈ کے وزن کے  
 مساوی ہے۔ ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار = ۴۴ فٹ فی ثانیہ، اس لئے وہ کام  
 جو فی ثانیہ ہوا = ۴۴ × ۱۰۰۰ فٹ پونڈ۔ لیکن چونکہ ایک آپسی طاقت  
 = ۵۵۰ فٹ پونڈ فی ثانیہ اس لئے مطلوبہ آپسی طاقت

$$= \frac{1000 \times 44}{550} = 800 \text{ آپسی طاقت}$$

اس سے وہ آپسی طاقت ملتی ہے جو ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں  
 رفتار سے کھینچنے میں مطلوب ہے اگر رفتار مستقل نہ ہو تو ہم دیکھیں گے کہ آپسی طاقت  
 مختلف ہوگی کیونکہ کام کا کچھ حصہ حرکت کا اسراع پیدا کرنے میں صرف ہوگا  
 لیکن موجودہ صورت میں ہم اپنی توجہ صرف ایکساں رفتار کی حرکت پر محدود  
 رکھتے ہیں۔

## کام کی مطلق اکائی

۱۱۱۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوت کی عملی اکائی کمیت کا وزن ہے اور اس  
 اکائی کے علاوہ ایک اور اکائی بھی ہے جس کو مطلق اکائی کہتے ہیں اور جسکی  
 تعریف یہ ہے کہ یہ وہ قوت ہے جو اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا  
 کرتی ہے۔ چونکہ عملی اکائی اکائی کمیت میں اسراع ج پیدا کرتی ہے  
 (۱۴۷) جہاں ج اسراع بوجہ جاذبہ ارض ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عملی اکائی مطلق  
 اکائی کی ج گنتی ہے۔

برطانوی عملی اکائیوں میں اکائی قوت 'پونڈ وزن' ہے۔ مطلق  
 اکائیوں میں تناظر اکائی 'پونڈل' کے طور پر مشہور ہے۔ یہ وہ قوت ہے  
 جو ایک پونڈ کی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔  
 کام کی عملی اکائی جیسا کہ ہم بیان کر چکے ہیں وہ کام ہے جو ایک پونڈ کی

کمیت کو ایک فٹ تک اٹھانے میں انجام پاتا ہے یعنی ایک پونڈ کے وزن کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں۔ کام کی ایک مطلق اکائی بھی ہے جس کی تعریف یہ کی جاتی ہے کہ یہ وہ کام ہے جو ایک پونڈ کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس اکائی کو فٹ پونڈ کہتے ہیں۔ اب چونکہ ایک پونڈ وزن ۷ پونڈل کے مساوی ہے اس لئے صریحاً حسب ذیل ربط حاصل ہوتا ہے

ایک فٹ پونڈ = ۷ فٹ پونڈل

## مثالیں

۱۔ ایک ایسی طاقت کا ایک گھوڑا ایک ٹن وزنی گاڑی کو کس رفتار سے کھینچ سکتا ہے اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ رگڑ ایک ایسی افقی قوت پیدا کرتی ہے جو گاڑی کے وزن کا  $\frac{1}{4}$  ہے۔

۲۔ اگر ایک جسم کو جس پر فٹ پونڈل کی ایک مزاحمت قوت عمل کرتی ہے اس مزاحمت کے خلاف رفتار و سے حرکت میں لایا جائے تو کتنی ایسی طاقت مطلوب ہوگی۔

۳۔ ایسی طاقت کا ایک بھاپی ریلن (Roller) جس کا وزن ایک ٹن ہے کس شرح سے ایک راستہ پر لڑھکے گا اگر مزاحمت بوجہ رگڑ ریلن کے وزن کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک گھوڑکا جس کا وزن  $\frac{1}{4}$  اونس ہے ۶ فٹ بلند دیوار پر ہم گھنٹوں میں چڑھتا ہے۔ کس ایسی طاقت سے وہ کام کرتا ہے۔

۵۔ اینٹوں کے ایک ڈھیر کو جس کا وزن ۵ ٹن ہے ایک مکان کی چھت پر پہنچانا ہے جس کی بلندی ۵۰ فٹ ہے۔ دس مزدور لٹکائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک  $\frac{1}{13}$  ایسی طاقت کی اوسط شرح سے کام کرتا ہے۔ اس کام میں کتنا وقت لگے گا۔

۶۔ ایک انجن کے فشارے کا رقبہ ۱ مربع فٹ اور ضرب ل فٹ ہے اور انجن ۱۰ گردشیں فی منٹ کرتا ہے۔ اگر فشارہ پر عمل کرنے والا دباؤ فی اکائی

رقبہ ف پونڈ وزن فی مربع فٹ ہو تو ثابت کرو کہ انجن جس اسپر طاقت سے کام کر رہا ہے وہ

$$\frac{F \times L \times W}{33000}$$

ہے۔

۷۔ ایک محرکہ (Locomotive) کا دائری فشار ۷۰ قطر کا ہے اور اس کی ضرب ۲۶ ہے۔ وہ ۲۵۰ گردشیں فی منٹ کرتا ہے اور دباؤ ۲۲۵ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے۔ اس کی اسپر طاقت معلوم کرو۔

- ۸۔ اگر ایک جہاز کو جس کا طول ۵۰ فٹ ہے ۹ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۰۰ اسپر طاقت مطلوب ہو تو ثابت کرو کہ ایک مشابہ جہاز کو جو متشابہا غرق ہے اور ۶۰۰ فٹ لمبا ہے ۱۸ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۵۶۰۰ اسپر طاقت مطلوب ہوگی جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت، ترسلیج کے اور رفتار کے مربع کے متناسب ہے۔ نیز ثابت کرو کہ مافیہ جہاز کے ہرٹن کے لیے کوئلے کی قیمت دونوں جہازوں میں ایک ہی ہوگی۔
- ۹۔ ۱۵۰ اسپر طاقت ایک دھڑے سے دوسرے دھڑے پر ایک پٹے کے ذریعہ منتقل ہوتی ہے جو دھڑوں کے دو پھیپوں پر ۲۵ فٹ فی منٹ کی خطی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ پٹے کی دو جانبوں پر تناؤ کا فرق معلوم کرو۔
- ۱۰۔ ایک محرکہ میں فی اسپر طاقت گھنٹہ (Horse-power-hour) ۱۰ پونڈ کوئلہ خرچ ہوتا ہے۔ ایک ٹرین کو جس کا مجموعی وزن ۱۰۰ ٹن ہے ہموار راستہ پر ۵۰ میل فی گھنٹہ میں کتنا کوئلہ مطلوب ہوگا جبکہ راستہ کی مزاحمت بوجہ رگڑ ۱۲ پونڈ وزن فی ٹن ہو۔
- ۱۱۔ ۲۲۰۰ اسپر طاقت کا ایک جہاز چہ دونوں میں ۳۳۰۰ میل طے کرتا ہے۔ جہاز کی حرکت پر مزاحمت معلوم کرو۔

## متغیر قوت کے خلاف کام

۱۱۲۔ اگر ایک جسم کو ایک قوت کے خلاف جس کی شدت متغیر نہ ہو

بلکہ متحرک جسم کے راستہ پر نقطہ یہ نقطہ متغیر ہو متحرک کیا جائے تو ہم اس صورت میں انجام پذیر کام کے لیے ضابطہ ف س استعمال نہیں کر سکتے۔ کام کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم اس پورے خط کو جس پر حرکت واقع ہوتی ہے لا انتہا صغیر چھوٹے ٹکڑوں کی لاتینا ہی تعداد میں تقسیم کرتے ہیں، ان میں سے ہر ٹکڑا اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ حرکت میں جو قوت مزاحم ہے اس کو کسی ایک ٹکڑے پر اثنا، حرکت میں مستقل مقدار کا فرض کیا جاسکے۔

اگر کسی جزو کا طول فرس ہو جس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ سے س ہے اور اگر قوت کی شدت جو اس چھوٹے جزو فرس میں حرکت کی مزاحم ہے ف ہو تو اس جزو کو طے کرنے میں کام کی مقدار ف فرس ہوگی۔ اسلئے تمام اجزاء میں کئے ہوئے کام کی مقداروں کا مجموعہ یعنی کل کام جو ہوا اس ف فرس

ہے۔

## چکدار ڈوری کو تنانے میں کام

۱۱۳۔ اس ضابطہ کے استعمال کی مثال کے لیے فرض کرو کہ ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک چکدار ڈوری کو تنانے میں انجام پاتا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور اس کی چلک کی قدر ل سے تغیر ہوتی ہے۔ جب ڈوری کا طول منہجکرا لا ہو جاتا ہے تو اس کا تناؤ ف، دفعہ ۳۹ کے ضابطہ کی رو سے حسب ذیل ہے:

(۱۳۹)

$$ت = \frac{لا - ل}{ل}$$

ڈوری کو اور مزید طول فر لائیک تنانے میں — یعنی طول لا سے طول لا + فر لائیک — کیا ہوا کام  
= ت فر لا

$$\frac{ل}{ل} = (ل - ل) \text{ فرلا}$$

تکمل سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ڈوری کو طول ۱ سے طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$= \frac{ل}{ل} (ل - ل) \text{ فرلا}$$

$$= \frac{ل}{ل} \{ (ب - ل) - (ل - ل) \}$$

$$= \frac{ل}{ل} (ب - ل + ل - ل)$$

وسیع شدہ طول ب - ل ہے اور  $\frac{ل}{ل} (ب - ل + ل - ل)$  وہ تناؤ

ہے جبکہ توسیع کا نصف مکمل ہو چکا ہے یعنی جبکہ  $ل = \frac{۱}{۲} (ب + ل)$

پس معلوم ہوا کہ

کسی لچکدار ڈوری کو کسی طول ۱ سے (جو ڈوری کے طبعی

طول سے بڑا ہو) طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\text{تناؤ طول } \frac{۱}{۲} (ب + ل) \text{ پر } (ب - ل)$$

کے مساوی ہے۔

اگر تناؤ کو پونڈ وزن میں اور توسیع (ب - ل) کو فٹوں میں پیمائش کیا جا

تو صریحاً اس حاصل ضرب سے کام کی وہ مقدار حاصل ہوگی جو فٹ پونڈوں میں

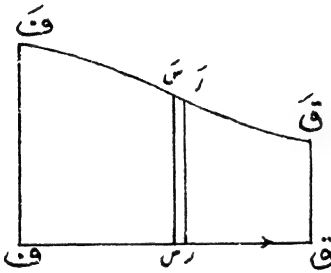
پیمائش کی گئی ہے۔ اگر تناؤ کو پونڈوں میں اور (ب - ل) کو فٹوں میں

پیمائش کیا جائے تو حاصل ضرب سے فٹ پونڈوں میں کام کی مقدار

حاصل ہوگی۔

## کام کو رقبہ کے ذریعہ تعبیر کرنا

۱۱۴۔ فرض کرو کہ  $ف ق$  اس راستہ کو تعبیر کرتا ہے جو ایک متحرک جسم مرتسم کرتا ہے اور فرض کرو کہ ہم  $ف ق$  کے ہر نقطہ پر معین کیے ہیں جو کسی پیمانہ پر (جو ہم چاہیں) اس قوت کو تعبیر کرتے ہیں جو اس نقطہ پر جسم کی حرکت میں فراہم ہے۔ فرض کرو کہ ایسے کوئی دو متصلہ نقطے  $س$  و  $ر$  ہیں اور ان نقطوں پر کے معین



شکل (۱۱۴)

س  $س$  و  $ر$  ہیں۔ اب چھوٹی پٹی  $س ر$  کے رقبہ کو انتہائی  $س ر \times$   $س$  کے مساوی فرض کیا جاسکتا ہے۔ اس پیمانہ پر جس پر ہم قوتوں کو تعبیر کر رہے ہیں یہ حاصل ضرب = فاصلہ  $س ر \times$  وہ قوت جو جسم کی حرکت اس تار میں فراہم ہے

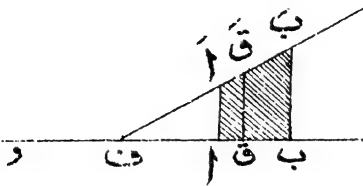
دوسرے الفاظ میں چھوٹے رقبہ  $س ر$  سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو جسم کو  $س$  سے  $ر$  تک حرکت دینے میں ہوا ہے۔

ایسے چھوٹے رقبوں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل رقبہ  $ف ق$  سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو  $ف ق$  تا  $ق$  حرکت میں انجام پایا ہے۔

۱۱۵۔ اس طریقہ سے وہ کام بہت ہی آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے جو ایک لچکدار دُوری کو تنانے میں انجام پاتا ہے اور جس کی ہم دفعہ ۱۱۳ میں بحثیں کر چکے ہیں۔ فرض کرو کہ  $و ف$  دُوری کا طبعی طول ہے۔ فرض کرو کہ دُوری کے سرے  $و$  کو خوب مضبوط پکڑا گیا ہے اور یہ کہ دُوری کو جب تنایا جاتا ہے تو اس کا دوسرا سر  $ا$   $ف$  خط  $و ف$  پر حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ کام مطلوب ہے جو دُوری کو



طول و اسے طول و ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے۔  
 فرض کرو کہ خط و ف اب کا کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ معین  
 اق ق کھینچا گیا ہے جو اس تناؤ کو  
 تعبیر کرتا ہے جبکہ دوری کا طول  
 وق ہے۔



شکل (۸۵)

ق کے مختلف محلوں کے لئے  
 معین ق ق کا ارتفاع مختلف ہوگا۔  
 اب چونکہ کلیہ ہک کی رو سے تناؤ  
 توسیع کے متناسب ہوتا ہے اسلئے

معین ق ق کا ارتفاع (جو تناؤ کو تعبیر کرتا ہے) ہمیشہ ف ق (توسیع) کے ساتھ  
 ایک ہی نسبت رکھے گا۔ اس لئے ق ہمیشہ ف میں سے گزرنے والے ایک  
 خط مستقیم پر ہوگا۔ اگر ا اور ب ب وہ معین ہوں جو علی الترتیب ا اور ب  
 پر کے تناؤں کو تعبیر کرتے ہیں تو یہ خط نقطوں ا ب میں سے گزرے گا اب  
 وہ کام جو دوری کو ا سے ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے دفعہ ۱۱۲ کی بموجب  
 رقبہ (ا ب) سے تعبیر ہوتا ہے (دیکھو شکل ۸۵)

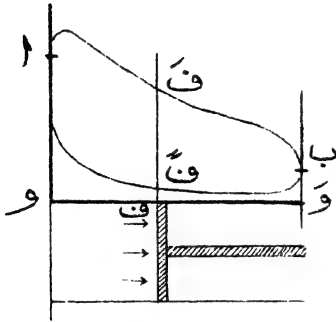
(۱۵۱) اس شکل کا رقبہ مربعاً ا ب کو اس معین سے ضرب دینے سے حاصل  
 ہوتا ہے جو ا ب کے نقطہ وسطی پر قائم کیا گیا ہو۔ یہ معین دوری کے اس تناؤ  
 کو تعبیر کرتا ہے جبکہ اس کا طول  $\frac{1}{2}(ا + ب)$  ہو یعنی ہمیں دفعہ ۱۱۳ کا نتیجہ  
 ہی حاصل ہوتا ہے جو حسب ذیل ہے :

(کیا ہو کام) = (توسیع کی وسعت) (ا ب) x (توسیع کی نصف منزل پر تناؤ)

۱۱۶۔ مظہار نقشہ۔ کام کی اس ترسیمی تعبیر سے جو دفعہ ۱۱۲ میں

سمجھایا گیا ہے علی انجینئرنگ میں استفادہ کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ و و  
 وہ فاصلہ ہے جو ایک فشارہ اسطوانہ میں طے کرتا ہے۔ جب فشارہ  
 کسی محل ف میں ہو تو فرض کرو کہ فشارہ پر عمل کرنے والے دباؤ کی پیمائش

کی گئی ہے اور فرض کر دو کہ اس دباؤ کو تعبیر کرنے کے لیے کسی پیمانہ پر ایک خط  
ف ف و و کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ جب فشارہ طول و و پر  
حرکت کرتا ہے اور پھر طول و و پر وائیں ہوتا ہے تو نقطہ ف ایک بندھنی  
ا ف ب ف (مرسم کرتا ہے جس کو فشارہ کی حرکت کا مظہار نقشہ  
کہتے ہیں۔



فشارہ کی آگے کی حرکت  
میں بھاپ نے اسپر جو کام کیا  
ہے وہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں  
رقبہ ا ف ب و ف و ا سے  
تعبیر ہوتا ہے جو بندھنی ا ف ب  
اور محور و و سے محدود ہے۔  
یہ کام فشارہ کو اس کے  
ڈنڈے کی دھکیل کے خلاف

شکل (۱۶)

آگے حرکت دینے میں صرف ہوا ہے۔ اسی طرح فشارہ کی پیچھے کی حرکت  
میں اپنی حرکت واپس میں بھاپ نے اسپر جو کام کیا ہے وہ رقبہ  
ب ا و ف و ا ف ب سے تعبیر ہوتا ہے جو بندھنی ب ف ا اور  
محور و و سے محدود ہے، اس رقبہ کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے کیونکہ  
فشارہ اب اسپر عمل کرنے والے دباؤ کے خلاف حرکت کر رہا ہے۔

پس کل کام جو فشارہ پر ہوا ان دو رقبوں کے فرق سے تعبیر ہوتا ہے  
اور یہ وہ رقبہ ہے جو خود مظہار نقشہ کا ہے۔ اس لیے وہ شرح معلوم کر سکتے  
ہے جس پر انجن کام کر رہا ہے صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ مظہار نقشہ کا  
رقبہ اور گردشوں کی تعداد فی اکائی وقت معلوم کی جائے۔

کام اُس قوت کے خلاف جو حکمت حرکت کے ساتھ کوئی زاویہ بنا

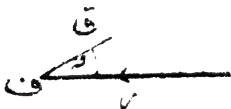
(۱۵۲)

۱۱۷۔ ہم نے اب تک ان صورتوں پر بحث کی ہے جن میں قوت ایسی سمت میں

عمل کرتی ہے جو اُس سمت کے ٹھیک مخالف ہے جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ لیکن ہمیں اُس کام کا بھی حساب لگانا پڑے گا جو انجام پاتا ہے جبکہ حرکت قوت کی سمت کے ساتھ کوئی زاویہ بنا لئے۔

جب جسم کو قوت کی سمت کے علی القوائم متحرک کیا جاتا ہے تو سرکایا گیا ہوا کام صفر ہے مثلاً کسی وزن کو ایک افقی سطح پر پھرانے میں جاذبہ ارض کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا۔

اب ہم وہ کام معلوم کرینگے جو انجام پاتا ہے جبکہ کسی جسم کو ایک ایسی سمت میں متحرک کیا جاتا ہے جو اس پر عمل کرنے والی قوت کی سمت سے کوئی زاویہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم کو ف سے قی تک جو اس کے راستہ کا ایک چھوٹا حصہ فرس ہے حرکت دی گئی ہے جبکہ اس پر ایک قوت  $\vec{F}$  عمل کرتی ہے جس کا خط عمل  $\vec{F}$  سے زاویہ  $\theta$  بنا تا ہے۔ اس کو دو اجزاء ترکیبی  $\vec{F} \cos \theta$  جب  $\vec{F}$  میں تحلیل کرو جن میں سے پہلا  $\vec{F} \cos \theta$  پر اور دوسرا  $\vec{F} \sin \theta$  کے عمود وار عمل کرے۔



شکل (۸۴)

اس کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ وہی ہے جو ہوتا اگر یہ دو قوتیں  $\vec{F} \cos \theta$  اور  $\vec{F} \sin \theta$  کے ساتھ جسم پر عمل کرتیں۔ اول الذکر قوت کے خلاف

جو کام ہوا ہے وہ  $\vec{F} \cos \theta$  فرس ہے اور موخر الذکر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ صفر ہے۔ اس لئے کل کام جو انجام پایا ہے  $\vec{F} \cos \theta$  فرس ہے۔  
۱۱۸۔ فرض کرو کہ اس کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا کما ہے ہیں اور فرض کرو کہ راستہ کے عنصر  $\vec{F}$  کی سمتی جیوب التمام  $\vec{F} \cos \theta$  ہیں اس کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام

$$\frac{\vec{F} \cos \theta}{\vec{F}} = \frac{\vec{F} \sin \theta}{\vec{F}} = \frac{\vec{F}}{\vec{F}}$$

ہیں اور چونکہ یہ خط عمل  $\vec{F}$  سے زاویہ  $\theta$  بنا تا ہے اسلئے



فرض کرو کہ ذروں کی مجموعی کمیت گ سے تعبیر ہوتی ہے۔ اور فرض کرو کہ تمام ذروں کے مرکز ثقل کا ارتفاع حرکت سے قبل ف اور حرکت کے بعد ف ہے۔ اب دفعہ ۸۶ کے ضابطہ کی رُو سے

$$ف = \frac{\sum k_f}{\sum k_g} = \frac{\sum k_f}{\sum k_g}$$

اس لئے  $\sum k_f = g \sum k_g$

اور اسی طرح  $\sum k_f = g \sum k_g$

اس لئے کل کام بموجب جملہ (۳۵)

$$= \sum (g \sum k_g - g \sum k_g)$$

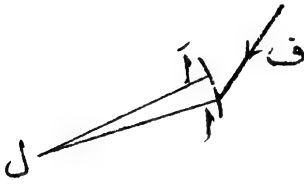
$$= \sum (g \sum k_g - g \sum k_g)$$

اس طرح جاذبہ کے خلاف جو کل کام ہوا وہ ذروں کے مجموعی وزن (۱۵۴) اور اس انتہائی ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذروں کے مرکز ثقل کو اٹھایا گیا ہے۔

## کام جو ایک جفت کے خلاف انجام پائے

۱۲۱۔ مسئلہ۔ اگر ایک استوار جسم کو جس پر قوتوں کا ایک نظام عمل کرتا ہے کسی محور کے گرد زاویہ صہ میں سے چھوٹی گردش دی جائے تو کام جو کیا گیا وہ گ صہ ہے جہاں گ اس محور کے گرد ان قوتوں کا معیار ہے جو حرکت میں فراہم ہیں۔

فرض کرو کہ گردش کا محورہ خط ہے جو صفحہ کے مستوی پر عمود ہے اور اس سے نقطہ ۱ پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ نمونہ کی ایک قوت ف ہے جو جسم کے ذرہ ۱ پر عمل کرتی ہے۔ گردش کے بعد فرض کرو کہ ۱ کا محل ۱



شکل (۸۸)

ہو جاتا ہے اور اس لئے زاویہ  
ا ل ا صہ کے مساوی ہے  
کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جس میں سے  
جسم کو گردش دی گئی ہے۔  
اشنائے گردش میں قوت  
ف کا نقطہ عمل ا سے ایک  
حرکت کرتا ہے اور اس لئے جو کام  
ہو اوہ

$$= ف \times ا \times جم \text{ نہ}$$

جہاں نہ، ف اور ا کا درمیانی زاویہ ہے،

$$= ا \times ف \text{ کا جزو ترکیبی سمت ا پر}$$

$$= صہ \times ل \times ا \text{ کا جزو ترکیبی سمت ا پر}$$

$$= صہ \times ف \text{ کا معیار گردش کے محور کے گرد}$$

اگر استوار جسم پر متعدد قوتیں عمل کریں جن کے نقاط عمل جسم کے مختلف  
ذرات ہوں تو عمل جمع سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ کل کام جو ہوا وہ

$$= صہ \times گردش کے محور کے گرد ان تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ$$

$$= گ \text{ صہ، جہاں گ گردش کے محور کے گرد تمام قوتوں کا معیار ہے}$$

## مثالیں

(۱۵۵)

- ۱۔ ایک شخص جس کا وزن ۱۴۰ پونڈ ہے ایک پہاڑی راستہ پر چڑھتا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے۔ اگر اس کے چڑھنے کی شرح ایک میل فی گھنٹہ ہو تو معلوم کرو کہ اس کو اپنا وزن اٹھانے میں کتنی ایسی طاقت سے کام کرنا پڑ رہا ہے۔
- ۲۔ ایک انجن ۱۰۰۰ ڈیزل ٹرین کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی شرح سے ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۰° میں ۱۰۰ ہے کھینچ رہا ہے۔ فراہمیت بوجہ رگڑ ٹرین کے وزن کا ۱/۲ ہے۔ معلوم کرو کہ کس ایسی طاقت سے انجن کام کر رہا ہے۔

۳۔ ایک آٹو موبیل، ایک ٹرنز، ایک پہاڑ پر جس کا میلان ۶۰ میں ۱ ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتی ہے۔ مزاحمت بوجہ رگڑ کو گاڑی کے وزن کا  $\frac{1}{10}$  لیکر معلوم کرو کہ وہ کس شرح سے پہاڑ کے نیچے اتر سکتی ہے، یہ فرض کرو کہ ایسی طاقت جو انجن میں پیدا ہوتی ہے وہی رہتی ہے۔

۴۔ پتھروں کے ایک بوجھ کو جس کا وزن ۸ ٹن ہے ایک ناؤ سے ایک گھاٹ پر جو ناؤ کے اوپر ۳۰ فٹ بلند ہے جمالوں (Cranes) کے ذریعہ اٹا دیا جائے جہاں جمالوں کو ایک انجن چلاتا ہے۔ اگر اٹانے میں تین گھنٹے صرف ہوں تو وہ بوجھ ایسی طاقت معلوم کرو جس سے انجن کام کر رہا ہے۔

۵۔ یہ فرض کر کے کہ ایک آدمی چلتے وقت ہر قدم پر اپنے مرکز ثقل کو ایک انچ انتصابی فاصلہ میں سے اوپر اٹھاتا ہے معلوم کرو کہ وہ کتنی ایسی طاقت سے کام کرتا ہے اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چلے اور اس کا قدم ۳۳ انچ اور اس کا وزن ۱۶۸ پونڈ ہو۔

۶۔ ایک سیکل سوار اور اس کی مشین کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے اور وہ ایک چڑھائی پر جو ۸۰ میں ۱ ہے ۵ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتا ہے۔ اس کی سیکل کی گیرائی ۷۲ انچ ہے اور کڑیوں کا طول ۷ انچ ہے۔ رکاب پر اس کے پاؤں کا وسط انتصابی دباؤ معلوم کرو کہ یہ دباؤ صرف رکاب کی نیچے وار حرکت میں موجود رہتا ہے۔

۷۔ ایک جہاز کے انجن ۵۰۰۰ ایسی طاقت کے ہیں اور جب انجن پوری طاقت سے کام کرتے ہیں تو انجن ۵۰ گردشیں فی منٹ کرتا ہے۔ وہ جفت معلوم کرو جو دھڑے کے ذریعہ منتقل ہوتا ہے۔

۸۔ جب ایک جسم دوسرے پر اڑھکتا ہے تو ایک جفت پیدا ہوتا ہے جو حرکت کی مزاحمت کرتا ہے، یہ جفت اس جفت کے مساوی ہوتا ہے جو طول ل کے ایک بازو کے سرے پر عمادی تعامل پیدا کرتا ہے جہاں ل کو لڑھکنی رگڑ کی قدر کہتے ہیں۔

اگر ریل کا ایک ڈبہ نصف قطر  $r$  کے پھیپھ پر چلے تو ثابت کرو کہ اس کی حرکت میں لڑھکنی رگڑ سے جو مزاحمت پیدا ہوگی وہ اس کے وزن کا  $\frac{1}{r}$  گنی ہے۔

## مہم کام کا اصول

۱۲۲۔ چھوٹے ہٹاؤ سے فی الحال وہ حرکت مراد ہوگی جس میں ایک نظام کا ہر ذرہ اپنی ابتدائی مقام سے اتنے فاصلہ تک حرکت کرے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک صغیر مقدار تصور کیا جاسکے اور اس کام پر مع نظر انداز ہو سکے اگر نظام قوتوں کے زیرِ عمل ہے تو کسی چھوٹے ہٹاؤ کی تکمیل میں کام انجام پائے گا۔ اب چونکہ ہٹاؤ کو ایک چھوٹی مقدار فرض کیا گیا ہے اس لیے جو کام ہو گا وہ بھی ایک چھوٹی مقدار کا ہو گا۔

(۱۵۶) اگر کوئی ذرہ توازن میں ہے تو حاصل قوت جو اس پر عمل کرتی ہے معدوم ہوتی ہے اور اس لیے ذرہ کے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ ہٹاؤ کے مقابلاً اعلیٰ ترتیب کا ہونے کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے۔ اگر کوئی استوار جسم یا استوار اجسام یا ذروں کا کوئی نظام توازن میں ہے اور اگر اس میں کوئی چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو چونکہ ہر ذرہ پر کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے اس لیے کل کام صفر ہے۔

۱۲۳۔ کسی نظام کے ذروں پر عمل کرنے والی قوتوں کو حسبِ دفعہ دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے:

(۱) وہ قوتیں جو اجسام پر بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں،

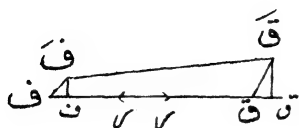
(ب) ان اعمال اور تعاملات کے زوج جو اجسام کے ذروں کے

درمیان یا ایک دوسرے کو مس کرنے والے دو اجسام کے درمیان عمل کرتے ہیں کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کو محسوب کرنے میں نہیں اس کام کو شمار کرنا چاہئے جو دونوں جماعتوں کی قوتوں کے خلاف انجام پاتا ہے لیکن ہم دیکھیں گے کہ دوسری جماعت کی قوتوں سے جو ارتقا پیدا ہوتی ہیں ان میں سے بیشتر ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں۔

۱۲۴۔ فرض کرو کہ اول ہم قوتوں کے اس زوج پر غور کرتے ہیں جو ایک استوار جسم کے دو ذروں 'ف' 'ق' کے درمیان عمل اور تعامل سے پیدا ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ



ہر قوت کی مقدار  $\times$  ہے اور اس کی سمت  $ق$  یا  $ف$   $ق$  ہے بموجب  
اس کے کہ وہ  $ف$  یا  $ق$  پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ کا  
اثر یہ ہے کہ  $ف$ ،  $ق$  علی الترتیب



شکل (۸۹)

$ف$ ،  $ق$  تک حرکت کرتے ہیں  
اور فرض کرو کہ  $ف$ ،  $ق$  سے

$ف$   $ق$  پر عمود  $ف$   $ق$  اور  
 $ق$   $ق$  پھینچے گئے ہیں۔ اس قوت

کا کے خلاف جو  $ف$  پر عمل کرتی

ہے جو کام ہوا وہ  $\times$   $ف$   $ق$  ہے اور اس قوت کا کے خلاف جو  $ق$  پر  
عمل کرتی ہے جو کام ہوا وہ  $\times$   $ق$   $ق$  ہے۔ اس لئے کل کام جو  
ہوا وہ

$$= (ف - ق) ق$$

$$= (ق - ف) ف$$

$$= (ق - ف) ق - ق کا ظل ف ق پر$$

اب چونکہ جسم استوار ہے طول  $ف$   $ق$ ، طول  $ق$   $ف$  کے مساوی ہے  
اور چونکہ بموجب فرض ہٹاؤ چھوٹا ہے اس لئے  $ق$  کا ظل  
 $ف$   $ق$  پر

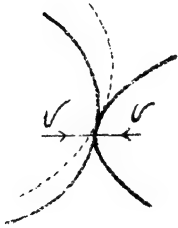
$$= ق - ق$$

$$= ق$$

اس لئے جو کام ہوا وہ صفر ہے۔

۱۲۵۔ نیز وہ کام بھی صفر ہوتا ہے جو قوتوں کے اس زوج کے خلاف  
انجام پاتا ہے جو دو یکجہ سطحوں کے درمیان عمل اور تعامل پر مشتمل ہوتی ہیں۔  
اول اس صورت پر غور کرو جس میں ایک جسم ساکن ہے اور دوسرا  
اس کی سطح پر پھسلتا ہے۔ ایسے ہٹاؤ میں اگر کوئی کام ہوا ہے تو وہ اس تعامل  
کے خلاف ہے جو متحرک جسم پر عمل کرتا ہے۔ چونکہ قوت عماد پر عمل کرتی ہے

اور اس کے نقطہ عمل کا فاس مستوی میں حرکت کرنا ضروری ہے یعنی عماد کے علی القوائم اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے۔  
وہ عام سے عام حرکت جو ان دو سطحوں کے لئے ممکن ہے وہ حرکتوں سے



شکل (۹۰)

مربک ہوتی ہے ایک اس قسم کی حرکت جو ابھی بیان کی گئی اور دوسری وہ حرکت جس میں یہ دو سطحیں ایک استوار جسم کے طور پر حرکت کرنی ہیں ہم ابھی دیکھ چکے ہیں کہ ہٹاؤ کے پہلے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ صفر ہے۔ ہٹاؤ کے دوسرے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ حسب

دفعہ ۱۲۴ معدوم ہوتا ہے پس کل کام معدوم ہوتا ہے اور مطلوبہ نتیجہ ثابت ہے۔  
۱۲۶۔ نتائج بالا درست نہیں ہوں گے اگر سطحوں کے درمیان فاس کھڑا ہو۔ ایسی صورت میں جو کام ہوتا ہے وہ رگڑ کی قوتوں کی مقدار پر منحصر ہوتا ہے اور چونکہ ان قوتوں کی مقدار معلوم کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا پورے مسئلے کو حل کرنا اس لئے ایسی صورتوں میں موہوم کام کا طریقہ کوئی قدر نہیں رکھتا۔

۱۲۷۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوتوں کی ایک بڑی تعداد کو اس کام کے محسوب کرنے میں جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ترک کیا جاسکتا ہے اور موہوم کام کے اصول میں جس میں یہ بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی نظام توازن میں ہو تو کسی چھوٹے ہٹاؤ میں گئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہوتی ہے صرف اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے جو بیرونی قوتوں کے خلاف تکمیل پاتے ہیں اور اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں جو استوار اجسام کے اعمال اور تعاملات کے خلاف انجام پاتے۔

۱۲۸۔ چرخوں کے نظام۔ موہوم کام کے اصول کا ایک اہم

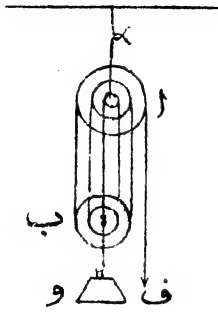
اطلاق حسب ذیل ہے: فرض کرو کہ چرخوں اورنا امتداد پذیر رسیوں کی ایک ترتیب ہے جس میں رسیوں کے دوسرے آزاد ہیں۔ ان میں سے ایک سیرا اُس وزن سے بندھا ہے جس کو اٹھانا مقصود ہے اور دوسرے سیرے پر طاقت لگائی جاتی ہے۔ فرض کرو کہ رسی کے ان دو آزاد سیروں کو علی الترتیب (۱۵۸) وزن سیرا اور طاقت سیرا کہا گیا ہے اور فرض کرو کہ چرخوں اور رسیوں کا یہ نظام ایسا ہے کہ وزن سیرے کو ایک انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینے کے لئے طاقت سیرے کو ن انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینا پڑتا ہے۔ فرض کرو کہ وزن سیرے سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور فرض کرو کہ یہ معلوم ہوا ہے کہ طاقت سیرے پر قوت ف ن لگانے سے توازن پیدا ہوتا ہے۔

اب ہمارے پاس دو قوتیں ف اور و توازن میں ہیں ان میں رشتہ معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ ہم اس نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم وزن و کو فاصلہ فرس تک حرکت دیتے ہیں اب اگر رسی میں توسیع واقع نہ ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا چاہئے کہ طاقت سیرے ف نے فاصلہ ن فرس طے کیا ہے۔ بیرونی قوت نے جو کام کیا ہے وہ صرف اُس کام پر مشتمل ہے جو رسی کے طاقت سیرے پر انجام پایا ہے اور یہ کام ف ن فرس کے مساوی ہے۔ جاذبہ کے خلاف وزن کو حرکت دینے میں جو کام ہوا ہے وہ و فرس ہے۔ یہ کام مختلف علامت میں اگر ہم وزن اٹھائیں تو و فرس کو مثبت لینا چاہئے اور ف ن فرس کو منفی اور اس کے بالعکس۔ اگر نظام ابتداً توازن میں تھا تو اس چھوٹے ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے جو کام مجموعی طور پر انجام دیا ہے وہ معدوم ہونا چاہئے، اس لئے توازن کی مساوات ہے

$$و فرس - ف ن فرس = ۰$$

$$اس لیے \quad ف = \frac{و}{ن}$$

جس سے طاقت اور وزن کے درمیان رشتہ معلوم ہوتا ہے۔



شکل (۹۱)

اس تحقیق میں ہم نے رگڑ  
وغیرہ کو نظر انداز کیا ہے اور نیز متحرک  
رسیوں اور چرخوں کے اوزان کو  
بھی نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

چرخوں کے نظام کی ایک  
مثال کے طور پر اس ترتیب پر غور  
کرو جو شکل (۹۱) میں دکھائی گئی ہے۔

اس میں چرخوں کے دو  
قالب ۱ اور ۲ ہیں۔ اول الذکر  
ثابت ہے اور دوسرا جس سے وزن

و لٹکا یا گیا ہے حرکت پذیر ہے۔ رسی طاقت سرے سے نکلتی ہے اور  
قالب ۱ کی ایک چرخنی پر سے گزرتی ہے اور پھر قالب ۲ کی ایک چرخنی  
سے گزرتی ہے اور علیٰ ہذا جتنی بھی چرخیاں ہوں ان پر سے ہو کر گزرتی جاتی ہے  
اور آخر میں اس کے دوسرے سرے کو قالب ۱ سے باندھ دیا جاتا ہے۔ اہت اور  
کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف عدد ن معلوم کرنے کی ضرورت  
ہے۔ فرض کرو کہ رسی کے آزاد طاقت سرے کے علاوہ رسی کے انتصابی حصوں کی  
تعداد اس ہے۔ اب اگر ہم طاقت سرے کو استقدر کھینچیں کہ وزن سہر ایک انچ  
اوپر اٹھے تو ان س حصوں میں سے ہر حصہ بقدر ایک انچ کے چھوٹا ہو جائے گا  
اور اس لیے طاقت سہر بقدر س انچ کے لمبا ہو گا۔ اس لیے  $n = s$  اور

(۱۵۹)

اس صورت میں  $f = \frac{w}{s}$ ۔

مثلاً نچلے قالب میں دو چرخیاں اور اوپر کے قالب میں تین چرخیاں ہوں  
تو ان کی قیمت ۵ ہوگی اور اس لیے طاقت کا ہر پونڈ وزن کے ۵ پونڈ سہارے کا  
چنانچہ کوئی شخص اگر طاقت سرے کو ۱۰۰ پونڈ کی قوت سے کھینچے تو وہ ۵۰۰ پونڈ  
کے وزن کو سہارے گا اور جو اس کی کھینچنے کی قوت ۱۰۰ پونڈ سے بڑھ جائے

وہ ۵۰۰ پونڈ کا وزن اٹھانے لگے گا۔

## توضیحی امثلہ

۱۔ مہوم کام کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ فطری طول  $l$  کی ایک بے ہرا چلکدار ڈوری ہے جس کی پلک کا مقیاس  $l$  ہے اور جو نصف قطر  $b$  کے ایک کرہ پر رکھی گئی ہے اور ماذبہ کے تحت تن جانے میں آزاد ہے۔

توازن کے محل میں توسیع کی مقدار بلاشبہ قوتوں کو تحلیل کرنے سے معلوم کی جاسکتی ہے لیکن اسے آسانی کے ساتھ مہوم کام کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ توازن میں ڈوری 'زاوی' نصف قطر  $b$  کے ایک چھوٹے دائرہ پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے محل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس سے ڈوری کا ہر عنصر کرہ کی سطح پر نیچے کی جانب ہٹتا ہے چنانچہ ڈوری اب زاوی' نصف قطر  $b$  + فرط کا ایک نیا چھوٹا دائرہ

بناتی ہے۔ ڈوری کا طول جبکہ وہ

زاویہ  $b$  کا دائرہ بناتی تھی  $\pi b$  جب  $b$

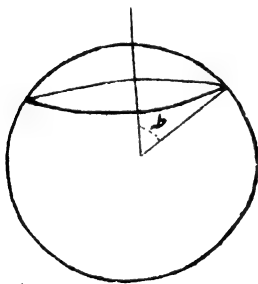
تھا، اس میں اضافہ جبکہ  $b$  بدل کر

$b$  + فرط ہو گیا فرط  $\frac{\pi b}{\cos \theta}$  (جہاں  $\theta$   $\pi b$  ب  $b$ )

یا  $\pi b$  ب  $b$  جم فرط ہے۔ ڈوری کو

استدرا وسیع کرنے میں جو کام ہوا

وہ  $\pi b \times \pi b$  ب  $b$  جم فرط ہے



شکل (۹۲)

جہاں  $\theta$  تناؤ ہے۔ کام، 'ماذبہ' کی قوت کے خلاف (یا اس مخصوص صورت میں ماذبہ کی قوت کی سمت میں) بھی انجام پایا ہے۔ ڈوری کے مرکز ثقل کا ارتفاع جبکہ وہ زاویہ  $b$  کا دائرہ بناتی تھی  $b$  جم  $b$  ہے اور  $b$  + فرط میں بدل جانے سے مرکز ثقل کے ارتفاع میں  $b$  جم  $b$  فرط کا اضافہ ہوتا ہے اور اس لیے ماذبہ کے خلاف کئے ہوئے کام کی مقدار  $b$  جم  $b$  فرط ہے

ہے۔ اس طرح ہم نے چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پائے ہوئے کل کام کو محسوس کر لیا ہے۔ موہوم کام کے اصول کی رو سے اس کام کی مجموعی مقدار صفر ہونی چاہئے اور اسلئے

$$- \text{وب جب طہ فرطہ} + \text{ت} \times \pi r = \text{ب جب طہ فرطہ} = 0$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ت} = \frac{\text{ب جب طہ}}{\pi r}$$

اور تناؤ ت کے جواب میں ڈوری کا طول ہے

$$1 + \left( \frac{\text{ت}}{r} \right)$$

$$\text{اس لیے} \quad 1 + \left( \frac{\text{ب جب طہ}}{\pi r} \right) = \pi r = \text{ب جب طہ}$$

اس مساوات سے طہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۔ سائیکل کی گیرائی۔ دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک

(۱۶۰)

سائیکل کی میکائنٹ پر موہوم کام کا اصول استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ کرنیک کا طول ۱ ہے اور فرض کرو کہ سائیکل کی گیرائی ب انچ ہے چنانچہ رکابوں (Pedals) کی ہر گردش سے سائیکل اتنے اگے حرکت کرتی ہے جتنی وہ قطر ب انچ کے پہیہ کی ایک گردش میں حرکت کرتی۔ فرض کرو کہ ہمیں وہ دباؤ معلوم کرنا ہے جو سائیکل سوار ایک رکاب پر ڈالتا ہے تاکہ سائیکل رگڑ کی پونڈ وزن کی فراہم قوت کے خلاف حرکت کر سکے۔

فرض کرو کہ سائیکل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس میں کرنیک ایک صغیر زاویہ صہ میں سے گھومتے ہیں اور پھینے اور سیکل بھی اس کے ساتھ آگے حرکت کرتے ہیں۔ چونکہ گیرائی ب انچ ہے اس لیے سائیکل یہ حیثیت مجموعی ۱ ب صہ انچ حرکت کرے گی اور رکاب کا طے شدہ فاصلہ خود سائیکل کو حوالہ کا فریم لینے سے ۱ صہ ہوگا۔ فرض کرو کہ وہ قوت و پونڈ وزن کی ہے جو رکاب پر لگائی جاتی ہے تاکہ سائیکل عین حرکت کرنے کو ہو۔ اس لیے سائیکل رکاب پر عمل

کرنے والی اس قوت اور وپونڈ کی مخالف قوت (جو گرہ کی وجہ سے ہے) کے تحت توازن میں ہے۔ اس لیے توازن کی مساوات ہے

$$Q \times 1 \text{ مہ} - D \times \frac{1}{4} \text{ ب ص} = 0$$

اس لئے مطلوبہ قوت ہے

$$Q = \frac{D}{4} \text{ ب}$$

اس طرح یہ قوت سیکل کی گیرائی کے راستہ متناسب اور کرنیک کے طول کے بالعکس متناسب ہے۔

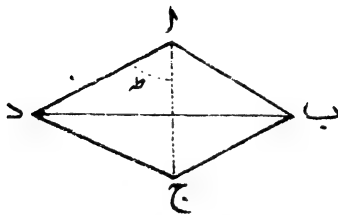
۳۔ وزن و اور طول کے چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ

جوڑ کر ایک متعین (ب ج د) بنایا گیا ہے۔ یہ قالب ایک افقی میز پر استاده ہے اس طور پر کہ ج (ا) انتصابی ہے اور نقطوں

ب د کو ایک ہلکی نامتداد پذیر دوری سے جس کا طول ۱ ہے

ملایا گیا ہے تاکہ ڈنڈوں کی شکل برقرار رہے۔ اس دوری کا

تناؤ معلوم کرنا مقصود ہے۔



شکل (۹۳)

مذہبم کام کے اصول سے  
تناؤ معلوم کرنے کے لیے بلاشبہ  
ایک ایسا چھوٹا ہٹاؤ معلوم ہونا چاہئے  
کہ تناؤ کے خلاف کام انجام پائے ورنہ  
تناؤ مساواتوں میں بالکل شریک ہی  
نہ ہوگا۔ چونکہ دوری نامتداد پذیر

ہے اس لئے فی الواقع اس کو وسیع کرنا

ناممکن ہے اور اس لئے اس کے تناؤ کے خلاف کام کا حاصل ہونا ممکن نہیں ہے۔  
لیکن ہم اس کی نامتداد پذیری کے باوجود اس کو وسیع شدہ خیال کر سکتے ہیں یا

ہم یہ کر سکتے ہیں کہ اس کی بجائے اسی طول اور اسی تناؤ کی ایک امتداد پذیر دوری رکھی ہوئی سمجھیں، صریحاً اس میں اور اول الذکر صورت میں کوئی فرق نہیں ہے۔ فرض کرو کہ غالب میں ایسا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے کہ 'ج' کی جانب پیچے دار انتصاباً حرکت کرتا ہے اور ج ساکن رہتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ ہٹاؤ ایسا ہے کہ زاویہ د ا ج ط سے ط ط + فرط ہو جاتا ہے۔ زاویہ ط کے جواب میں دوری کا طول مساوات

$$ل = ۲ \text{ جب ط}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو تفرق کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$فرل = ۲ \text{ جب ط فرط}$$

(۱۶۱) جس سے ل اور ط کے اضافوں فرل، فرط کے درمیان ایک رشتہ ملتا ہے۔ اس ہٹاؤ میں دوری کے تناؤ (ت) کے خلاف جو کام ہوا وہ ت فرل ہے۔ کل شکل کے مرکز ثقل کا ارتفاع (ابتداء) ج کے اوپر  $\frac{۱}{۲}$  (ج ہے یا ل جم ط اور اس لئے حسب دفعہ ۱۲۰ باذہ کے خلاف جو کام ہوا وہ

$$۴ \text{ و فر (ل جم ط)}$$

ہے۔ اس لئے اس ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے مجموعی طور پر جو کام انجام دیا وہ

$$۴ \text{ و فر (ل جم ط) + ت فرل}$$

ہے یعنی فرل اور فر (ل جم ط) کی قیمتیں درج کرنے سے کل کام جو ہوا وہ

$$- ۴ \text{ و جب ط فرط + ت } ۲ \times \text{ ل جم ط فرط}$$

ہے۔ توازن کے لئے اس کو معدوم ہونا چاہئے، اس لئے

$$\text{ت} = ۲ \text{ و س ط}$$

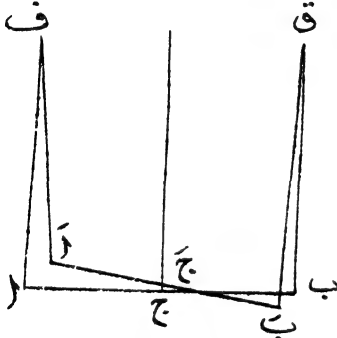
جو مطلوبہ تناؤ ہے۔

۴۔ طول ل اور وزن و کے ایک ڈنڈے کے سروں سے

دوریاں جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے باندھی گئی ہیں اور ڈنڈے کو ان رسموں کے ذریعہ دو نقطوں ف، ق سے جو ایک



ارتفاع پر ہیں اور جن کے درمیان فاصلہ  $l$  ہے لٹکایا گیا ہے۔  
وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈے کو ایسے محل میں رکھنے کے لئے  
مطلوب ہے جو اس کے توازن کے محل سے زاویہ طہ بنائے۔  
توازن کی حالت میں رسیاں انتصابی رہتی ہیں اور ڈنڈے کے سرے  
۱، ب، نقطوں 'ف' 'ق' کے ٹھیک انتصاباً بیچے رہتے ہیں۔  
جب ڈنڈے کو اس کے توازن کے محل سے گھمایا جاتا ہے تو ہم یہ خیال



شکل (۹۴)

کر سکتے ہیں کہ اس کا وسطی نقطہ بتدیج  
اس انتصابی خط پر چڑھتا ہے جو اس کے  
ابتدائی محل کے وسطی نقطہ میں سے  
گزرتا ہے۔ جب ڈنڈا کسی زاویہ طہ  
میں سے گھوم جائے تو فرض کرو کہ  
یہ نقطہ جس بلندی تک چڑھا ہے وہ  
لا ہے۔

طول 'ف' کا ظل انتصابی خط پر  
۱۔ لا ہوگا اور 'ق' کا ظل افقی خط پر کو  
کے افقی ظل کے مساوی ہونے کی وجہ  
سے 'صریحاً' جپ طہ ہوگا۔

اب چونکہ یہی ہوئی رسی 'ف' کا طول اپنی ابتدائی قیمت ۱ کے مساوی  
رہتا ہے اس لئے

$$۱ = (۱ - لا) + ل جب ۱ طہ \dots \dots \dots (۱)$$

اب وہ جفت معلوم کرنے کے لئے جو ڈنڈے کو زاویہ طہ پر رکھنا ہے فرض  
کرو کہ ڈنڈا اس محل میں جفت گ کے زیر عمل ہے اور ایک چھوٹا ہٹاؤ  
واقع ہوتا ہے جس میں طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ جفت کے خلاف  
جو کام ہوا وہ حسب دفعہ ۱۲۱۔ 'گ' فرطہ کے مساوی ہے جہاں منفی علامت

اس وجہ سے لی گئی ہے کہ جفت حرکت میں غرام ہونے کی بجائے اس کی مدد کرتا ہے۔  
جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ وفرلا ہے۔ اس لئے توازن کی مساوات ہے  
- گ فرطہ + وفرلا =

فرلا اور فرطہ کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات (۱) کو تفرق کر کے حاصل کرتے ہیں (۱۶۲)

$$۲ - (۱ - لا) فرلا + ل^۲ جب ط = جم ط فرطہ = -$$

$$\text{اس لئے} \quad گ = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} \\ = \frac{\text{ول}^۲ جب ط جم ط}{۲ (۱ - لا)}$$

$$= \frac{\text{ول}^۲ جب ط}{۲ (۱ - لا)}$$

جس سے مطلوبہ جفت معلوم ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ حرکت پذیر قیضوں کے ذریعہ جوڑ کر  
ایک مربع (ج ج) بنایا گیا ہے۔ نقطوں ۱ اور ج کو ایک پلکار ڈوری سے  
جس کا طبعی طول مربع کے ایک وتر کے مساوی ہے اور جس کا مقیاس ل ہے ملا یا گیا  
ہے۔ نقطوں ب اور د پر کتنی قوتیں لگانی چاہئیں کہ ڈوری تن کر اپنے طول کا  $\frac{1}{۲}$  ا  
گنا ہو جائے۔

۲۔ نصف قطر لا اور وزن د کے تین مساوی گروں کو ایک نقطہ ف سے  
طبعی طول ل اور مقیاس ل کی پلکار ڈوریوں کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ کئے آزاد  
لٹک رہے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ف کے نیچے ان کے  
مرکزوں کی گہرائی معلوم کرو۔

۳۔ ایک چابی چھتری کی میکانیت جس سے چھتری کھلتی ہے ایسی ہے کہ جب پھسلنے والے جزو کو وسطی لکڑی پر چڑھایا جاتا ہے تو چڑھاؤ کے ہر انچ کے جواب میں چھتری کی ہر کاڑی ۵ کے زاویہ میں سے گردش کرتی ہے۔ اگر چھتری میں ۱۸ کاڑیاں ہوں جن میں سے ہر ایک کا وزن  $\frac{1}{4}$  اونس ہو اور ان کے مرکز نقل سہاروں سے ۱۰ انچ کے فاصلہ پر ہوں تو معلوم کرو کہ پھسلنے والے جزو کو کس قوت سے اوپر اٹھانا چاہئے کہ چھتری کھل جائے جبکہ وسطی لکڑی انتصابی رہے اور کاڑیاں اس کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بنائیں۔

۴۔ ایک گھڑی کی سوئیوں کو اوزان معادلہ کے ذریعہ متوازن کیا گیا ہے تاکہ وہ کسی محل میں توازن کی حالت میں رہ سکیں۔ جب گھڑی میں وقت ۱۰:۵۵ ہوتا ہے تو ایک پندہ جس کا وزن ۱۰ ہے منٹ کی سوئی پر اس کے ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ سہارے سے ۶ فٹ ہے آکر ٹکلتا ہے۔ گھنٹہ کی سوئی پر کتنی بڑی انتصابی دھکیل کی قوت سہارے سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر لگانی چاہئے کہ توازن برقرار ہو۔

۵۔ ایک گھڑی کو کوک دینے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اس کام کے مساوی ہے جو ۲۰ پونڈ کے ایک وزن کو ۳ فٹ انتصاباً اوپر اٹھانے میں کرنا پڑتا ہے اور کوک دینے کے بعد گھڑی ۳ گھنٹوں تک چلتی ہے۔ گھڑی کا ر قاص اور حرکت کا قابو رکھنے والا پندہ جدا کر لئے گئے ہیں جس کی وجہ سے گھڑی کی سوئیاں بسیرت تمام گھوٹنے لگیں گی اگر انہیں مضبوط نہ پکڑ لیا جائے۔ منٹ کی سوئی پر کتنا بڑا جفت لگانا چاہئے کہ یہ وقوع پذیر نہ ہونے پائے۔

۶۔ ریل کے دو ڈبوں کو جوڑنے کے لیے یہ انتظام ہے کہ ان کے درمیان ایک ڈنڈا ہوتا ہے جس کے مخالف سروں پر راست دستوں اور چپ دستی پیچ کئے ہوئے ہوتے ہیں اور ڈنڈا ڈبوں میں پیوست کردہ ڈبہروں کے اندر محوم سکتا ہے۔ اگر ہر پیچ کی گھائی ایک انچ ہو اور ڈنڈے کو ۵۶ پونڈ کی ایک ایسی قوت سے گھمایا جائے جو ۱۵ انچ لمبے بیرم کے سرے پر پورے فائدہ کے ساتھ عمل میں لائی گئی ہے تو وہ قوت معلوم کرو جس سے ڈبے ایک دوسرے کی جانب کھینچے ہیں۔

## توانائی بالقوہ

۱۲۹۔ یہ معلوم ہو چکا ہو گا کہ ہمیں کام کی دو قسموں سے واسطہ دیتا ہے۔ ایک قسم وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو جاذبہ ارض کے خلاف انجام پاتا ہے اور دوسری وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو ایک ٹرین کو ہموار سڑک پر کھینچنے میں رگڑ کے خلاف ہوتا ہے۔ ان دو قسموں کے درمیان اصلی فرق یہ ہے کہ قسم اول کا کام اجسام کے نظام سے خود ان اجسام سے جیلی کام لیکر واپس وصول کیا جاسکتا ہے لیکن دوسری قسم کا کام جب ایک دفعہ صرف ہو چکا ہے تو پھر کبھی حاصل نہیں ہو سکتا۔ وزن اٹھانے میں کام صرف کرنے کی بجائے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہم کام کو بطور ذخیرہ جسم میں جمع کر رہے ہیں کیونکہ وزن کو اٹھانے میں جو کام انجام پایا ہے اس کو کسی وقت بھی وزن سے واپس وصول کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ اگر ہم وزن و کو فاصلہ ف میں سے اٹھائیں تو وزن پر جو کام ہوا ہے وہ 'ف' ہے، اب اگر اس کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہونے کے لئے چھوڑ دیں تو وہ ہمارے لئے جو کام کرے گا وہ 'ف' ہو گا، اس لئے وزن پر کل کام جو انجام پایا وہ صفر کے مساوی ہے۔

برخلاف اس کے کسی کمیت کو رگڑ کی قوت 'ف' کے خلاف فاصلہ 'س' تک کھینچنے میں جو کام انجام پاتا ہے وہ 'ف س' ہے۔ اس کمیت کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس لانے کے لئے جو کام کرنا پڑتا ہے اس کی مقدار بھی 'ف س' ہے اور اس لئے کل کام جو انجام پایا '۲ ف س' ہے۔ اس سے اس فرق کی توضیح ہوتی ہے جو کام کی ان دو قسموں میں اور قوتوں کے ان دو نظامات میں ہے جن کے خلاف کام انجام پاتا ہے۔

۱۳۰۔ تعریف۔ جب اجسام کے کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتیں اس نوعیت کی ہوں کہ وہ کل کام (جبری طور پر محسوب کردہ)

جو ہٹاؤں کے کسی سلسلے میں سے نظام کو اپنے ابتدائی تشکیل پر واپس لانے میں انجام پاتا ہے صفر ہو تو قوتوں کے ایسے نظام کو تحفظی نظام کہتے ہیں۔

چونکہ کام کا جبری مجموعہ صفر ہے اس لئے نظام کو کسی تشکیل پر پہنچانے میں جو کام ہوتا ہے وہ اس کام کے مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوتا ہے جو نظام کو اپنی ابتدائی تشکیل پر واپس ہونے کے لیے چھوڑ دینے میں انجام پاتا ہے۔ اس لئے کام کو یا نظام میں بطور ذخیرہ جمع رہتا ہے یعنی ضائع نہیں ہوتا۔

تھوڑے سے غور سے معلوم ہو گا کہ قوتوں کا کوئی نظام تحفظی ہو گا اگر (۱۶۴) صرف وہ قوتیں جو ذیل میں درج ہیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں :-

(۱) جاذبہ ارض

(ب) تعاملات جن میں تماس کا مل طور پر چلنا ہو،

(ج) ڈوریوں کے تناؤ خواہ دوریاں امتداد پذیر ہوں یا نامتناہی

برخلاف اس کے اگر حسب ذیل نمونوں کی قوتیں ایک

یا زیادہ عمل کر رہی ہوں (اس طور پر کہ ان کے خلاف کام انجام پائے) تو قوتوں کا نظام غیر تحفظی ہو گا :-

(۱) تعاملات جن میں تماس کھردرا ہو،

(ب) ہوا کی مزاحمت۔

۱۳۱۔ مسئلہ۔ اگر اجسام کے ایک نظام پر تحفظی قوتیں عمل کریں اور ان قوتوں کے خلاف اس نظام کو ایک تشکیل سے دوسری تشکیل تک حرکت دی جائے تو نظام پر جو کام ہوتا ہے وہ ان تشکیلوں پر منحصر نہیں ہوتا جن میں سے نظام

ف سے ق تک گزرنے میں حرکت کرتا ہے۔



شکل (۹۵)

اس کو ثابت کرنے کے لئے  
فرض کرو کہ تشکیلوں کے ایک سلسلہ  
میں سے حرکت کرتے ہوئے ف  
تاقی گزرنے میں جو کام ہوا ہے وہ  
کب سے تعبیر کیا گیا ہے کسی دوسرے  
سلسلے میں سے گزرنے میں جو کام ہوا

ہے وہ گ سے تعبیر کیا گیا ہے اور کسی تیسرے سلسلے میں سے گزرنے میں  
جو کام ہوا ہے وہ گ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اگر ہم ف سے ق تک  
پہلے سلسلے کے ذریعہ گزریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلے کے ذریعہ  
واپس ہوں تو کل کام جو انجام پایا صفر ہے اور اس لئے

$$گ + گ = ۰$$

نیز اسی طرح اگر ہم ف سے ق تک دو سرے سلسلے کے ذریعہ  
گزریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلے کے ذریعہ واپس ہوں تو

$$گ + گ = ۰$$

اس لئے گ = گ جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۳۲۔ تعریف۔ اگر کسی تشکیل ف کو معیار کے طور پر لیا جا

تو اجسام کے کسی نظام کو تشکیل ف سے تشکیل ق تک حرکت  
دینے میں جو کام انجام پاتا ہے اس کو تشکیل ق کی توانائی بالقوہ

کہتے ہیں۔

اس لئے توانائی بالقوہ اس کام کی پیمائش کرتی ہے جو نظام کو تشکیل  
ق میں لاکر رکھنے میں جمع ہوا ہے۔

مسئلہ۔ کسی نظام کو تشکیل (۱) سے تحقیقی قوتوں کے خلاف تشکیل (۲) تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ ک۔ گ۔ ہے جہاں ک تشکیل (۱) کی توانائی بالقوہ اور ک تشکیل (۲) کی توانائی بالقوہ ہے۔

کیونکہ اگر ف معیاری تشکیل ہے تو ف تا (۱) جو کام ہوا وہ گ ہے ف تا (۱) جمع (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ گ ہے اس لئے (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ گ۔ گ۔ ہے مسئلہ۔ اگر اجسام کا ایک نظام توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر کسی ذرہ کے محدودا، ما، ی ہوں تو ذرہ پر عمل کرنے والی حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہوں گے

جف گ، جف گ، جف گ

جف لا جف ما جف ی

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس کی وجہ سے لا، ما، ی پر کا ذرہ محور لا کے متوازی فاصلہ فلا تک حرکت کرتا ہے۔ اگر اس ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی ہوں تو ہٹاؤ میں جو کام ہوا ہے وہ حسب دفعہ ۱۱۸۔ لا فلا کے مساوی ہے۔ یہ کام توانائی بالقوہ کے اضافے کے مساوی بھی ہے

یعنی جف گ فلا کے اس لئے جف لا

$$- لا فلا = \frac{جف گ}{جف لا}$$

اس لئے لا =۔۔ جف گ اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جف لا

ما =  $\frac{\text{جف گ}}{\text{جف ط}}$  ، =  $\frac{\text{جف گ}}{\text{جف ی}}$

۱۳۴۔ مسئلہ۔ اگر اجسام کا ایک نظام، توانائی بالقوہ کی تشکیل میں ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس سے نظام کے ایک استوار جسم کا محل کسی خط کے گرد حاصل ہوتا ہے تو استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اس خط کے گرد (جبکہ اس کو مثبت شمار کیا گیا ہو اگر گردش کا میلان طہ کی بڑھتی ہوئی سمت میں ہے) حسب ذیل ہے:

جف گ  
جف ط

کیونکہ فرض کرو کہ ہم جسم میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں جس کی وجہ سے زیر بحث جسم منتخب خط کے گرد فریڈ زاویہ فرطہ میں سے گھوم جاتا ہے اور اس لئے

(۱۶۶)

طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ توانائی بالقوہ کا اضافہ  $\frac{\text{جف گ}}{\text{جف ط}}$  فرطہ ہے اور کام جو انجام پایا وہ دفعۃً کے مسئلہ کی رُوسے۔ گ فرطہ کے مساوی ہے جہاں گ، محور کے گرد ان سب قوتوں کا معیار ہے جو جسم پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے

جف گ  
جف ط

اس لئے گ =  $\frac{\text{جف گ}}{\text{جف ط}}$

جو۔ مطلوبہ نتیجہ ہے۔

۱۳۵۔ مسئلہ۔ اگر اجسام کا کوئی نظام توازن کے محل میں ہے تو توانائی بالقوہ ک، یا تو اعظم ہوگی یا اقل۔



توانائی بالقوہ اُن تمام ذروں کے محدودوں کا تفاعل سبب جن سے اجسام کا نظام ترکیب یافتہ ہے، فرض کرو کہ ان ذروں کے محدود حسب ذیل ہیں :

لا، ما، ی، لا، ما، ی، وغیرہ  
اگر نظام توازن کے عمل میں ہے تو ہر ذرہ توازن میں ہے اور اسلئے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزاء ترکیبی حسب دفعہ ۳۳ جدا گانہ معدوم ہوتے ہیں۔ اس کے لئے حسب دفعہ ۳۳ شرط ہے

$$\text{جف گ} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}} = ۰$$

جف گ = ۰، وغیرہ

لیکن یہ ٹھیک ہی شرطیں ہیں جن کے پورا ہونے پر گ اعظم ہوتا ہے یا قل  
۱۳۶۔ اس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے۔

مسئلہ۔ اگر اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالقوہ کسی تشکیل میں اعظم یا قل ہو تو یہ تشکیل توازن کی ہوگی۔  
کیونکہ دفعہ گذشتہ کی ترقیم اختیار کی جائے اور اگر گ اعظم یا قل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{جف گ} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}} = ۰$$

چونکہ - جف گ، - جف گ، - جف گ، اس قوت کے (۱۶۷)

اجزاء ترکیبی ہیں جو ذرہ (۱) پر عمل کرتی ہے اس لیے اوپر کی مساواتوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ذرہ توازن میں ہے۔ اسی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دوسرے ذرے بھی توازن میں ہیں چنانچہ مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۱۳۷۔ ان مسئلوں کی ایک خاص اہم صورت اس وقت پیدا ہوتی ہے

جبکہ کسی ہٹاؤ میں کام انجام دینے والی قوتیں صرف ان اجسام کے اوزان ہوں جن سے نظام ترکیب یافتہ ہے۔ اگر کل نظام کی کمیت گ ہو اور کسی بیاری افقی مستوی کے اوپر اس کے مرکز ثقل کا ارتفاع  $f$  ہو تو توانائی بالقوہ حسب ذیل ہوگی اور وہ اعظم یا اقل ہوگی بوجب اس کے کہ  $f$  اعظم یا اقل ہو۔ اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر اجسام کے کسی نظام میں وہ قوتیں جو ہٹاؤ میں کام انجام دیتی ہیں صرف جاذبہ کی قوتیں ہوں تو اس نظام کے توازن کی تشکیلات وہ ہوں گی جنہیں مرکز ثقل کا ارتفاع اعظم یا اقل ہوگا۔

## مثالیں

۱۔ دو یکساں ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول  $l$  ہے سروں پر آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ ان کو نصف قطر  $r$  کے ایک چکنے اسطوانے پر رکھا گیا ہے جس کا محور افقی ہے۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو ڈنڈے افق سے بناتے ہیں جبکہ وہ توازن میں ہوں۔

۲۔ ایک ناقصی قرص کو اس طور پر وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل اس کے مرکز اور اس کے محور اعظم کے ایک سرے کے درمیان وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کا خروج المرکز  $\frac{1}{4}$  سے بڑا ہو تو توازن کے چار محل ہوں گے جن میں قرص ایک افقی مستوی پر انتصاباً کھڑا ہوگا لیکن اگر خروج المرکز  $\frac{1}{4}$  سے بڑا نہ ہو تو توازن کے صرف دو محل ہوں گے۔

۳۔ وزن  $w$  کا ایک ڈنڈا افقی ہے اس کو مرکز ثقل تک ایک ثابت انتصابی پیچ سے جس کے گرد وہ گردش کرتا ہے چھیدا گیا ہے۔ ایک گردش سے ڈنڈا بقدر  $\frac{1}{4}$  اونچے اوپر اٹھنا یا نیچے اترتا ہے۔ اگر گرد نہ ہو تو وہ جفت معلوم کرو جو اس کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے۔

۴۔ وزن  $w$  کا ایک ڈاٹ مخروط مضلع کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش

مربع ہے۔ اس کو ضلع ج کے ایک مربع سوراخ میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس محل میں اس کے راس کی گہرائی تاس کے مستوی کے نیچے گ ہے۔ وہ جفت معلوم کرو جو اس کو زاویہ طہ میں سے گھا ہوا رکھنے کے لیے مطلوب ہے۔ دریاں حالیکہ اس کا محور انتصابی ہی رہے۔

۵۔ ایک چکنے مکانی تار کو انتصابی محور کے ساتھ رکھا گیا ہے۔ اس میں دو نیچے پڑے گئے ہیں جن کو ایک دوری مربوط کرتی ہے جو ماسک پر کے ایک حلقہ میں سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے محلوں کی تعداد اتنا ہی ہے۔

۶۔ ایک چکننا پیالہ ناقص نما کی شکل کا ہے۔ اس کے نیم محور ۱، ب ج ہیں اور ایک محور انتصابی ہے۔ وہ جفت معلوم کرو جو طول ال کے ایک ڈنکے کو پیالے کے اندر افقی محل میں رکھنے کے لیے جو توازن کے محل سے زاویہ طہ بنا کے مطلوب ہے۔

## توانائی بالحرکت

(۱۶۸)

۳۸۔ فرض کرو کہ ایک متحرک ذرہ پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اس قوت کا اثر حرکت کے دوسرے قانون کی موجودگی میں ہو گا کہ ذرہ کی رفتار میں ابطا پیدا ہو گا۔ ذرہ کی رفتار گھٹتی جائے گی جب تک کہ قوت عمل کرے گی اور اگر قوت کافی وقت تک عمل کرنا جاری رکھے تو ذرہ کو آخر الامر ساکن ہو جانا چاہئے۔

مثلاً ایک کیلے پر غور کرو جس کو تھوڑی سے ایک تختہ میں تھونکا جا رہا ہے۔ تھوڑی اور کیلے کے درمیان تعادل ایک قوت ہے جس کی سمت تھوڑی کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے اور یہ قوت آخر الامر تھوڑی کو ساکن کر دیتی ہے۔ نیز جب کسی ذرہ کو اوپر اور انتصابی پھینکا جاتا ہے تو اس کا وزن کچھ وقفہ کے بعد اس کو بالآخر ساکن کرتا ہے جس کے بعد وہ زمین پر واپس آگرتا ہے۔

اُس اثنا میں جس میں متحرک جسم قوت کے عمل سے ساکن ہو جاتا ہے قوت کا نقطہ عمل جو متحرک جسم کے ساتھ حرکت کر چکا ہے کوئی فاصلہ طے کر چکا ہو گا۔

اس لیے متحرک جسم نے کچھ کام کیا ہے۔ پس ہم جسم کی حرکت کے تخیل پر پہنچتے ہیں جس میں کام کرنے کی قابلیت ہے۔

مثلاً پھلی مثالوں میں ہتھوڑی کی حرکت نے کیلے کو تختہ میں گاڑ دیا اور ذرہ کی حرکت نے جس کو ہوا میں اُچھالا گیا تھا ذرہ کو زمین کی سطح کے اوپر کچھ بلندی تک اُٹھایا۔

۱۳۹۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ رفتار و سے حرکت کر رہا ہے اور اس کی حرکت میں ایک قوت  $F$  (مطلق اکائیوں میں) مزامم ہے جو ذرہ کی حرکت کی سمت کی مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے۔ فرض کرو کہ اس قوت کے خلاف ذرہ نے فاصلہ فرس وقت  $t$  میں طے کیا ہے اور فرض کرو کہ اس وقفہ میں اس کی رفتار و سے بدل کرو۔ فرو ہو گئی ہے۔ اب ذرہ

اپنی حرکت کی سمت میں  $F$  کا ابطاء رکھتا ہے یعنی  $F$  کا اسراع اس سمت میں جس میں قوت  $F$  عمل کر رہی ہے اس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$F = k \frac{F}{t^2}$$

اس لیے ذرہ نے قوت  $F$  کے خلاف فاصلہ فرس طے کرنے میں جو کام کیا ہے وہ حسب ذیل ہے:

$$F \text{ فرس} = k \frac{F}{t^2} \text{ فرس}$$

یا چونکہ  $F$  فرس وہی ہے جو ذرہ کی رفتار ہے ایسے

$F \text{ فرس} = k \text{ و فرو}$   
 تکمیل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ کا کل کام ساکن ہونے سے پیشتر حسب ذیل ہے:

$$F \text{ فرس} = \frac{1}{2} k \text{ و} \dots \dots \dots (۳۶)$$

چونکہ قوت ف کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کیا گیا ہے اس لئے  
یہ نتیجہ نکلتا ہے (دفعہ ۱۱) کہ کام  $\frac{1}{4}$  ک و کی پیمائش بھی مطلق اکائیوں میں ہوگی  
اس لئے اس قوت کی مقدار خواہ کچھ ہی ہو جو ذرہ کی حرکت میں خرچ  
ہے ذرہ نے ساکن ہونے سے پیشتر جو کام کیا ہے وہ وہی رہتا ہے یعنی  
 $\frac{1}{4}$  ک و کام کی مطلق اکائیاں۔

مقدار  $\frac{1}{4}$  ک و (مطلق اکائیوں میں پیمائش کردہ) کو تھرک  
ذرہ کی توانائی بالحرکت کہتے ہیں۔ یہ اس کام کی مقدار کے  
مساوی ہوتی ہے جو ذرہ ساکن ہونے سے پیشتر انجام دے سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ وہ خراحت جو کیلے کو تختہ میں نصب کرنے میں پیش ہوتی ہے  
... ۵ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے یعنی ... ۵ پونڈ کا وزن کیلے کو تختہ میں دبانے  
کے لئے مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ اس کو تختہ میں ہتھوڑی سے مار کر گھسیا جاتا ہے۔  
فرض کرو کہ ہتھوڑی کا سیرا ۱۰ پونڈ وزن ہے اور اس کی ہر ضرب کیلے پر ۵۰ فٹ فی ثانیہ  
کی رفتار سے پڑتی ہے۔ فرض کرو کہ ہر ضرب پر کیلا تختہ میں فاصلہ س (فٹ) میں  
پیمائش کردہ) گھستا ہے۔ تب ہتھوڑی نے ہر ضرب پر جو کام انجام دیا ہے وہ اس  
کام کے مساوی ہے جو ... ۵ پونڈ وزن - یا ... ۵۰۰ x ج پونڈل - کی ایک قوت  
کو فاصلہ س میں سے حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس لئے یہ کام ... ۵۰۰ فٹ پونڈلو  
کے مساوی ہے۔ ہتھوڑی کی توانائی بالحرکت ہے

$$\frac{1}{4} \text{ ک و } = 500 \times 10 \times \frac{1}{4} = 12500$$

مطلق فٹ پاؤنڈ ثانیہ اکائیوں میں۔ اس لئے ہشتہ (۳۶) کی رو سے

$$12500 = 500 \text{ ج س}$$

جس میں چونکہ اکائیاں فٹ پاؤنڈ ثانیہ میں اس لئے ج = ۳۲ لیا جاسکتا ہے اور اس لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \frac{25}{32} \text{ فٹ} = \frac{15}{16} \text{ انچ}$$

۱۴۰۔ مسئلہ۔ اگر قوتوں کے کسی نظام کے تحت ایک ذرہ (۱۷۰)  
حرکت کرے تو اس کی حرکت کی اثناء میں توانائی بالحرکت کا  
اضافہ اس کل کام کے مساوی ہوتا ہے جو ذرہ پر بیرونی عوامل  
کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ایک محل  $F$  سے دوسرے محل  $Q$  تک ذرہ کی  
حرکت پر غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان نقطوں پر ذرہ کی رفتاریں علی الترتیب  
و  $Q$  اور  $Q$  ہیں۔

فرض کرو کہ ہم اس راستہ کے کسی عنصر  $Frs$  کا امتحان کرتے ہیں  
اور فرض کرو کہ اس عنصر کے آغاز اور اختتام پر ذرہ کی رفتاریں  $W$  اور  $W + F$  فرو  
ہیں۔ فرض کرو کہ  $F$  وہ قوت یا قوت کا جزو ترکیبی ہے جو سمت  $Frs$  میں  
ذرہ پر عمل کرتی ہے جبکہ وہ اپنے راستہ کا عنصر  $Frs$  مرتسم کرتا ہے۔ اگر  
راستہ کے اس وقفہ کے مرتسم کرنے میں وقت  $Frt$  صرف ہو تو اسراع  
 $\frac{F}{Frt}$  ہے اور چونکہ حرکت کی سمت میں عمل کرنے والی قوت  $F$  ہے  
اس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$F = k \frac{Fro}{Frt}$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۳۹

$$F Frs = k \frac{Fro}{Frt} Frs$$

$$= k \frac{Frs}{Frt} Fro$$

$$= k Fro$$

$F$  سے  $Q$  تک پورے راستہ پر یکجہل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

کف فرس = ک کل و فرو =  $\frac{1}{4}$  اک و فی -  $\frac{1}{4}$  اک و فی ... (۳۷)

= توانائی بالحرکت میں اضافہ

اس مساوات کی دائیں جانب کا جملہ اس کام کو تعبیر کرتا ہے جو ذرہ پہ ہوا ہے اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ ثابت ہو چکا ہے۔

۱۴۱۔ بیرونی قوتوں نے ذرہ پر جو کام کیا ہے اس کو منفی علامت کے ساتھ اس کام کے مساوی تصور کیا جاسکتا ہے جو ذرہ بیرونی قوتوں پر کرتا ہے کیونکہ اگر ف وہ قوت ہے جو ذرہ پر سمت فرس میں عمل کرتی ہے تو عمل اور تعامل کی مساویت سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ بیرونی عوامل پر ذرہ سے عمل

کرنے والی قوت - ف ہے اور اس لیے ذرہ نے کل کام - ف فرس (۱۷۱) کیا ہے۔ اس لیے مسئلہ کو حسب ذیل متبادل شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:

قوتوں کے کسی نظام کے تحت ذرہ کی حرکت کی اتنا میں

توانائی بالحرکت کی تخفیف اس کل کام کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ بیرونی عوامل کے خلاف انجام دیتا ہے۔

۱۴۲۔ اگر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی نظام ہو تو

- کف فرس کی یعنی بیرونی عوامل پر ذرہ کے کل کام کی قیمت حسب دفعہ ۱۳۲

کف - کف کے مساوی ہے۔ پس مساوات (۳۷) ہو جاتی ہے

$$کف - کف + \frac{1}{4} اک (و فی - و فی) = ۰$$

$$یا کف + \frac{1}{4} اک و فی = کف + \frac{1}{4} اک و فی (۳۸)$$

اس لیے ق پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ وہی ہے

جوان کا شب پر ہے اور اس لیے مسئلہ ثابت ہے۔ - کُل توانائی  
توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کے مجموعہ کو ذرہ کی کُل توانائی  
کہتے ہیں۔ -

## توانائی کا بقا

۱۴۳۔ اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت صرفاً اس کے مختلف ذروں  
کی توانائیوں بالحرکت کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ نظام کی توانائی بالقوہ  
جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں اس کے ذروں کی توانائیوں بالقوہ کے مجموعہ کے  
مساوی ہوتی ہے۔ -

اس لیے کسی نظام کی کُل توانائی اس کے مختلف ذروں کی کُل توانائیوں  
کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ چونکہ ہر ذرہ کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے  
اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نظام کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے۔ -  
اس واقعہ کو کُل توانائی مستقل رہتی ہے توانائی کا بقا کہتے ہیں۔ -  
اُس مساوات کو جو اس امر کو ظاہر کرے کہ ایک لمحہ پر کی کُل توانائی کسی دوسرے  
لمحہ پر کی کُل توانائی کے مساوی ہے توانائی کی مساوات کہتے ہیں۔ -  
۱۴۴۔ مثلاً فرض کرو کہ مچھلی سے ایک پتھر پھینکا جاتا ہے۔ -

اولاً مچھلی کی چلکداری کسی کے تنانے میں کام انجام پاتا ہے اور یہ کام تنی ہوئی  
رسی کی توانائی بالقوہ کے طور پر جمع ہوتا ہے۔ جب مچھلی کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو رسی کا  
تناؤ پتھر پر عمل کرتا ہے اور پتھر اس تناؤ کے اسراع پیدا کرنے والے اثر کے تحت حرکت  
کرتا ہے اور رسی کا تناؤ گھٹتا ہے۔ اس عمل کے اثنا میں پتھر توانائی بالحرکت حاصل  
کرتا جاتا ہے اور تنی ہوئی رسی توانائی بالقوہ کھوتی جاتی ہے۔ اور یہ ثابت شدہ مسئلہ  
کی رو سے وہ توانائی بالحرکت جو پتھر حاصل کرتا ہے اُس توانائی بالقوہ کے عین مساوی  
ہے جو رسی کھوتی ہے۔ -

جب پتھر مچھلی سے نکلتا ہے تو رسی کی توانائی بالقوہ کا بیشتر حصہ پتھر کی توانائی  
بالحرکت میں منتقل ہو جاتا ہے۔ اس کے بعد پتھر کی حرکت کی اثنا میں توانائی کا ایک اور استحالہ



و قوع پذیر ہو سکتا ہے چنانچہ اگر تپھر اوپر وار حرکت کرتا ہے تو اس کی توانائی بالقوہ بڑھتی ہے اور اس لیے اس کے جواب میں اس کی توانائی بالحرکت گھٹنی چاہئے۔ اس کی مثال سسٹ پٹنی چاہئے۔ برخلاف ازیں اگر تپھر نیچے وار حرکت کرتا ہے تو توانائی بالقوہ گھٹنی اور اس لیے اس کی توانائی بالحرکت بڑھے گی۔ اس کی رفتار میں اضافہ ہوگا۔

۱۴۵۔ توانائی کے بقا کے اصول سے ایک بہت اہم نتیجہ حسب ذیل حاصل ہوتا ہے:

**مسئلہ۔** اگر ایک ذرہ کسی چکے متخنی پر پھسلے اور اس پر سوائے جاذبہ اور متخنی کے تعال کے کوئی اور قوتیں عمل نہ کریں اور اگر اس کے راستہ کے دو نقطوں ف' ق پر رفتاریں  $v$  و  $v'$  ہوں تو

$$v^2 = v'^2 + 2gh \quad (۳۹)$$

جہاں  $h$  کے نیچے ق کا انتصابی فاصلہ  $h$  سے تعبیر کیا گیا ہے یعنی راستہ ف' ق کا انتصابی طول ہے۔

فرض کرو کہ کسی افقی سطوی کے اوپر مثلاً زمین کی سطح کے اوپر ف

اور ق کے ارتفاع ف' ق

ہیں۔ جب ذرہ ف پر ہوتا ہے

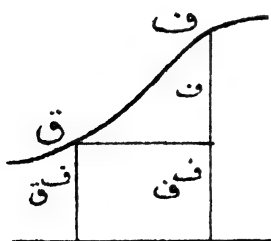
تو اس کی توانائی بالحرکت  $\frac{1}{2}mv^2$

اور توانائی بالقوہ  $mgh$

ہے۔ اس لیے اس کی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

ہے۔ اسی طرح ق پر اس کی کل توانائی



شکل (۹۶)

۱/۴ ک + ۱/۲ ک ج ف

ہے۔ اب چونکہ عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی ہے اس لیے کل توانائی غیر متغیر رہتی ہے۔ اس لیے  
 $\frac{1}{4} ک + \frac{1}{2} ک ج ف = \frac{1}{4} ک + ۲ ج ف$

اس لیے  $۲ - ۲ = ۲ ج (ف - ف)$   $۲ ج ف$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔  
 ۱۴۶ (۱۴۳) — دفعہ ۱۲ کا مسئلہ صریحاً درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اوپر وار حرکت کر رہا ہو، اس صورت میں ف منفی ہوگا۔ اسی طرح یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اپنے راستہ کے کچھ حصہ میں اوپر چڑھے اور باقی حصہ میں نیچے اترے۔ مزید بریں ذرہ قوتوں کے کسی بقائی نظام کے تحت حرکت کر سکتا ہے صرف اس شرط کے ساتھ کہ کل توانائی بالقوہ ذرہ کے وزن سے پیدا ہونی چاہئے۔ اس صورت میں بھی مسئلہ بالا درست رہتا ہے۔  
 مثلاً یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ذرہ ایک نامتناہی پذیر کسی سے بندھا ہو یا خلا میں آزادانہ حرکت کرے۔

اس مسئلہ کا استعمال سمجھنے کیلئے فرض کرو کہ ایک سیکل سوار پندرہ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک پہاڑی کی چوٹی پر پہنچتا ہے جس کا ارتفاع ۶۰ فٹ ہے اور ساتھ ہی پہاڑی کے نیچے اترنے لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہاڑی کے دامن میں اس کی رفتار معلوم کرنا چاہتے ہیں اس مفروضہ کی بناء پر کہ رگڑ، ہوا کی مزاحمت وغیرہ نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

پہاڑی کی چوٹی اور دامن کو نقاط ف اور ق (دیکھو مسئلہ بالا) لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف = ۶۰ فٹ

۶ = ۱۵ میل فی گھنٹہ = ۲۲ فٹ فی ثانیہ

اس لیے فٹ ثانیہ اکائیوں استعمال کرنے سے

$$۶۰ \times ۳۲ \times ۲ + ۲۲ = ۶۰۰۰$$

$$۴۳۲۲ =$$

اس لیے  $۶۶$  فٹ فی ثانیہ تقریباً

$$۴۵ = \text{میل فی گھنٹہ}$$

اس طرح سیکل سوار کی رفتار جبکہ رگڑ یا ہوا کی مزاحمت نہ ہو  $۴۵$  میل فی گھنٹہ ہوگی۔

## مثالیں

۱۔ ایک آٹوموبیل جو  $۴۵$  میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے ایک ٹولوان پہاڑی کے پائین پر پہنچتی ہے اور اسی آن اس کے انجن کو بند کر دیا جاتا ہے۔ معلوم کو کہ ساکن ہونے سے پیشتر گاڑی پہاڑی پر کتنے ارتفاع تک پہنچے گی (رگڑ وغیرہ نظر انداز کرو)۔

۲۔ ایک مزدور اینٹوں کو  $۱۰$  فٹ ارتفاع پر ایک معمار کے پاس پہنچاتا ہے۔ وہ ان کو اس طرح پھینکتا ہے کہ وہ  $۱۰$  فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے معمار کے پاس پہنچتی ہیں۔ مزدور اپنے کام کو کس تناسب میں بچا سکتا ہے اگر وہ اینٹوں کو اس طرح پھینکے کہ وہ معمار کے پاس عین پہنچ سکیں۔

۳۔  $۳$  ٹن کمیت کی ایک توپ گاڑی افقی مستوی پر  $۱۰$  فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چمچے دھکا دیتی ہے۔ وہ یکساں دباؤ معلوم کرو جو اس کو  $۳$  فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دینے کے لیے اس پر لگانا پڑے گا۔

۴۔  $۲۰۰۰$  ٹن کے ایک جہاز کو جو  $۳۰$  فٹ فی منٹ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے جہازی رسی کے ذریعہ  $۲$  فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دیا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ رسی کو کتنی کھینچ برداشت کرنی پڑی۔

۵۔ ایک سیکل اور سیکل سوار  $۲۰۰$  پونڈ وزنی ہیں۔ سیکل سوار ہموار سڑک پر  $۲۵$  میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سیکل چلاتا ہے اور اچانک بریک ڈالتا ہے جو ٹائر کو ایک ایسی قوت سے دباتا ہے جو  $۵۰$  پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ اگر بریک

اور ٹائر کے درمیان رگڑ کی قدر  $\frac{1}{2}$  ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر سیکل کتنی دور جائے گی۔

۶۔ مثال با سبق میں سیکل کتنی دور جائے گی اگر سڑک ہموار ہونے کی بجائے ۲۰ میں اڑھوان ہو۔

۷۔ ایک گولی کو ... ۱۰ فٹ ثانیہ کی رفتار سے فائر کرنے پر وہ لکڑی کے ایک کندے میں بارہ انچ گہرائی تک گھس جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اسے اسی لکڑی کے دو انچ موٹے تختے میں سے فائر کیا جائے تو خروج پر اس کی رفتار تقریباً ۹۱۳ فٹ فی ثانیہ ہوگی۔ (مان لو کہ لکڑی کی مزاحمت گولی پر مستقل ہے)۔

۸۔ دو مساوی وزن ف اور ف ایک رسی کے ذریعہ جو دو چٹنی چرخوں اور ب پر سے گذرتی ہے سہارے لگے ہیں اور ایک وزن  $(= \frac{2}{3} \text{ ف})$  اور ب کے درمیان دوری کے وسطی نقطہ پر باندھا گیا ہے۔ اور ب ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ وائرنا جاری رکھے گا تا آنکہ و آب ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائے۔ اس کے بعد کیا واقعہ ہوگا؟

۹۔ طبعی طول ل اور مقیاس ل کی ایک ڈوری کو ایک ہی افقی خط میں دو نقطوں اور ب کے درمیان جن کا باہمی فاصلہ ف ہے لٹکایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ پر وزن و بندھا ہے۔ وزن و کو اور ب کے درمیان وسط میں پکڑ کر دو فٹا چھوڑ دیا گیا۔ معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ میں سے وہ گرے گا قبل اس کے کہ ڈوریاں اسے ساکن کر دیں۔

۱۰۔ ایک ذرتی ذرہ طبعی طول ل کی ایک ڈوری سے لٹکتا ہے اور اس کو طول ل تک تنا دیتا ہے، ڈوری کا دوسرا سر اسے ثابت ہے۔ ذرہ کو سہارے کے نقطہ کے نیچے طول ۲ ل تک کھینچ کر چھوڑ دیا گیا۔ کتنے ادھر وہ چڑھے گا۔

۱۱۔ وہ اسپر طاقت معلوم کرو جو ایک دریا کی توانائی بالحرکت سے اس مقام پر حاصل کی جاسکتی ہے جہاں اس کا عرض ۱۰۰ فٹ، اوسط گہرائی ۲۰ فٹ، اور اوسط رفتار  $\frac{1}{2}$  میل فی گھنٹہ ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا

وزن ۶۲.۵ پونڈ ہے۔)

۱۲۔ اگر (مثال مابقی) دریا ایک آبشار پر جس کی تہ دریا کی تہ سے ۵۰ فٹ نیچے ہے ختم ہو تو وہ ایسی طاقت معلوم کرو جو پانی سے حاصل کی جاسکتی ہے۔  
۱۳۔ ایک انجن (حراکہ) میں ۱۰۰ پونڈ کوئلہ فی ایسی طاقت ساعت بنانا ہے جاذبہ گرہ، وغیرہ پر غالب آنے میں جتنا کوئلہ خرچ ہوتا ہے اسکو چھوڑ کر معلوم کرو کہ کتنا کوئلہ جلانا چاہئے کہ ۳۰۰ ٹن وزنی ٹرین میں ۵۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار پیدا ہو سکے۔

## قائم اور غیر قائم توازن

۱۴۔ فرض کرو کہ ایک نظام توازن کے محل میں ساکن ہے اور وہ اس محل سے صرف ایک راستہ پر حرکت کرنے کے قابل ہے جس کی دو سمتوں میں سے کسی سمت میں وہ حرکت کر سکتا ہے۔ اس قسم کے نظام کی مثالیں حسب ذیل ہیں: انجن جو پیٹریوں پر کھڑا ہو، دروازہ جو ایک قبضہ کے گرد گھوم سکتا ہو، منکاب جو ایک تار میں پھسلتا ہو۔ نظام پر بقائی قوتوں کی کوئی تعداد عمل کر سکتی ہے لیکن ان قوتوں کے تحت نظام کو توازن کے محل میں ہونا چاہئے۔  
فرض کرو کہ توازن کا محل ف سے تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ تشکیل ف میں نظام کی توانائی بالقوہ گ ہے۔ فرض کرو کہ لا کوئی محدود ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نظام کی تشکیل، ف سے کتنی دور حرکت کر چکی ہے۔ مثلاً لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہو سکتا ہے جو انجن پیٹریوں پر طے کر چکا ہے، لا سے وہ زاویہ تعبیر ہو سکتا ہے جس میں سے دروازہ اپنے قبضوں کے گرد گھوم چکا ہے یا لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہو سکتا ہے جو منکاب تار پر طے کر چکا ہے۔ لا کی قیمت مثبت ہوگی جبکہ نظام ایک سمت میں حرکت کرے اور منفی ہوگی جبکہ وہ دوسری سمت میں حرکت کرے۔ جب نظام اپنے توازن کی تشکیل ف سے حرکت کرتا ہے تو لا کی قیمت بدلے گی۔ توانائی بالقوہ گ کی قیمت بھی بدلے گی اور چونکہ وہ صرف لا کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے جبکہ قوتیں بقائی ہوں اس لئے ہم

کہہ سکتے ہیں کہ گ، لا کا ایک تفاعل ہے۔ ایک مشہور مسئلہ کی بموجب ہم گ کو لا کی قوتوں میں شکل

$$گ = گف + لا \left( \frac{جف}{لا} \right) + \frac{۱}{۲} لا \left( \frac{جف}{لا} \right) + ..... (۴۰)$$

میں پھیلا سکتے ہیں جس میں زیر تحریر ف اس امر کو تعبیر کرتا ہے کہ اُس مقدار کو تشکیل ف میں محسوب کرنا چاہئے جیسا کہ گف کی صورت میں فرض کیا جا چکا ہے۔ اب چونکہ تشکیل ف کو توازن کا محل فرض کیا گیا ہے اس لیے دفعہ ۱۲۵ کی روش سے

$$۰ = \left( \frac{جف}{لا} \right) ف$$

اور اس لیے مساوات (۴۰) ہو جاتی ہے

$$گ = گف + \frac{۱}{۲} لا \left( \frac{جف}{لا} \right) ف + ..... (۴۱)$$

اب ف سے قریب تشکیلات کے لیے، لاجھوٹا ہے اور اس لیے مساوات

$$(۴۱) کی رقم \frac{۱}{۲} لا \left( \frac{جف}{لا} \right) ف اگرچہ خود چھوٹی ہے تاہم لا، لا وغیرہ$$

والی ارقام کے مقابلہ میں جو اس کے بعد آتی ہیں بہت بڑی ہے۔ اس لیے

ف سے قریب تشکیلات کے لیے ہم ان آخری رقموں کو بالکل نظر انداز کر سکتے ہیں اور اس لیے مساوات کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں: (۴۲)

$$گ = گف = \frac{۱}{۲} لا \left( \frac{جف}{لا} \right) ف ..... (۴۲)$$

اب  $\left( \frac{جف}{لا} \right) ف$  کی قیمت مثبت ہو سکتی ہے یا منفی۔

اگر وہ مثبت ہے تو گ - گف مثبت ہے خواہ لا کی کچھ ہی ہو اور اس لیے ف سے قریب ہر تشکیل میں توازنائی بالقوہ گ،

تشکیل ف کی توانائی بالقوہ سے بڑی ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ک، ف پر اقل ہے۔

اسی طرح اگر (جف<sup>۲</sup> ک) منفی ہے تو لا کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لیے ک۔ ک ف منفی ہے اور اس لیے ک، ف پر اعظم ہے۔  
۱۴۸۔ اب فرض کرو کہ نظام کو ف سے قریب کسی محل میں ساکن رکھا گیا ہے۔ یہ تشکیل توازن کی تشکیل نہیں ہے اور اس لیے نظام ساکن نہیں رہ سکتا۔ وہ سمت معلوم کرنے کے لیے جس میں وہ حرکت کرنے لگے گا ہمیں صرف یہ دیکھنے کی ضرورت ہے کہ جب نظام حرکت کرتا ہے تو وہ توانائی بالحرکت حاصل کرتا ہے اور چونکہ یہ توانائی حسب دفعہ ۱۴۳ اسکی توانائی بالقوہ کے بدلے میں حاصل ہوتی چاہئے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نظام ایک ایسی سمت میں حرکت کرنے لگے گا کہ اس کی توانائی بالقوہ گھٹے گی۔

مساوات (۷۲) پر نظر ڈالنے سے معلوم ہوگا کہ یہ سمت ف کی جانب ہے یا اس کے مخالف۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (جف<sup>۲</sup> ک) مثبت ہے تو لا کی قیمت گھٹنی چاہئے۔ اور اس لیے حرکت ف کی جانب ہونی چاہئے خواہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اسی طرح اگر (جف<sup>۲</sup> ک) منفی ہے تو لا کی قیمت بڑھنی چاہئے اور اس لیے حرکت ہمیشہ ف سے دور ہوگی۔ اس طرح معلوم ہو چکا کہ اگر نظام کو ف سے قریب کسی تشکیل میں رکھا جائے تو یہ سوال کہ حرکت ف کی جانب ہوگی یا اس سے دور اس تشکیل پر منحصر نہیں ہے جس میں نظام کو رکھا گیا ہے بلکہ (جف<sup>۲</sup> ک) کی علامت پر منحصر ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ف توازن کی تشکیل ہو اور اگر نظام کو ف سے خفیف طور پر کسی قریبی تشکیل میں ہٹایا جائے تو

(ا) اگر  $(\frac{جف^2}{جف^2 - لا^2})$  مثبت ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ اپنے توازن کے ابتدائی محل پر لوٹے گا،

(ب) اگر  $(\frac{جف^2}{جف^2 - لا^2})$  منفی ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ توازن کے محل سے اور دور حرکت کرے گا۔  
قسم اول کے توازن کو قائم توازن اور قسم دوم کے توازن کو غیر قائم توازن کہتے ہیں۔  
ہم نتائج کو حسب ذیل جدول میں خلاصہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں:

توازن	توانائی بالقوہ گ	$(\frac{جف^2}{جف^2 - لا^2})$ کی علامت
قائم	اقل	+
غیر قائم	اعظم	-

۱۴۹۔ مسئلہ۔ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہوتے ہیں۔

ہم مان سکتے ہیں کہ صرف محدود قوتوں سے بحث کی جارہی ہے اور اس لیے تعامل ک ہمیشہ محدود ہوگا، وہ کبھی بھی قیمتوں ک  $\infty \pm$  سے گزر نہیں سکتا۔ یہ تعامل مسلسل ہونا چاہئے کیونکہ بموجب فرض وہ کام جو نظام کو کسی تشکیل میں رکھنے میں انجام پاتا ہے محدود قیمت کا ہونا چاہئے



اور اس لیے کسی دی ہوئی تشکیل کے لئے توانائی بالقوہ کی صرف ایک قیمت ہونی چاہئے۔ نیز توانائی بالقوہ کے تعریفی سر محدود ہونے چاہئیں کیونکہ ان سے ان قوتوں (فکٹ ۱۳۳) کی پیمائش ہوتی ہے جو کسی دی ہوئی تشکیل میں صرف محدود قیمتیں رکھ سکتی ہیں۔

پس اگر تفاعل گ کی ترکیب کھینچی جائے تو وہ ایسے حصوں پر مشتمل ہونی چاہئے جنہیں گ متبادل لا بڑھے اور گھٹے۔ ایک حصہ سے جس میں گ بڑھتا ہے اُس حصہ میں جس میں گ گھٹتا ہے داخل ہونیکے لیے ہمیں

ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا چاہئے جس پر گ اعظم ہے اور خلاف ازیں اُس حصہ سے جس میں گ گھٹتا ہے اُس حصہ میں جس میں گ بڑھتا ہے داخل ہونے کے لیے ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا پڑے گا جس پر (۱۴۸) گ اقل ہے۔ اس لیے گ کی اعظم اور اقل قیمتیں متبادل لا وقوع پذیر ہوتی ہیں یا دوسرے الفاظ میں قائم اور غیر قائم توازن کی تشکیلات متبادل لا واقع ہوتی ہیں۔

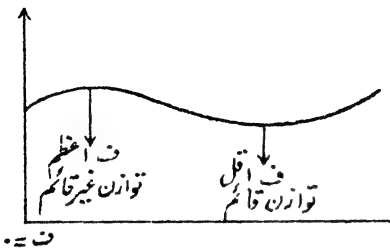
۱۵۰۔ توازن کی ان دو قسموں کی مثالیں ان تشکیلات میں مل سکتی ہیں جو قبل ازیں بیان ہو چکی ہیں۔

۱۔ حرکات جو پٹریوں پر حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ کسی

محل میں مرکز ثقل کا ارتفاع  $F$  ہے اور فرض کرو کہ  $L$  سے وہ فاصلے تعبیر ہوتے ہیں جو راستہ پر اتفاقاً پیمائش کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ  $W$  کتل کی کمیت ہے۔ تب توانائی بالقوہ  $WFL$  ہے۔ تشکیل  $L = 0$  میں توازن کے لیے شرط ہے

$$F = 0 \quad (L = 0)$$

یا  $F = 0$ ۔ جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $F$  کو اعظم ہونا چاہئے یا اقل۔ منہ سے



شکل (۹۷)

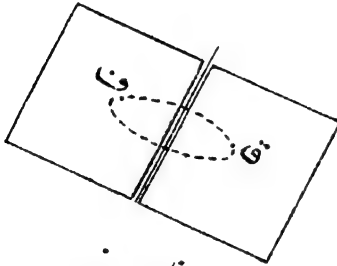
جدول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ف اقل ہے یعنی اگر مرکز ثقل اپنے زیر ترین نقطہ پر ہے تو توازن قائم ہوگا۔ اس لیے اگر حرکت کو اس محل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو وہ اس محل پر واپس لوٹ آئے گا۔ اگر ف اعظم ہو یعنی اگر مرکز ثقل اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ حرکت اب پہاڑی کے چوٹی پر ہوگا اور چوٹی کے کسی ایک جانب ہٹانے پر پہاڑی کے نیچے لڑھکتا جائے گا۔

**نوٹ**۔ اگر حرکت کے متحرک اجزاء مناسب طور پر "متوازن" نہیں ہیں تو مرکز ثقل ممکن ہے ہمیشہ پیڑیوں کے اوپر ایک ہی ارتفاع پر نہ رہے اور اس لیے ف کی اعظم اور اقل قیمتیں ضروری نہیں کہ ان نقطوں پر واقع ہوں جہاں راستہ کی بلندی اعظم یا اقل ہے۔ مثلاً توازن کا ایک محل وقوع پذیر ہو سکتا ہے جہاں راستہ ہموار نہ ہو یا نیز قائم توازن کا محل ایک ایسے نقطہ پر واقع ہو سکتا ہے جس پر راستہ اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو، ظاہر ہے کہ اس صورت میں پیڑیوں کے اوپر مرکز ثقل کا ارتفاع اس نقطہ پر اقل ہے۔ اس لیے اگر انجن کو راستہ کے زیر ترین نقطہ تک خفیف طور پر ہٹایا جائے اور پھر آزاد چھوڑ دیا جائے تو وہ خود بلند ترین نقطہ تک واپس لوٹے گا۔ یہاں اصول وہی ہے جو میکائیکل کھلونوں میں استعمال کیا جاتا ہے کیونکہ جب ان کو کسی مائل مستوی کے پائین میں ساکن رکھا جاتا ہے تو وہ آزاد چھوڑنے پر مستوی کے اوپر لڑھکتا شروع کرتے ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادل واقع ہونے چاہئیں جیسا کہ ہم نے دفعہ ۱۲۹ میں ثابت کیا ہے۔

۲۔ دروازہ جو قبضوں پر گھومے۔ یہاں بھی توانائی بالقوہ کچھ

جس میں ف کسی معیاری ہوا اُستوی کے اوپر دروازے کے مرکز ثقل کا ارتفاع ہے۔ جب دروازہ اپنے قبضوں پر گھومتا ہے تو اس کا مرکز ثقل قبضوں کے خط کے گرد ایک دائرہ متسم کرتا ہے۔ اگر یہ خط کا بل طور پر انتصابی ہو تو مرکز ثقل سے متسم شدہ دائرہ کلاً ایک افقی اُستوی میں واقع ہوتا ہے اور اس لیے دروازہ کا ہر محل توازن کا محل ہوتا ہے اور قائمیت یا غیر قائمیت کا سوال پیدا ہی نہیں ہوتا۔ لیکن اگر قبضوں کا خط کا بل طور پر انتصابی نہ ہو تو مذکورہ بالا دائرہ ایک مائل اُستوی میں واقع ہوگا۔ وہ نقطے جن پر مرکز ثقل کا ارتفاع معیاری افقی اُستوی کے اوپر اعظم یا اقل ہے تعداد میں دو ہیں:

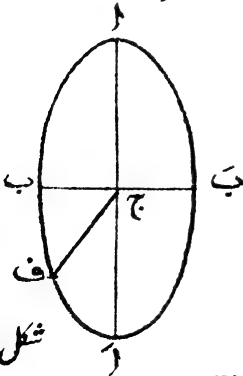


شکل (۹۸)

- (۱) نقطہ ف جو دائرہ کا وہ بلند ترین نقطہ ہے جس پر توازن غیر قائم ہے۔
- (۲) نقطہ ق جو دائرہ کا وہ زیر ترین نقطہ ہے جس پر توازن قائم ہے۔

۳۔ منکاجو تار پر پھسلے۔ ایک معین مسئلہ حاصل کرنے کے لیے

فرض کرو کہ منکاجو ایک ناقصی تار پر پھیلتا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ ایسا عمود اعظم  $ل$  انتصابی ہے۔ فرض کرو کہ منکے پر صرف اس کا وزن اور اس تنی ہوئی ڈوری کا تناؤ عمل کرتے ہیں جس کا



شکل (۹۹)

ایک سراسنکے سے اور دو سراسرہ ناقص کے مرکز سے بندھا ہے۔ فرض کرو کہ ناقص کے نیم محور  $ل$  'ب' ہیں اور فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول  $ل$  اور مقیاس  $ل$  ہے جہاں  $ل$  'ب' سے کم ہے اور اس لیے ڈوری ہمیشہ تنی ہوئی

رہتی ہے۔ فرض کرو کہ منکے کا وزن د ہے۔

پہلا کام کسی تشکیل میں توانائی بالقوہ کو محسوس کرنے کا ہے۔ فرض کرو کہ تشکیل کی تعین ناقص پر کے اس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ فہ سے ہوتی ہے جو منکا اختیار کرتا ہے۔ تب ناقص کے مرکز کے اوپر منکے کا ارتفاع  $\Delta$  جم فہ ہے اور اس لیے توانائی بالقوہ کا وہ حصہ جو تجاذبی قوتوں سے پیدا ہوتا ہے  $\Delta$  جم فہ ہے۔  
دوری کا طول مساوات

(۱)  $\Delta = \Delta$  جم فہ + ب<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> فہ  
سے حاصل ہوتا ہے۔ وہ کام جو دوری کو طول ل سے طول ر تک تنانے میں انجام پاتا ہے حسب وضع (۱۱۳)

$$\frac{\Delta}{r} (r - l)$$

ہے۔ اس کو توانائی بالقوہ کا وہ حصہ سمجھا جاسکتا ہے جو دوری کے تنانے سے پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے کل توانائی بالقوہ ہوگی

(ب)  $ک = \Delta$  جم فہ +  $\frac{\Delta}{r} (r - l)$

اب توازن کے محل  $\frac{فرق}{فرق} = ۰$  سے یا

(۱۸۰)

$$\Delta$$
 جب فہ -  $\frac{\Delta}{r} (r - l) = ۰$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس میں مساوات (۱) سے ر کی قیمت درج کی جائے تو

$$\Delta$$
 جب فہ +  $\frac{\Delta}{r} (ب^۲ - ب)$  جب فہ -  $\frac{\Delta}{r} (ب^۲ - ب)$  جب فہ +  $\frac{\Delta}{r} (ب^۲ - ب)$  جب فہ = ۰

منطق بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اصلیں جب فہ = ۰ سے اور نیز

$$[\Delta + \frac{\Delta}{r} (ب^۲ - ب)]$$



لا انتہا بڑا ہے تو انائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے

$$ک = \frac{ل}{ر-ل}^۲$$

اور اس صورت میں ک کی ترسیم کو شکل (۱۰۱) میں دکھایا گیا ہے۔ توازن کے چار محل

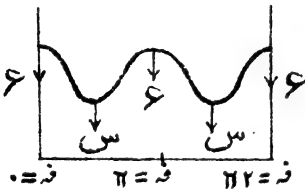
$$ف = ۰, \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۳\pi}{۲}$$

ہیں جو علی الترتیب غیر قائم، قائم، غیر قائم، قائم ہیں۔

وہ عام صورت جس میں لہ، و کے ساتھ محدود نسبت رکھتا ہے متذکرہ صدر دو انتہائی صورتوں کے درمیان واقع ہے۔ عام صورت میں ک کی ترسیم اشکال (۱۰۰) اور (۱۰۱) کی ترسیموں کو مرکب کرنے سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ فہ کی کسی قیمت کے متناظر سطحین معلوم کرنے کے لیے ہم ترسیموں (۱۰۰) اور (۱۰۱) کے نظیری معینوں کو

مناسب متقلات سے ضرب دیتے

ہیں اور جمع کرتے ہیں۔ ان دو معینوں سے جلد (ب) کی دو قمیں جدا گانہ ملتی ہیں اور ان کا مجموعہ ک کی کمال قیمت ہے۔



اس ہندسی عمل سے ظاہر ہے کہ تشکیل فہ = توازن کی غیر قائم تشکیل رہتی ہے۔ تشکیل فہ =  $\pi$  بھی

شکل (۱۰۱)

توازن کی تشکیل ہے لیکن وہ قائم یا غیر قائم ہو سکتی ہے۔ ان دو تشکیلات کے درمیان توازن کی ایک اور تشکیل ہو سکتی ہے جیسا کہ شکل (۱۰۱) میں پایہ کہ توازن کی کوئی تشکیل ہی نہ ہو جیسا کہ شکل (۱۰۰) میں۔ چونکہ دفعہ ۱۴۹ کی رو سے قائم اور غیر قائم تشکیلات متبادلاً واقع ہوتی ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ اگر تشکیل فہ =  $\pi$  قائم ہے تو اس کے اور فہ = ۰ کے درمیان کوئی اور توازن کی تشکیل نہیں ہو سکتی۔ لیکن اگر فہ =  $\pi$  غیر قائم ہے تو فہ =  $\pi$  اور فہ = ۰ کے درمیان توازن کی ایک تشکیل ہونی چاہئے اور یہ قائم ہونی چاہئے۔

اس لیے تشکیل فہ =  $\pi$  کی قائمیت یا غیر قائمیت سے لہ کی کسی معلومہ قیمت کے لیے حل کی نوعیت معلوم ہوتی ہے۔ یہ قائمیت یا غیر قائمیت فہ =  $\pi$  پر جف<sup>۱</sup> گ کی علامت سے متعین ہوتی ہے۔ اب اس کی علامت معلوم کرنے کے لیے فہ =  $\pi$  سے قریب  $\pi$  - فہ = طہ رکھو اور طہ سے چھوٹی رقموں کو نظر انداز کرو تو اس تقرب تک

$$\begin{aligned} \text{ر} &= \text{ا}^2 \text{جم فہ} + \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{فہ} \\ &= \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{جب}^2 \text{طہ} \\ &= \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{طہ}^2 \end{aligned}$$

اس لیے مساوات (ب) سے

$$\text{گ} = \text{و}^2 \text{جم فہ} + \frac{\text{ل}^2}{\text{ر}} (\text{ر} - \text{ل})$$

$$= - \text{و}^2 (1 - \frac{1}{\text{طہ}^2}) + \frac{\text{ل}^2}{\text{ر}} [1 - \frac{1}{\text{طہ}^2} (\text{ب}^2 - \text{طہ}^2)]$$

(۱۸۲) اس لیے جف<sup>۱</sup> گ =  $\frac{\text{و}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) (\text{ل} - \text{و})}{\text{ل}}$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فہ =  $\pi$  پر توازن قائم ہے یا غیر قائم بموجب اس کے کہ

$$\text{ل} > \text{یا} < \frac{\text{و}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{(\text{ل} - \text{و})}$$

خلاصہ یہ ہے کہ حسب ذیل دو صورتیں ہیں :

(۱) اگر ل >  $\frac{\text{و}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{(\text{ل} - \text{و})}$  تو توازن کے محل صرف فہ = ۰ اور

فہ =  $\pi$  ہیں جو علی الترتیب غیر قائم اور قائم ہیں۔

(۲) اگر ل <  $\frac{\text{و}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{(\text{ل} - \text{و})}$  تو توازن کے محل فہ = ۰ اور

فہ =  $\pi$  جس جو دونوں غیر قائم ہیں اور نیز ان کے درمیان توازن کا ایک قائم عمل ہے۔  
یہ آخری عمل مساوات (ج) سے معلوم ہوگا۔

## فاصل اور تعدیلی توازن

۱۵۱۔ اگر توازن کے محل پر جف<sup>۲</sup>ک جف<sup>۲</sup>لا صفر ہو تو توازن کو فاصل توازن کہتے ہیں۔ اب تک یہ بات منکشف نہیں ہوئی کہ جب کسی زنیام کو فاصل توازن کے محل سے خفیف طور پر ہٹایا جاتا ہے تو کیا وقوع پذیر ہوتا ہے۔  
توازن کے کسی محل کے قریب ک کی قیمت کو بالعموم شکل (دیکھو مساوات (۴۱))

$$ک = ک + \frac{1}{2} \left( \frac{جف^۲ ک}{جف^۲ لا} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{جف^۴ ک}{جف^۴ لا} \right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{۲۴} \left( \frac{جف^۶ ک}{جف^۶ لا} \right) + \dots (۴۳)$$

میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

اگر جف<sup>۲</sup>ک ف پر محذوم ہو تو ک کی قیمت میں سب اہم قوم وہ جسے ہمیں لاپے سے

$$ک = ک + \frac{1}{4} \left( \frac{جف^۳ ک}{جف^۳ لا} \right) + \dots$$

ک۔ ک ف علامت بدلتا ہے جبکہ وہ لا = ۰ میں سے گزرتا ہے جو توازن کی تشکیل ہے اور اس لیے ک کی ترسیم شکل (۱۰۲) جیسی ہے جس میں ایک نقی ماس ہے اور نقطہ ف، انعطاف کا نقطہ ہے۔ ایک جانب توانائی بالقوہ ف پر کی توانائی بالقوہ سے کم ہے اور دوسری جانب زیادہ۔

فرض کرو کہ ف کی ان دو جانبوں پر دو متصلہ تشکیلات ق ق ہیں۔ اگر نظام کو ق پر رکھا جائے تو اسے اس طرح حرکت کرنا چاہیے کہ توانائی بالقوہ گھٹے اور اس لیے اس کو ف سے دور حرکت کرنا چاہیے۔ اگر نظام کو ق پر



رکھا جائے تو اس کو اسی سبب سے اولاً ف کی جانب حرکت کرنا چاہئے لیکن وہ ف سے گزر کر پر سے حرکت کرے گا اور ف سے پر سے حرکت کرنا جاری رکھے گا کیونکہ وہ ساکن نہیں ہو سکتا تا آنکہ اس کی توانائی بالقوہ پھر ق پر کی توانائی بالقوہ کے مساوی نہ ہو جائے اور یہ ف کے قریب واقع نہیں ہو سکتا۔ اس لیے اگر نظام ف سے قریب کسی محل سے چلے تو وہ بالآخر ف سے دور حرکت کرنے لگے گا۔ دوسرے الفاظ میں توازن غیر قائم ہے۔ پس اگر ف پر جف<sup>۲</sup> / جف<sup>۳</sup> = . تو توازن بالعموم غیر قائم ہوتا ہے۔

لیکن وہ صورت مستثنیٰ ہوگی جبکہ جف<sup>۲</sup> / جف<sup>۳</sup> = . کیونکہ اس صورت میں

$$گ - ک = ف = \frac{۱}{۲۴} لا (جف<sup>۲</sup> / جف<sup>۳</sup>)$$

اس صورت پر حسب دفعہ ۴۸ بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ توازن

قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ (جف<sup>۲</sup> / جف<sup>۳</sup>) مثبت یا منفی ہو۔

۵۲۔ اس سے اعلیٰ ترددوں کی نادر صورتوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ ہمیں حسب ذیل عام قاعدے حاصل ہوتے ہیں :

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سرو معدوم نہیں ہوتا طاق رتبہ کا ہے تو توازن غیر قائم ہوتا ہے۔

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سرو معدوم نہیں ہوتا جفت رتبہ کا ہے تو توازن قائم یا غیر قائم ہوتا ہے بموجب اسکے اس کی علامت مثبت یا منفی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تمام تفرقی سر معدوم ہوں، اس صورت میں اس مسئلہ پر دوسرے طریقوں سے بحث کی جاسکتی ہے۔

مثلاً اگر تو انائی بالقوہ

(۱۸۴)

$$\text{گ} = \text{لا}^2 \text{قو}^{\frac{1}{10}}$$

شکل (۱۰۲)

کی شکل کی ہو تو تشکیل لا = ۰ میں تمام تفرقی سر معدوم ہوتے ہیں۔ تفاعل گ کی ترسیم کھینچتے پر معلوم ہوگا کہ توازن قائم ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ گ کے تمام تفرقی سر اس وجہ سے معدوم ہوں کہ اس پورے علاقہ میں جو زیر بحث تشکیل کے گرد ہے گ مستقل ہے۔ اگر ایسا ہے تو نظام کو ہٹایا جاسکتا ہے اور کوئی قوت نہیں ہوگی جو اس کو اس نئی تشکیل سے حرکت دے۔ ہر تشکیل توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس قسم کے توازن کو تعدیلی توازن کہتے ہیں۔

تعدیلی توازن کی ایک صورت مثال ۲ صفحہ ۲۵۸ میں واقع ہو چکی ہے، دروازہ جو قبضوں کے انتظامی خط کے گرد آزادانہ گھوم سکے۔ دوسری صورت ایک کرہ کی ہے جو افقی مستوی پر لڑھکتا ہو۔

## نظامات جنگو آزادی کے مختلف درجے حاصل ہوں

۱۵۳۔ اب تک ہم نے صرف ان نظامات پر بحث کی ہے جو تشکیلات کے صرف ایک سلسلہ میں سے حرکت کرنے پر مجبور تھے یعنی نظامات جن کو صرف آزادی کا ایک درجہ حاصل تھا۔ اس نظام کی قائمیت یا غیر قائمیت متعین کرنے کا مسئلہ جس کو آزادی کے ایک سے زیادہ درجے حاصل ہوں زیادہ پیچیدہ ہے۔

اگر توازن کے محل میں تو انائی بالقوہ مطلقاً اقل ہے اور اس لیے ہر ممکن حرکت سے تو انائی بالقوہ میں اضافہ ہو جاتا ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔ اسکو اسی استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو اس صورت میں استعمال کیا گیا تھا

جس میں آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل تھا۔  
اگر توانائی بالقوہ مطلقاً قتل نہیں ہے یعنی اگر ایسے ہٹاؤ ممکن ہیں  
جس میں توانائی بالقوہ گھٹتی ہے جبکہ نظام توازن کے محل سے حرکت کرتا  
ہے تو یہ تشکیل غیر قائم توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس کو آئندہ ثابت کیا جائیگا  
کیونکہ اس باب کے طریقوں سے اسے ثابت نہیں کیا جاسکتا اور اس لئے  
ہم اس کو آئندہ کے لئے چھوڑتے ہیں (بار ہواں باب)۔

## عام مثالیں

(۱۸۵)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک انجن کی اسی طاقت جو اس میل فی گھنٹہ کی چال سے  
س پاؤنڈ کی مزاحمت پر غالب آتا ہے حسب ذیل ہے:

۳۷۵ س

۲۔ ایک ٹرین معہ محرکہ (انجن) ۵۰۰ ٹن وزنی ہے۔ اس کو پہل  
فی گھنٹہ کی ایکسائز شرح سے ہمواری پر محرکہ رکھا گیا ہے، ہوا کی مزاحمت، رگڑ وغیرہ  
۲۰ پاؤنڈ فی ٹن ہیں۔ انجن کی اسی طاقت معلوم کرو۔

اس اسی طاقت میں کتنا اضافہ ہونا چاہئے کہ اس کی شرح تو وہی  
رہے لیکن اس کے ساتھ ہی پیٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی اس طور پر اڑھایا  
جائے کہ طے شدہ فاصلہ کے ہر فٹ پر اٹھائے ہوئے پانی کی مقدار ۲۰ پاؤنڈ ہو  
اور جس ارتفاع تک پانی اٹھایا گیا ہے وہ ۱۰ فٹ ہو۔ وہ توانائی بالحرکت جو  
پیٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی حاصل کرتا ہے اور وہ توانائی بالحرکت جو اٹھائے ہوئے  
پانی کی (بلحاظ میانک کے) ہے نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پہاڑی کے رخ ایسی شکل کے ہیں کہ ایک معلوم کمیت  
ان پر بغیر پھسلے عین اُبھیر سکتی ہے۔ ایک شخص چاہتا ہے کہ اس کمیت کو  
پہاڑی کے دامن کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جو قبل الذکر نقطہ کے  
متقاطع ہے حرکت دے۔ ثابت کرو کہ کمیت کو پہاڑی کے اوپر کھینچنے میں جو کام  
کرنا پڑتا ہے وہ اُس کام سے جو اس کو پہاڑی کے دامن کے گرد کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے

نسبت ۲:۱۱ میں کم ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ وہ کام جو ایک شخص ایک وزن کو پہاڑی کے اوپر ایک معلومہ نقطہ (۱) سے چوٹی (ب) تک کھینچنے میں انجام دیتا ہے صرف ۱۰ اور ب کے مقامات پر منحصر ہوتا ہے اور پہاڑی کی شکل پر منحصر نہیں ہوتا بشرطیکہ وہ ہمیشہ ۱۰ اور ب میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں وزن کو کھینچے۔

۵۔ ایک لچکدار رسی کے دو سروں کو شکل ۷ کے لکڑی کے ایک ٹکڑے کی دو شاخوں سے باندھ کر ایک متخیق بنائی گئی ہے، رسی کا طبعی طول ۱ ہے اور لچک کا مقیاس لہ ہے اور لکڑی کی شاخیں ایک دوسرے سے فاصلہ ل پر ہیں اور ل، ۱ سے بڑا ہے متخیق کے وسطی نقطہ پر کمیت ک کا ایک پتھر رکھا گیا اور اسے پیچے کی جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ رسی کا طول تن کر اپنے طبعی طول کا دو گنا ہو گیا۔ اب اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو معلوم کرو کہ کس رفتار سے متخیق سے نکلے گا۔

۶۔ مثال ۵ میں اگر پتھر کو انتصاباً اوپر وار پھینکا جائے تو وہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی بلندی تک چڑھے گا۔

۷۔ کمیت ک کا ایک ہارمنکوں سے بنایا گیا ہے جو ایک تاگے میں جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے پڑے گئے ہیں۔ اس کو ایک چلنے قائم مستدیر مخروط کی سطح پر جس کا زاویہ راس ۲۰° اور محور انتصابی ہے اس طرح سہارا گیا ہے کہ ہار ایک افقی مستوی میں ہے اور تاگتا ہوا نہیں ہے۔ اگر ہار کو چھوڑ دیا جائے تو وہ ساکن ہونے سے پیشتر مخروط کے نیچے کتنا پھسلے گا۔

۸۔ ایک اڑ پھیہ کا نصف قطر ۲ فٹ ۶ انچ ہے اور آروں وغیرہ کا وزن کو ر (Rim) کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہیہ ایک ثابت محور کے گرد فی منٹ ۲۵۰ گردشوں کی شرح سے گھوم رہا ہے، محور کا قطر ۳ انچ ہے اور یہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر  $\frac{1}{3}$  ہے۔ اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو رکنے سے قبل وہ کتنی گردشیں کرے گا۔

۹۔ ایک لکڑی چھت سے ایک تاگے کے ذریعہ جس کی لچک کا مقیاس

اُس کے وزن کے مساوی ہے لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ وہ چھت تک اتنا کام کر کے چڑھ سکتی ہے جو اُس کام کا صرف تین چوتھائی ہے جو مطلوب ہوتا اگر تاگا چلکار نہ ہوتا۔

۱۰۔ ایک ہمین تاگے کے دو پیروں سے دو مساوی وزن ف باندھ کر اس کو دو جکینی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ فاصلہ پر ہیں لٹکایا گیا ہے۔ پھر کھونٹیوں کے درمیان تاگے کے حصہ کے وسطی نقطہ پر کمیت ق باندھ کر اس کو باذہ کے تحت نیچے اترنے چھوڑ دیا گیا۔ ثابت کرو کہ اس کی رفتار گہرائی لا تک گرنے کے بعد حسب ذیل ہوگی :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ ج } (لا + لا') (ق + لا + ۲ف - لا - لا') \\ \frac{2 \text{ ج } (لا + لا') (ق + لا + ۲ف - لا - لا')}{ق (لا + لا') + ۲ف لا} \end{array} \right\}$$

۱۱۔ اگر تسلیم کیا جائے کہ زمین کی بیرونی جانب کسی جسم پر زمین کی کشش اُس فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے جو زمین کے مرکز اور جسم کے درمیان ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی سطح سے ایک گولی کو انتصاباً اوپر وار کس رفتار سے فائر کرنا چاہیے کہ وہ کبھی زمین پر واپس نہ آ سکے۔

۱۲۔ ایک بھاپ ہتھوڑی جس کا وزن ۳۰ ٹن ہے کچھ تو اپنے وزن سے اور کچھ اُس بھاپ کے دباؤ سے نیچے دبائی جاتی ہے جو ایک انتصابی اسطوانہ میں ایک فشارہ پر جو ہتھوڑی کے ساتھ حرکت کرتا ہے عمل کرتا ہے۔ فشارہ کا رقبہ چار مربع فٹ ہے اور بھاپ کا دباؤ ۲۵ پونڈ فی انچ ہے۔ اگر ہتھوڑی کو اپنے ہلاک سے ۲ فٹ اوپر اٹھایا جائے اور چھوڑ دیا جائے تو وہ رفتار معلوم کرو جس کے ساتھ وہ ہلاک سے ٹکرائے گی۔

۱۳۔ طول ل کے ایک یکساں ڈنڈے کے پیروں سے طول ل کی ایک ڈوری باندھی گئی ہے جو ایک جکینی کھونٹی پر سے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ڈنڈا صرف افقی یا انتصابی محل میں لٹک سکتا ہے ان محلوں کی قابلیت یا غیر قابلیت کا امتحان کرو۔  
۱۴۔ دو مساوی یکساں ڈنڈوں کو استوار طریقہ سے انگریزی حرف L کی شکل میں جوڑا گیا ہے اور پھر ان کو نصف قطر L کے ایک چکنے مستد یا اسطوانے پر سوا کر لیا گیا،

ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو جو توازن کی قائمیت کے مطابق ہوگا  
ڈنڈے ایک انتصابی مستوی میں جو اسطوانے کے طول پر عمود ہے رہنے کے لیے  
مقید ہوں۔

۱۵۔ ایک پتھر کا مکعب جس کے کنارے کا طول ۱ ہے قطر ب کے ایک  
کھردرے دائری کندے پر منٹا کٹا گیا ہوا ہے اور اس کا قاعدہ کندے پر افتاب ہے۔  
ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ  $b < 1$  یا  $b > 1$ ۔

۱۶۔ ایک جھوٹے والے پتھر ایک ثابت پتھر پر ٹکا ہوا ہے، تاس کھردرا ہے  
اور نقطہ تاس پر کا مشترک عماد انتصابی ہے۔ اگر نقطہ تاس پر ان پتھروں کی سطحوں کے  
نصف قطر انحناء غہ اور غہ ہوں اور اگر حرکت پذیر پتھر کے مرکز ثقل کا ارتفاع  $f$   
ہو تو ثابت کرو کہ جھوٹے والے پتھر کا توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{1}{f} < \text{یا} > \frac{1}{g}$$

۱۷۔ طول  $l$  اور وزن  $w$  کی ایک سیڑھی ایک کھردرے فرش پر انتصابی  
(۱۸۷) محل میں اس طرح کھڑی ہے کہ ایک لچکدار ڈوری اس کے سب سے اونچے نقطہ سے  
اور چھت کے ایک ایسے نقطہ سے بندھی ہے جس کا ارتفاع فرش کے اوپر  $b$  ہے  
اور ڈوری کا تناؤ  $T$  ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ

$$T < \text{یا} > \frac{w(b-l)}{b}$$

۱۸۔ اگر مثال ۱۷ میں تناؤ  $w$  (ب۔ ل)  $2b$  کے مساوی ہو تو معلوم کرو کہ  
توازن قائم ہے یا غیر قائم۔

۱۹۔ اگر مثال ۱۷ میں ڈنڈے فاصل طول کے ہوں جو قائمیت کو غیر قائمیت  
سے منفصل کرتا ہے تو ثابت کرو کہ توازن تعدیلی ہے اور اس لیے ڈنڈے بعض  
خاص حدود کے اندر کسی محل میں اس مستوی میں ساکن رہ سکتے ہیں جو اسطوانہ کے  
محور پر عمود ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ مثال ۱۷ میں ڈنڈے ان ہٹاؤں کے لحاظ سے قائم

توازن میں ہیں جن میں ڈنڈوں کا مستوی ایک انتہائی محور کے گرد گھومتا ہے ،  
اور وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈوں کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہے  
جس میں مستوی ، اسطوانے کے محور کے ساتھ کوئی معلومہ زاویہ ملے بناے ۔  
۲۱۔ مثال ماسبق میں ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو کہ تمام  
ملکن ہٹاؤں کے لیے توازن قائم ہو سکے ۔

۲۲۔ سخت ایلے ہوئے انڈے کے چپے اور نوکدار بیروں پر نصف قطر  
انحناء علی الترتیب ۱ اور ب ہیں اور انڈے کو ایک کھردرے افقی سطح پر اس کے  
چپے سرے کے بل عین متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کو اس کے  
نوکدار سرے پر ایک نیم کروی برتن کے اندر جس کا نصف قطر

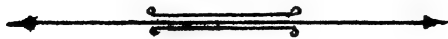
ب (ج - ۱)

ج - ب - ۱

سے کم ہو متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے جہاں ج انڈے کے طویل ترین محور کا طول  
ہے ۔ اگر برتن کا نصف قطر فاصل طول کے عین مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن  
قائم ہوگا یا غیر قائم ۔

۲۳۔ تین متساوی الفصل چکنی کھونٹیاں ۱ ، ب ، ج ایک ہی افقی  
خط میں ہیں اور ایک وزندار یکساں ڈوری کے سرے ۱ اور ج سے بند ہے  
ہیں اور ڈوری کو ب پر حلقہ بناتے ہوئے گزارا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب  
زنجیرے ۱ ب ، ب ج ، ج نامساوی ہوں تو یہ ہو سکتا ہے کہ توازن کا کوئی محل  
ہو یا نہ ہو اور اگر ایسا کوئی محل ہے تو یہ توازن قائم ہوگا ۔

نیز ثابت کرو کہ توازن کا وہ محل جس میں ڈوری کا وسطی نقطہ ب پر ہے  
غیر قائم یا قائم ہے بموجب اس کے کہ توازن کا غیر متشاکل محل موجود یا غیر موجود ہو ۔



## آٹھواں باب

(۱۸۸)

### مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت

۱۵۴۔ کسی واحد ذرہ کی حرکت کی سادہ ترین مثال اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ ذرہ صرف مستقل قوتوں کے زیر عمل ہو اور ایک خط مستقیم میں حرکت کرے۔ اگر ذرہ کی حرکت کی سمت میں قوت کا جزو ترکیبی  $F$  ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے  $asrac$  ع مساوات

$$F = k \cdot c$$

سے حاصل ہو گا جہاں  $k$  ذرہ کی کمیت ہے۔ چونکہ بموجب فرض قوتیں مستقل ہیں  $asrac$  ع بھی مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ذرہ رفتار  $c$  سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مستقل  $asrac$  کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ وقت  $t$  میں رفتار میں اضافہ  $c$  ہے اور اس لیے وقت  $t$  کے بعد کل رفتار  $c + c \cdot t$  ہے۔ اس رفتار کو  $w$  سے تعبیر کرو تو

$$w = c + c \cdot t \dots \dots \dots (۴۴)$$

تعریف کی بموجب  $w = \frac{فرس}{وقت}$  جہاں  $s$  وہ فاصلہ ہے جو حرکت کی ابتدا سے طے ہوا ہے۔ اس لیے



$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = ۶ + ع ت$$

اس مساوات سے کسی لمحہ پیرس کے اضافہ کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اس کا تکمل کرنے سے

(۲۵)  $س = ۶ ت + \frac{۱}{۲} ع ت^۲$   
تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ وقت  $ت = ۰$  پر فاصلہ طے شدہ (صبر تعریف)  $س$  صفر ہونا چاہئے۔

مساوات (۲۴) سے  $۶ = و - ع ت$  اور اس لیے مساوات (۲۵) لکھی جاسکتی ہے

(۲۶)  $س = و ت - \frac{۱}{۲} ع ت^۲$   
اس مساوات سے وقت  $ت$  میں طے شدہ فاصلہ معلوم ہوتا ہے (۱۸۹) جبکہ رفتار و معلوم ہو جہاں و فاصلہ طے شدہ کے ختم پر ذرہ کی رفتار ہے۔ مساواتوں (۲۵) اور (۲۶) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۲۷)  $س = \frac{۱}{۲} (و + ع) ت$   
جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ فاصلہ طے شدہ  $و$  عرت اور و ت کا اوسط حسابی ہے، عت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی ابتدائی رفتار  $و$  پورے وقت  $ت$  میں قائم رکھتا اور و ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی آخری رفتار  $و$  پورے وقت  $ت$  میں قائم رکھتا۔  
مساوات (۲۴) کو شکل

$ع ت = (و - ۶)$   
میں رکھو اور  $ت$  کو اس مساوات اور مساوات (۲۷) سے ساقط کرو تو حاصل ہوگا

(۲۸)  $۲ ع س = و^۲ - ۶ ع^۲$   
یہ وہ مساوات ہے جو طے شدہ فاصلہ کو ابتدائی اور آخری رفتاروں کے ساتھ مربوط کرتی ہے۔

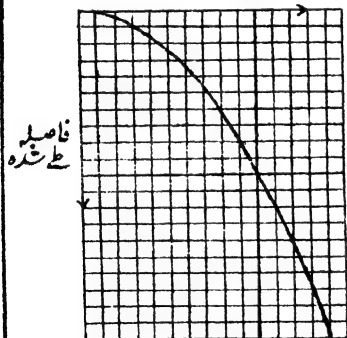
یہ آخری مساوات توانائی کی مساوات سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔  
چونکہ ذرہ پر جو کام ہوا ہے وہ اس کی توانائی یا حرکت کی تبدیلی کے مساوی  
ہے اس لیے

$$F \cdot s = \frac{1}{2} k v^2 - \frac{1}{2} k v_0^2$$

اور چونکہ  $F = k \cdot x$  اس لیے مساوات (۲۸) فوراً حاصل ہو جاتی ہے۔

### جسم جو جاذبہ کے تحت گرے

۱۵۵۔۔۔ ان مساواتوں کا سادہ ترین اطلاق اس صورت پر ہوتا ہے  
جبکہ کوئی جسم جاذبہ کے زیر اثر آزادانہ گر رہا ہو، اس صورت میں اس پر  $F = mg$  ہے  
اگر جسم سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو ہم  $v_0 = 0$  رکھتے ہیں  
اور  $s$  کو انتصاباً نیچے واپس لائیں کرتے ہیں۔ مساوات (۲۵) سے معلوم  
ہو گا کہ وقت  $t$  کے ختم پر جسم نے فاصلہ  $\frac{1}{2} g t^2$  طے کیا ہے  
اور اس کی رفتار  $v$   $t$  ہے۔ فاصلہ  $F$  تک گرنے پر اس کی رفتار حسب  
مساوات (۲۸)  $\frac{1}{2} g t^2$  کے مساوی ہے۔ اس کو بالعموم یونین  
کرتے ہیں کہ وہ ”رفتار بوجہ ارتفاع



”  $F$  ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ طے شدہ  
فاصلہ اس وقت کے مربع کے  
متناسب ہے جس میں جسم گرتا رہا۔  
شکل (۱۰۳) میں وقت کو افقاً  
پیمائش کیا گیا ہے اور فاصلہ طے  
شدہ کو انتصاباً۔ عمودی منحنی سے فاصلہ  
طے شدہ کی ترسیبی تعبیر حاصل ہوتی  
ہے۔ انہی فاصلہ کو لا سے اور

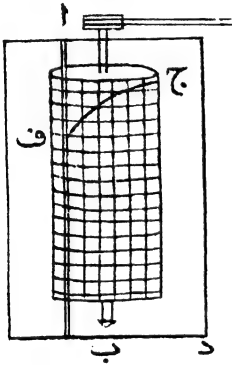
شکل (۱۰۳)

انتصابی فاصلہ کو  $h$  سے تعبیر کیا جائے تو لا  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  اور  $v = \sqrt{2gh}$  اور

اور اس لیے

$$م = \frac{1}{4} ج لا$$

۱۵۶۔ یہ ایک قطع مکانی کی مساوات ہے۔ اس ترسیم کو تجرباً اس طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو مارن (Morin) کا طریقہ کہلاتا ہے۔ وزن ف ایک سوراخ میں جو ایک ڈنڈے (ب) میں بنا ہوا ہوتا ہے اتصایا کرنے میں آزاد ہوتا ہے اور یہ انتظام کیا جاتا ہے کہ جب وہ گرتا ہے تو



شکل (۱۰۴)

اس سے لگی ہوئی ایک پینل ڈھول ج د جس میں کاغذ لگا ہوا ہوتا ہے نشان ڈالتی جاتی ہے۔ ڈھول کو یکساں طور پر گھمایا جاتا ہے۔ کاغذ کو ڈھول سے جدا کر لینے پر شکل (۱۰۳) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے کیونکہ افقی فاصلہ وقت کے متناسب ہوتا ہے اور انتصائی فاصلہ وہ فاصلہ ہوتا ہے جس میں سے وزن گرتا ہے۔ یہ واقعہ کہ اس

طریقہ سے حاصل شدہ منحنی ٹھیک طور پر مکانی ہوتا ہے اس حقیقت کا تجربی ثبوت ہے کہ جاذبہ کے تحت حرکت یکساں اسراع کی حرکت ہوتی ہے۔ ۱۵۷۔ اگر جسم کو انتصایا اوپر وار رفتار سے پھینکا جائے تو فاصلہ س کی پیمائش انتصایا اوپر وار ہو سکتی ہے اور اس سمت میں اسراع ج ہوگا۔ چنانچہ حاصل ہوگا

$$س = ع - \frac{1}{4} ج ست$$

$$د = ع - ج ت$$

$$۲ ج س = ع - د$$

جہاں س وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں اوپر وار طے ہوا ہے اور د اوپر وار

رفقار ہے پہلی مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $s = 0$ ۔ نہ صرف اس وقت جبکہ  $t = 0$ ۔ بلکہ اس وقت بھی جبکہ  $t = \frac{e^2}{c}$ ۔ اس لیے ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر وقت  $\frac{e^2}{c}$  کے بعد واپس پہنچتا ہے۔ جب  $s = 0$ ۔ تو دوسری مساوات سے  $e^2 = 0$  حاصل ہوتا ہے اس لیے جب ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے تو اس کی رفقار وہی ہوتی ہے جو یہاں سے نکلتے وقت اس کی تھی۔ صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ توانائی بالبقوہ وہی ہوتی ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت بھی وہی۔

## مثالیں

۱۔ اگر ایک ایکسپرس ٹرین کو دو حصوں میں جدا کر کے نصف اول کو ۵ منٹ قبل چلا دیا گیا ہو اور ٹرین ایک میل تک مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے کے بعد اپنی اعظم رفقار ۴۸ میل فی گھنٹہ حاصل کرے تو ثابت کرو کہ یہ دو نصف حصے ایک دوسرے سے ۴ میل کے فاصلہ سے حرکت کریں گے لیکن نصف اول نصف دوم کے نکلتے سے پیشتر ۳ میل جا چکا ہوگا۔

۲۔ ایک ٹرین دوسری ٹرین سے جو متوازی پٹریوں پر دوڑ رہی ہے گزر جاتی ہے، اول الذکر کی رفقار ۴۵ میل فی گھنٹہ اور اسراع ایک فٹ فی ثانیہ ہے، دوسری کی رفقار ۳۰ میل فی گھنٹہ اور اسراع ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے۔ یہ دوسری ٹرین پھر کب پہلی ٹرین کو ملا لے گی اور اس اثنا میں دونوں کتنا فاصلہ طے کر چکی ہوں گی۔

۳۔ ایک جسم کو ایک غبارے سے جو زمین سے ۲۰ فٹ اونچا ہے گرایا گیا ہے اس کی رفقار زمین پر پہنچنے پر معلوم کرو اگر غبارہ ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفقار سے (۱) چڑھ رہا ہو (ب) اتر رہا ہو۔

۴۔ ایک تپھر کو ایک کنویں میں چھوڑا گیا تو پانی سے ٹکرانے کی آواز ۹ ثانیہ بعد

کنویں کے سرے پر سٹائی دی۔ کنویں کی گہرائی معلوم کرو اگر آواز کی رفتار ۱۱۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۵۔ ایک آلہ بار بردار ۵ فٹ فی ثانیہ کے اسراع سے نیچے اترتا ہے یہاں تک کہ اس کی رفتار ۳۰ فٹ فی ثانیہ ہو جاتی ہے اور اس کے بعد اس کی رفتار مستقل رہتی ہے۔ اترنا شروع کرنے کے ۶ ثانیہ بعد ایک پتھر اُس نقطہ سے جہاں سے وہ چلا تھا اس پر گرایا جاتا ہے۔ پتھر کس قدر جلد اُس سے جا لگے گا۔

۶۔ ایک بازیگر تین گولوں کو ایک ہاتھ سے اس طرح اُچھلاتا ہے کہ کسی آن دو گولے ہوا میں رہتے ہیں اور ایک اُس کے ہاتھ میں۔ اگر ہر گولہ ۱۰ فٹ تک اونچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں ایک گولہ اُس کے ہاتھ میں رہتا ہے  $\frac{1}{4}$  ثانیہ ہے۔

۷۔ یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک جسم جہاز کے دروازہ کے راستہ سے اس کے پیٹے کی تہ تک گرنے میں جو گ فٹ گہرا ہے ت ثانیے لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ فاصلہ

$$\frac{1}{2}g \left( \frac{g}{c} + \frac{1}{2}t \right) \text{ فٹ}$$

میں سے گرتا ہے اور رفتار

$$\frac{g}{c} + \frac{1}{2}gt \text{ فٹ فی ثانیہ}$$

سے تہ پر ٹکراتا ہے۔

۸۔ ۱۲ فٹ لمبی زنجیر اپنے اوپر کے سرے سے لٹک رہی ہے۔ اگر اس سرے کو چھوڑ دیا جائے تو وہ وقت معلوم کرو جو زنجیر ایک نقطہ سے جو ابتدائی محل کے بلند ترین نقطہ سے ۶۰ فٹ نیچے ہے گزرنے میں لے گی۔

۹۔ ایک جسم جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے اور جو ۱۶۰ فٹ فی ثانیہ کی چال سے حرکت کر رہا ہے دفعتاً ایک مستقل مزاحمت کے مقابل ہوتا ہے جو  $\frac{1}{16}$  پونڈ وزن کے مساوی ہے، یہ مزاحمت اس وقت تک رہتی ہے کہ

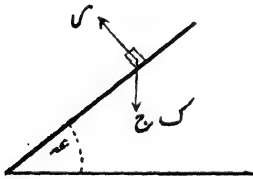
اس کی رفتار ۹۶ فٹ ہو جاتی ہے۔ کتنی دیر تک اور کتنے فاصلہ تک مزاحمت عمل کرتی ہے۔

۱۰۔ مال کے دو ڈبے باہم جوڑے گئے ہیں اور انہیں افقی پٹریوں پر ایکساں قوت سے کھینچا گیا ہے چنانچہ وہ سکون سے حرکت کر کے پہلے دس ثانیوں میں ۱۰۰ فٹ کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ اس کے بعد پچھلے ڈبے کو جکڑ لیا گیا تو معلوم ہوا کہ دوسرے دس ثانیوں میں ان دو ڈبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵۰ فٹ ہے۔ ڈبوں کی کمیتوں کا مقابلہ کرو جبکہ ہوا وغیرہ کی کل مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہو۔

۱۱۔ ایک غبارہ جس کا وزن ۱۰ ہے اسراع  $a$  سے چڑھ رہا ہے۔ اگر اس میں سے وزن  $w$  کی ریت نکال لی جائے تو غبارے کے اسراع میں اضافہ معلوم کرو جبکہ ہوا کی مزاحمت اور ریت کا تیراؤ نظر انداز کئے گئے ہوں۔

## مال مستوی پر حرکت

۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہم ایک ذرہ کو ایک مال مستوی پر نیچے پھسلنے دیتے ہیں جبکہ ان دو کے درمیان تماس کامل چکنا تسلیم کر لیا گیا ہو۔ اگر ذرہ کی کمیت



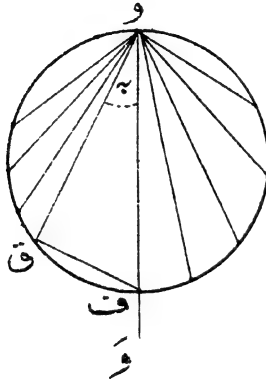
شکل (۱۰۵)

ک ہے تو اس پر عمل کرنے والی قوتیں دو ہیں اس کا وزن  $mg$  اور تعامل  $R$  جو مستوی پر عمود ہے۔ وزن کا جزو ترکیبی مستوی کے نیچے وار  $mg \sin \alpha$  ہے اور اس لیے ذرہ یکساں اسراع  $a$  جب  $a$  سے حرکت کرتا ہے۔

وقت  $t$  میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے اس کو معمولی ضابطوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر ذرہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرے تو وقت  $t$  میں وہ فاصلہ  $\frac{1}{2} a t^2$  جب  $a$   $x$  ت طے کرے گا۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ نقطہ  $O$  سے بہت سے چلتے تار جن میں چلتے ہوئے ایک آزاد

پھسل سکتے ہیں لگائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ تار سمت انتصابی کے ساتھ تمام ممکن (۱۹۳)

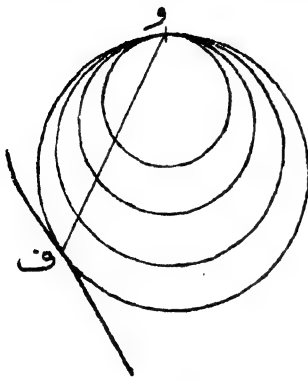


شکل (۱۰۶)

زاوے بناتے ہیں اور ان میں سے ایک تار و انتصابی ہے۔ خیال کرو کہ سب منکے نقطہ و پر جمع ہیں اور ایک ساتھ چھوڑ گئے ہیں۔ وقت کے بعد فرض کرو کہ وہ منکا جو انتصاباً گر رہا ہے نقطہ ف پر ہے اور وہ منکا جو اس تار پر پھیلتا ہے جو انتصابی سے زاویہ بہ بناتا ہے نقطہ ق پر ہے۔ یہ دوسرا منکا اسراع ج جم بہ سے حرکت کرتا ہے۔

پس و ف =  $\frac{1}{4}$  ج ت<sup>۲</sup> اور وق =  $\frac{1}{4}$  ج جم بہ x ت<sup>۲</sup> اس لیے وق = و ف جم بہ اور اس لیے وق ف قائمہ زاویہ ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق اس کرہ پر ہے جس کو قطر و ف پر بنایا گیا ہو اور صریحاً یہ ہر دیگر منکے کے لیے درست ہے۔ اس طرح کسی لمحہ پر تمام منکے اس کرہ پر ہونگے جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جس کا زیر ترین نقطہ و کے نیچے  $\frac{1}{4}$  ج ت<sup>۲</sup> فاصلہ پر ہے۔ پس جب حرکت جاری رہتی ہے تو منکے ایک کرہ بناتے ہوئے نظر آئیں گے جو جسامت میں مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس کا بلند ترین نقطہ و پر ساکن رہے گا اور زیر ترین نقطہ جاذبہ کے تحت آزادانہ گرتا ہوا معلوم ہوگا۔

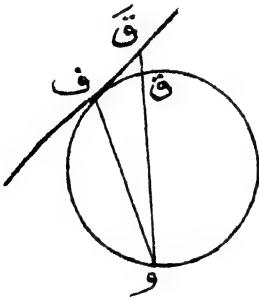
۱۶۰۔ اس خیالی تجربہ سے ایک عملی مسئلہ کو حل کرنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم ایک چکنے مستوی یا تار کو ایسے محل میں رکھنا چاہتے ہیں کہ ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و سے مستوی یا تار پر نیچے گزرتے ہوئے ایک معلومہ ثابت سطح تک کم سے کم ممکن وقت میں پہنچ جائے۔ فرض کرو کہ



شکل (۱۰۶)

ہم تاروں اور منکوں کے آگے کو و پر رکھتے ہیں اور منکوں کو ایک ساتھ چھوڑتے ہیں اور اس کرہ کی جسامت اضافہ مشاہدہ کرتے ہیں جو منکوں بنتا ہے۔ جو ہی کرہ ایسی جسامت اختیار کرتا ہے کہ وہ ثابت سطح کو کسی نقطہ ف پر رس کرنے لگتا ہے منکوں میں سے ایک منکا اس سطح پر پہنچ چکتا ہے اور مزید بریں دوسرے منکوں کی یہ نسبت کم وقت میں پہنچ جاتا ہے۔ اس لیے اس نے و سے سطح تک وہ راستہ اختیار کیا ہے جس پر سے وہ سطح تک جلد سے جلد پہنچ جاتا ہے۔ یہ راستہ و ف ہے اور اب ہم اس راستہ کا تعین بغیر تجربہ کی نیچمیل کے کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ وہ کرہ جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جو و ف میں سے گزرتا ہے سطح کو ف پر رس کرنا چاہئے۔

اسی طرح اگر ہم وہ اقل وقت معلوم کرنا چاہیں جس میں ذرہ ایک سطح سے اس کے نیچے کے ایک ثابت نقطہ تک حرکت کرتا ہے تو ایک ایسا کرہ معلوم کرنا ہوگا جو سطح کو نقطہ



شکل (۱۰۸)

ف پر رس کرے اور اس کا زیرین نقطہ و ہو۔ تب و ف مطلوبہ راستہ ہوگا۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس کرہ کے ان تمام دتروں پر سے گزرنے میں جو و میں سے گھٹنے گئے ہوں جو وقت صرف ہوتا ہے ایک ہی ہے اس لیے و ف و پر

(۱۹۲)



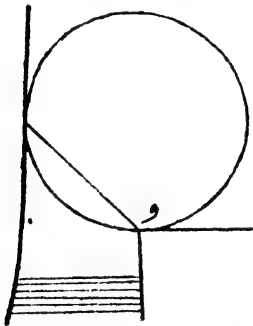
گزرنے میں جو وقت صرف ہو گا وہ اُس وقت کے مساوی ہے جو کسی دتر ق و پر سے گزرنے میں صرف ہوتا ہے اور اس لیے یہ وقت اُس وقت سے کم ہے جو سطح سے و تک پورے راستہ ق و پر سے گزرنے میں لگتا ہے کیونکہ ق و اس راستہ کا ایک حصہ ہے۔

## توضیحی مثال

ایک جہاز اپنے چبوترے سے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہے اور جہاز کے رُخ کے کسی نقطہ پر چبوترے سے ایک تختہ اس طرح رکھنا مطلوب ہے کہ تختہ پر جہاز سے چبوترے تک پھسلے گا وقت حتی الامکان کم سے کم ہو۔

صریحاً تختہ کا پھیلا سراجبوترے کے قریب ترین نقطہ و پر لگنا چاہئے اور مسئلہ کا حل اس مسئلہ پر منحصر ہو جاتا ہے کہ ایک کرہ کھینچا جائے جس کا زیر ترین نقطہ و ہو اور

وہ جہاز کے رُخ کو مس کرے۔ یہ تسلیم کر کے کہ جہاز کا رُخ انصافی ہے تختہ کے سروں پر کرہ کے تماس افقی اور انصافی ہونے چاہئیں اور اس لیے تختہ کو اس طرح رکھنا چاہئے کہ وہ سمت انصافی کے ساتھ ۴۵ کا زاویہ بنائے۔



(۱۹۵)

## مثالیں

شکل (۱۰۹)

۱۔ ایک جسم کو مائل مستوی پر جس کا زاویہ میلان ۴۵ ہے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ وہ مستوی کے اوپر کتنی دور جائے گا اور اوپر جانے میں کتنا وقت لگے گا۔

۲۔ دو ذرے ایک دوسرے مائل مستوی کے دونوں پرجن کے میلان

عہ اور بہ ہیں نیچے پھسلتے ہیں مستوی کے قاعدے تک پہنچنے میں جو اوقات وہ لیتے ہیں ان کا مقابلہ کرو اور نیز انکی رفتاروں کا مقابلہ بھی کرو۔  
۲۔ طول ل اور ارتفاع ف کے ایک ماٹل مستوی پراس کی چوٹی سے ایک جسم نیچے پھینکا گیا ہے اور اسی آن ایک دوسرے ذرہ کو انتصافاً نیچے گرنیکے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں ذرے قاعدہ سے ایک ہی وقت نکرائیں تو ثابت کرو کہ پہلے ذرہ کی رفتار پھینکتے وقت

$$\frac{L}{2} \sqrt{\frac{2g}{F}}$$

ہونی چاہئے۔

۴۔ ایک ثابت نقطے سے ایک دائرہ تک جو اسی مستوی میں ہے سر پہ ترین اتار کا خط معلوم کرنے کے لیے عمل دریافت کرو۔

۵۔ ذرے متعدد تاروں پر جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں نیچے پھسل رہے ہیں ان ذروں نے اس نقطہ سے حالت سکون سے ایک ساتھ حرکت شروع کی تھی۔ ثابت کرو کہ کسی لمحہ پر ان کی رفتاروں میں وہی نسبت ہے جو ان کے طے کردہ فاصلوں میں ہے۔

۶۔ ریل کا ایک ڈبہ ایک سطح ماٹل پر جس کا میلان ۲۵۰ میں ۱ ہے ۱۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے نیچے حرکت کرتا ہے اور سطح کے پائیں پر پہنچنے کے بعد ہوا سطح پر حرکت جاری رکھتا ہے۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی دور حرکت کر سکے گا جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت مستقل ہے اور حرکت کی ہر منزل میں وہی ہے۔

۷۔ اگر ایک موٹر گاڑی جو ۱۰۰ کیلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہو ۲۰۰ میٹر کے فاصلہ میں روکی جا سکے تو ثابت کرو کہ ہر ایک گاڑی کو تقریباً ۵ میں ۱ میلان پر ٹھہرا سکتے ہیں۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جس میں گاڑی کو ساکن کیا جا سکتا ہے۔

۸۔ ۱۲ ٹن وزنی ڈبہ ایک ٹرین سے جو ۲۵۰ میں ۱ میلان پر بیچے ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے الگ ہو جاتا ہے۔ رگڑ کی مزاحمت ۴۰ پونڈ وزن

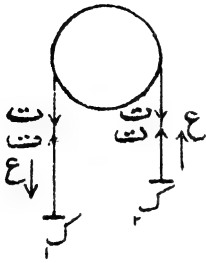
فی ٹن ہے۔ معلوم کرو کہ ڈپہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی دُور جائے گا۔  
 ۹۔ حرّا کہ کی کھینچ ایک ٹرین کی حرکت پر معمولی مزاحمتوں کے مقابلہ میں اسکے کل وزن کا  $\frac{1}{10}$  بڑی ہے، اور جب بریک پوری طرح ڈالے جاتے ہیں تو کل مزاحمت اسکے کھمے وزن کا  $\frac{1}{10}$  واں حصہ ہوتی ہے۔ وہ کم سے کم وقت معلوم کرو جس میں ٹرین ہموار سطح پر دو اسٹیشنوں کے درمیان جن کا درمیانی فاصلہ تین میل ہے اور جہاں گاڑی ٹھہرتی ہے سفر کر سکتی ہے۔  
 ۱۰۔ مثال مابقی میں وقت معلوم کرو اگر راستہ ۱۰۰ میں امیلان پر ہو۔

### ایوڈ کی مشین

۱۶۱۔ اگر کوئی جسم جاذبہ کے تحت آزادانہ گرا رہا ہو تو راستہ مشاہدات سے اس اسراع کو پیمائش کرنا مشکل ہوتا ہے جو جاذبہ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے کیونکہ یا تو وہ فاصلہ جس میں سے جسم گرا ہے بہت بڑا ہونا چاہئے یا گرنے کا وقت بہت کم ہونا چاہئے۔ یہ مشکلیں کچھ مدت تک اس مشین سے رفع ہوتی ہیں جو ایوڈ کی تجویز کردہ ہے۔

(۱۹۶) اگر ایک دُوری کو جس کے سروں سے دو مساوی اوزان بندھے ہوں ایک چکنی انتصابی چرخ پر اس طرح رکھا جائے کہ اوزان آزادانہ لٹکیں تو یہ ظاہر ہے کہ توازن ہوگا۔ اگر اوزان نامساوی ہوں تو توازن موجود نہیں ہو سکتا۔ ایوڈ کی مشین میں ان اوزان کے درمیان فرق کم رکھا جاتا ہے، اس لئے حرکت سست ہوتی ہے اور اس کی پیمائش آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ اوزان کی کمیتیں کم، کم ہیں جن میں سے کم بڑا ہے۔ فرض کرو کہ جب ان اوزان کو آزاد چھوڑ دیا جاتا ہے تو کم اسراع ع سے نیچے اترتا ہے۔ دُوری کو نامتناہی دیر سمجھنے سے کم کو اسراع ع سے اوپر چڑھنا چاہئے۔

فرض کرو کہ دُوری غیر وزنی ہے اور اس لیے اس کے کسی عنصر کی کمیت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ پس حرکت کے دوسرے قانون سے



شکل (۱۱۰)

معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری کے کسی عنصر پر عمل کرنے والی حاصل قوت معدوم ہونی چاہئے۔ اس لیے ڈوری پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہونی چاہئیں (اگرچہ کہ ڈوری ساکن نہیں ہے) اور اس لیے حسب دفعہ (۵۴) تمام نقطوں پر متناوب دہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ یہ تیناؤ

ت ہے۔  
کمیتوں ک، ک میں سے ہر ایک پر عمل کرنے والی قوتیں اس کے وزن پر جو نیچے وار عمل کرتا ہے اور ڈوری کے تناؤ پر جو اوپر وار عمل کرتا ہے مشتمل ہیں۔ اس لیے ان دو کمیتوں پر نیچے وار حاصل قوتیں علی الترتیب ک، ج۔ ت اور ک، ج۔ ت ہیں۔ پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$ک، ج - ت = ک، ع$$

$$ک، ج - ت = -ک، ع$$

اگر ت کو ساقط کیا جائے تو

$$(۴۹) \quad ع = \frac{ک - ک}{ک + ک} ج$$

جس سے اسراع معلوم ہوتا ہے۔ اگر ع کو ساقط کیا جائے تو ت کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$(۵۰) \quad ت = \frac{ک - ک}{ک + ک} ج$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ک تقریباً ک کے مساوی ہو تو اسراع چھوٹا ہوگا۔ مثلاً اگر انداز ۱۰۰ اور ۱۰۱ گرام ہوں تو

$$ع = \frac{۱}{۲۰۱} ج = ۰.۰۰۵ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ$$

(۱۹۷) اتنا چھوٹا اسراع آسانی سے پیمائش کیا جاسکتا ہے کیونکہ زیادہ وزنی کمیت ۱۰ اشیائیوں میں صرف ۸ فٹ نیچے اُترے گی۔ غلا یہ دشواری پیدا ہوتی ہے کہ اگر وزنوں کے فرق کو بہت چھوٹا کر دیا جائے تو تجربی پر عمل کرنے والی قوتیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ ان کا فرق سہاروں کی رگڑ وغیرہ پر غالب آنے کے لیے کافی نہیں ہوتا۔

## متحرک فریم کے حوالے سے حرکت

۱۶۲۔ ہم دیکھ چکے ہیں (صفحہ ۲۵) کہ حرکت کا دوسرا قانون درست رہتا ہے جبکہ حرکت کو ایک ایسے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا گیا ہو جو ساکن نہیں ہے بلکہ ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اب اس قانون میں ترمیم کرنا آسان ہے جبکہ حوالے کا فریم ایک معلومہ اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ فرض کرو کہ حوالے کے فریم کا اسراع  $a$  ہے اور فرض کرو کہ اس اسراع  $a$  کی سمت میں ایک متحرک ذرہ کے اسراع کا جزو ترکیبی  $a_x$  ہے اور فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا جزو ترکیبی اس سمت میں  $F_x$  ہے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$F_x = m a_x \quad (۵۱)$$

جہاں  $a_x$  وہ ترکیبی اسراع ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ لیکن اس اسراع  $a_x$  کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جاسکتا ہے جن میں سے ایک ذرہ کا اسراع  $a$  ہے جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے اور دوسرا اس فریم کا اسراع  $a_f$  ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ چونکہ یہ سب اسراع ایک ہی سمت میں ہیں اس لیے  $a_x = a + a_f$  اور اس لیے مساوات (۵۱) ہو جاتی ہے

$$F_x = m (a + a_f)$$

اس کو ہم شکل

$$F_x = m a_f + m a \quad (۵۲)$$

میں بھی لکھ سکے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حرکت وہی ہے گویا کہ فریم ساکن ہے بشرطیکہ ہم خیال کریں کہ قوت  $F$  کو بقدر  $k$  عہ کے گھٹا دیا گیا ہے۔

اس نتیجہ کی طبعی توجیہ آسانی سے کی جاسکتی ہے۔ قوت  $F$  کا ایک حصہ جو  $k$  عہ کے مساوی ہے ذرہ کو متحرک حوالے کے فریم کی حرکت کے ساتھ متحرک کرنے میں صرف ہوتا ہے۔ صرف باقی حصہ  $F - k$  عہ ہی ہے جو متحرک فریم کے لحاظ سے اسراع پیدا کرنے میں کارآمد ہے۔

۱۶۳۔ فریم جو انتصابی اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ (۱۹۸)

اگر حوالے کا فریم اسراع  $a$  عہ کے ساتھ نیچے وار انتصاباً حرکت کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس فریم کے لحاظ سے اسراعوں کو پیمائش کرنے سے پیشتر کمیت  $k$  کے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے انتصابی جزو ترکیبی کو بقدر  $k$  عہ کے تخفیف شدہ سمجھنا چاہئے۔ خواہ کوئی قوتیں عمل کریں ان میں ذروں کے اوزان  $k$  ج وغیرہ ضرور ہوں گے۔ ہم یہ آسانی تخفیف  $k$  عہ کو ان سے وضع کردہ فرض کر سکتے ہیں چنانچہ کسی ذرہ کے وزن کو  $k$  ج لینے کی بجائے  $k$  (ج۔ عہ) لینا ہوگا۔

اس طرح حوالے کے فریم کے اسراع کی رعایت یہ فرض کر کے رکھی جاسکتی ہے کہ اسراع بوجہ جاذبہ  $J$  کی بجائے  $J - k$  عہ میں تخفیف ہوا ہے۔ مثلاً اگر ایٹوم  $1$  مشین کو آلہ بابر دار میں رکھا جائے تو اس  $1$  جس پر آلہ کا اسراع  $a$  اور پر وار عہ چوکیتوں کا اسراع مشین کے لحاظ سے (مقابلہ کرو مساوات ۴۹ کے ساتھ)

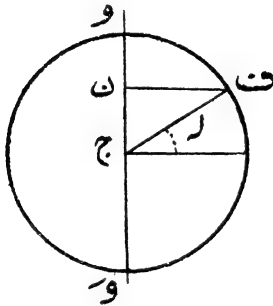
$$E = \frac{m_1 - k}{m_1 + k} (J + a)$$

ہوگا اور ڈوری کا تناؤ (دیکھو مساوات (۵۰))

$$ت = \frac{۲ ک_۱ ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ج + ع) \quad \text{ہوگا۔}$$

۱۶۲۔ ج کی قیمت پر زمین کی گردش کا اثر۔ ہم دیکھ چکے ہیں

(دفعہ ۲۵) کہ حوالے کا فریم جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ثابت ہو زمین کے محور کے گرد اس کی گردش کے باعث ایک اسراع رکھتا ہے۔



شکل (۱۱۱)

فرض کرو کہ زمین کا محور و و ہے اور فرض کرو کہ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں کوئی نقطہ ف ہے۔ زمین کو نصف قطر لہ کا ایک کرہ سمجھئے سے نقطہ ف، نصف قطر لہ کا ایک دائرہ متسم کریگا

جس کا مرکز زمین کے محور پر نقطہ ن ہوگا۔ اگر وہ رفتار ہو جس سے نقطہ ف یہ دائرہ متسم کرتا ہے تو ف کا اسراع حسب دفعہ ۱۲،  $\frac{۲}{لجم لہ}$  دائرہ کے مرکز کی

جانب ہوگا یعنی ف ن کی سمت میں۔

(۱۹۹) فرض کرو کہ زمین کی زاویائی رفتار سہ ہے یعنی فرض کرو کہ وہ فی اکائی وقت سہ نیم قطری زاوے میں سے گردش کرتی ہے۔ اب جس وقت میں ف ایک مکمل دائرہ متسم کرتا ہے اسی وقت میں زمین ایک مکمل گردش کر لیتی

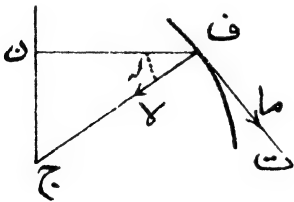
ہے یعنی  $\frac{\pi ۲}{سہ}$ ، یہ وقت  $\frac{\pi ۲}{لجم لہ}$  کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے

$$\begin{aligned} و &= ل سہ جم لہ \\ \text{اب حوالے کے فریم کا اسراع سمت ف ن میں} \\ \frac{۲}{لجم لہ} &= سہ لجم لہ \end{aligned}$$

ہے۔ اس لیے اُس فریم کے حوالے سے جو ف کے ساتھ حرکت کر رہا ہے کسی ذرہ کی حرکت کو محسوب کیا جاسکتا ہے گویا کہ حوالے کا فریم ساکن ہے بشرطیکہ سمت ف ن میں قوت کے جزو ترکیبی کو بقدر ک سہ ارجم لہ کے گھٹا دیا گیا ہو۔

پس کل قوت عاملہ، اُن قوتوں پر جو فی الواقعی عمل کرتی ہیں اور ایک قوت ک سہ ارجم لہ پر جو سمت ن ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جائے شعل سمجھی جاسکتی ہے۔ اس آخری قوت کو زمین کی کشش کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک قوت ماصل ہوگی جس کو ہم ف پر جاذبہ کی ظاہری قوت کہہ سکتے ہیں۔ اس طرح حوالے کے فریم کی حرکت کی رعایت زمین کی اصلی کشش کی بجائے جاذبہ کی ظاہری قوت کو استعمال کرنے سے رکھی جاسکتی ہے۔ یہی وہ ظاہری جاذبہ ہے جو تجربی طور پر متعین ہوتا ہے اور ہمیشہ کسی نقطہ پر ذرہ کے وزن سے یہی جاذبہ مراد لیا جاتا ہے۔

نقطہ ف پر کسی جسم کا ظاہری وزن معلوم کرنے کے لیے اس کے اصلی وزن (فرض کرو) ک ج کو ایک قوت ک سہ ارجم لہ کے ساتھ جو ن ف پر عمل کرتی ہے مرکب کرنا ہوگا۔ فرض کرو کہ اس آخری قوت کو سمتوں ف ج اور ف ت میں اجزائے ترتیبی



ک سہ ارجم لہ، ک سہ ارجم لہ جب لہ میں تحلیل کیا گیا ہے جہاں ف ت نقطہ ف پر ماس ہے۔

سمت ف ج میں عمل کرنے والی قوت ک ج کے ساتھ مرکب کرنے سے ظاہری وزن کے اجزائے ترکیبی لا، ما، علی الترتیب

سمتوں ف ج، ف ت میں حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

(۵۳)

لا = ک (ج - سہ ارجم لہ)

(۵۴)

ما = ک سہ ارجم لہ جب لہ

شکل (۱۱۲)



مرج لینے اور جمع کرنے اور ظاہری وزن کو حسب معمول ک ج سے تعبیر (۲۰۰) کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ک^۲ ج^۲ = لا^۲ + ما^۲ = ک^۲ (ج - ۲ سہ^۲ ج + جم^۲ لہ + سہ^۲ لہ جم^۲ لہ)$$

(۵۵)

زمین کے قطر کو ۷۹۲۷ میل اور ج کی قیمت کو (جو قطب شمالی پر اسراع بوجہ جاذبہ عرض ہے) ۳۲۵، ۳۲۵ لینے سے آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{۱}{ج} = \frac{سہ^۲ لہ}{۲۹۰}، تقریباً$$

اس کا مرج اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کو پہلے تقرب کی حد تک نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور مساوات (۵۵) کو شکل

$$ج = ج - سہ^۲ لہ جم^۲ لہ$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

اس طرح عرض بلد لہ میں ظاہری وزن اصلی وزن سے بقدر ک سہ^۲ لہ جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے یا تقریباً کل وزن کا  $\frac{۱}{۲۹۰}$  جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے۔

ظاہری وزن نصف قطر ج ف پر عمل نہیں کرتا۔ اگر ہم اس کو نصف قطر کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہوئی سمت میں عمل کرتا ہوا فرض کریں مساواتوں (۵۳) اور (۵۴) سے حاصل ہوگا

$$مس طہ = \frac{ما}{لا} = \frac{سہ^۲ لہ جم^۲ لہ جب لہ}{ج - سہ^۲ لہ جم^۲ لہ}$$

$$= \frac{۱}{۲۹۰} جم^۲ لہ جب لہ، تقریباً$$

اس سے کسی نقطہ پر زمین کے نصف قطر سے خط شاقول کا انحراف حاصل ہوگا۔

## متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات

۱۶۵۔ تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ ربط

ف = مہ ص

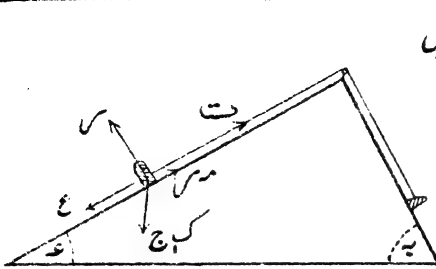
(جس میں ف اور م ص، دو اجسام کے درمیان تعامل کے عا سی اور عادی اجزائے ترکیبی ہیں) بڑی حد تک درست رہتا ہے جبکہ اجسام ایک دوسرے پر سے پھسل رہے ہوں۔ رگڑ کی قدر مہ کی قیمت بالکل وہی نہیں ہوتی ہے جو اجسام کے ساکن ہونے کی صورت میں ہوا کرتی ہے بلکہ حرکت کی صورت میں مہ کی قیمت ہمیشہ قدرے بڑی ہوتی ہے۔

دو جسموں کے درمیان رگڑ جبکہ اجسام ایک دوسرے پر پھسل رہے ہوں حرکت کی رگڑ کہلاتی ہے، لیکن اگر اجسام ساکن ہوں تو اس کو سکونی رگڑ کہتے ہیں۔

## توضیحی مثالیں

۱۔ کمیتوں کم اور کم کے دو ذرے، زاویوں عہ اور یہ کے دو مائل مستویوں پر جو ایک دوسرے سے جڑے ہوئے ہیں رکھے ہیں اور وہ ایک دوسرے کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستویوں کے سرے پر ایک چکنی چرخ پر سے گزرتی ہے۔ اگر ذروں اور مستویوں کے درمیان رگڑ کی قدریں مہ، مہ ہوں تو حاصل حرکت معلوم کرو۔

اگر حرکت فی الواقعہ وقوع پذیر ہوتی ہے تو ایک ذرہ کم (فرض کرو) کو اپنے مستوی پر نیچے وار حرکت کرنی چاہئے اور دوسرے کم کو اوپر وار۔ چونکہ دوری نا امتداد پذیر ہے اس لیے ہر ایک ذرہ کا اسراع وہی ہوگا، فرض کرو کہ یہ اسراع سمت حرکت میں ع ہے۔



پہلے ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں

حسب ذیل ہیں :

(۱) اس کا وزن کم ج

انتصافاً نیچے وار

(ب) ڈوری کا تناؤ ت

مستوی کے اوپر وار

شکل (۱۱۳)

(ج) مستوی کا تعامل - فرض

کر کہ اس کو مستوی کے عمود وار اور مستوی کے اوپر وار سمت میں اجزاء  $C$  اور  $T$  میں تحلیل کیا گیا ہے۔

چونکہ مستوی کے عمود کی سمت میں ذرہ کم کا کوئی اسراع نہیں ہے اس لئے حاصل قوت کا جزو ترکیبی اس سمت میں صفر ہونا چاہئے۔ پس اس سمت میں تحلیل کرنے سے

$$C - W \sin \alpha = 0$$

مستوی کے نیچے وار تحلیل کرنے سے

$$C \cos \alpha - T = 0$$

اور اگر ہم نامعلوم تعامل  $T$  کو ساٹھا کریں تو

$$C \cos \alpha - (C \sin \alpha - T) = 0 \quad (۱)$$

اسی طرح کی مساوات دوسرے ذرہ کی حرکت کے لیے حاصل کیجا سکتی ہے۔ یعنی

$$C_1 \cos \alpha_1 - (C_1 \sin \alpha_1 - T) = 0 \quad (ب)$$

ع کے لیے ان مساواتوں (۱) اور (ب) کو حل کرنے سے اسراع حاصل ہوتا ہے

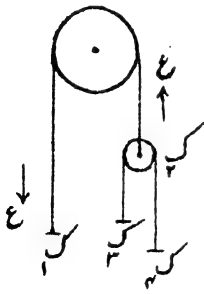
$$C = \frac{C_1 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha + \sin \alpha_1} \quad (ج)$$

اگر  $C$  کی یہ قیمت منفی نکلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اس سمت میں نہیں ہو سکتا

(۲۰۲)

جس میں حرکت کا واقع ہونا ہم نے فرض کیا ہے۔  
اگر نظام سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو مفروضہ سمت میں حرکت  
ناممکن معلوم ہوتی ہے اور ہمیں اس کا امتحان کرنا چاہئے کہ آیا مخالف سمت میں  
حرکت ممکن ہے۔ اگر یہ بھی ناممکن معلوم ہو جائے تو نظام ساکن رہے گا۔  
لیکن اگر سمت مفروضہ میں نظام متحرک ہوا ہے تو مساوات (ج) سے حاصل شدہ  
اسراع عمل میں آجائے گا اور وہ مثبت ہوگا تو رفتار میں اضافہ ہوگا  
اور منفی ہوگا تو رفتار گھٹے گی۔ اس آخری صورت میں نظام کسی وقت ساکن ہو جائے گا  
اور پھر ہمیں امتحان کرنا چاہئے کہ آیا وہ سمت مخالف میں حرکت کرنا شروع کرے گا  
یا نہیں۔

۲۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے کمیت  
ک کا ایک وزن بندھا ہے۔ دوسرے سرے پر کمیت کپ کی  
ایک چرخہ لگی ہوئی ہے جس پر سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے  
سروں سے کمیتیں کپ، کپ لٹک رہی ہیں۔ حرکت معلوم کرو۔  
فرض کرو کہ کمیت ک کا اسراع ع ہے جس کو نیچے دیا جائے گا۔



تب ک کا اسراع اوپر وار ع ہونا چاہئے۔  
کمیتیں کپ، کپ سے خود ایک ایٹوڈ کی  
مشین کا نظام حاصل ہوگا جو کل کا کل اسراع  
ع سے اوپر وار حرکت کرے گا۔ پس  
اس مشین کی ڈوری کا تناؤ ت (فرض کرو)  
حسب ذیل ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۳):

$$ت = \frac{۲ککپ}{ک + کپ} (ع + ع) (۱)$$

شکل (۱۱۴)

اگر اس ڈوری کے تناؤ کو جو ک اور ک کو ملاتی ہے ت سے تعبیر کریں تو

ک<sub>۱</sub> کے لئے حرکت کی حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

(ب) 
$$ک_۱ - ک_۲ = ج - ۲$$
 
$$ک_۱ = ک_۲ + ج$$
 اور ک<sub>۱</sub> کے لئے حرکت کی مساوات ہے

(ج) 
$$ک_۱ - ج = ک_۲$$
 مساواتوں (۱) و (۲) سے (ج) سے ک<sub>۱</sub> اور ک<sub>۲</sub> کو ساقط کرنے سے اسراع ج کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$ج = \frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} = \frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲}$$

کیتوں ک<sub>۱</sub> ک<sub>۲</sub> کے اسراع بجاظاک<sub>۱</sub> کے دفعہ ۱۶۳ کی رو سے حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں:-

$$\pm \frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ج + ع)$$

۳۔ ایک افقی دائرہ پر مساوی فاصلوں سے ن چھوٹے چکنے چھٹے

ثبت کر دئے گئے ہیں اور ان حلقوں میں سے ایک بے سر تاگا بالترتیب

گزر رہا ہے۔ اگر پھٹوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیانی حصہ کے تاگے

سے علی الترتیب کیتوں ف، ق، س، کی ن چرخیاں بھاری گئی ہوں

اور ڈوری کے وہ حصے جو چرخوں کو مس نہیں کرتے انتصابی ہوں تو ثابت

کرو کہ چرخ ف، اسراع

$$ج = \frac{\frac{۱}{ق} + \frac{۱}{س} + \frac{۱}{ف} + \dots}{\frac{۱}{ق} + \frac{۱}{س} + \frac{۱}{ف} + \dots}$$



اور مساوات (۱) میں ۲ ت کی بجائے یہ قیمت درج کرنے پر  $\frac{1}{2}$  کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایوڈ کی مشین میں ڈوری کا تناؤ اس سے ٹٹکی ہوئی دو کمیتوں کے اوزان کے درمیان ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ تناؤ ان وزنون میں سے بڑے کی بہ نسبت چھوٹے سے قریب تر ہوتا ہے۔

۲۔ ۱۶ اور ۱۴ اونس کے دو وزن ایک نا اعتماد پذیر ڈوری کے ذریعہ ٹٹکی ہیں جو ایک چکنی چرنخی پر سے گزرتی ہے۔ اوزان ڈوری سے انتہائی لٹکتے ہیں اور اور ڈوری کو ایک نقطہ پر ثابت کر دیا گیا ہے تاکہ کوئی حرکت وقوع پذیر نہ ہو سکے۔ اگر اچانک ڈوری کو چھوڑ دیا جائے تو چرنخی پر کے دباؤ میں جو تبدیلی ہوگی اس کو معلوم کرو۔  
۳۔ ایک ڈوری ایک پٹنے مینز پر سے اس کے مقابل کے کناروں کے علی القواٹم گزرتی ہے اور اس کے سروں سے دو کمیتیں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{4}$  انتہائی لٹکتی ہیں۔ اگر ڈوری کے اس حصہ پر جو مینز پر ہے ایک کمیت  $\frac{1}{2}$  لگادی جائے تو ثابت کرو کہ نظام کا اسراع حسب ذیل ہوگا:

ف - ق

ج

۴۔ ایک ڈوری کے دو سروں سے دو کمیتیں کم، کم، بانڈمی گئی ہیں (۲۰۴) اور ڈوری کو ایک کھونٹی پر سے گزارا گیا ہے جیسا کہ ایوڈ کی مشین میں کیا جاتا ہے۔ کھونٹی چکنی نہیں ہے اور اس میں اور ڈوری کے درمیان رگڑ کا زاویہ صفر ہے حرکت معلوم کرو۔

۵۔ مثال ۳ میں فرض کرو کہ مینز اور وزن کے درمیان رگڑ کی قدر صفر ہے اور مینز اور ڈوری کے درمیان صفر ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

۶۔ ایک رسمی ایک چکنی چرنخی پر سے لٹک رہی ہے۔ وہ ایکساں اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ ایک شخص کو جس کا وزن ۱۰ اسٹون ہے اسی کے ایک سروں پر

چڑھنا چڑے گا تاکہ کسی جس کے دوسرے سرے سے ۱۲ اسٹون کا وزن بندھا ہے ساکن رہے۔

۷۔ ایٹوم کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے ایک بندر بندھا ہوا ہے اور دوسرے سرے پر اتنا وزن بندھا ہوا ہے جو ٹھیک بندر کے وزن کے مساوی ہے اور چرخہ سے ٹھیک اتنے ہی نیچے ہے۔ بندر دفعتاً اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ کون تیز تر چڑھے گا بندر یا وزن۔

۸۔ ۱۔ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن جو انتصابی ڈوریوں سے لٹک رہے ہیں پھینکے اور محور پر متوازن ہیں۔ اگر ایک پونڈ کی کمیت کا اضافہ چھوٹے وزن میں کر دیا جائے تو وہ اسراع معلوم کرو جس سے وہ نیچے اترنے لگے گا، نیز ہر ڈوری کا تناؤ دریافت کرو۔ (پھینکے اور محور کا جمود نظر انداز کر دیا جائے)۔

۹۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت ایک چکنے مستوی پر جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے لٹکی ہوئی ہے اور اس سے ایک ہمین تا کا بندھا ہے جو مستوی کی چوٹی پر ایک ایک چرخہ پر سے گزرتا ہے جس کے دوسرے سرے سے ۳ پونڈ کی کمیت انتصاباً لٹک رہی ہے۔ تاکے کی بھیج کا مقابلہ کرو جبکہ مستوی پر کی کمیت کو ثابت رکھا جائے اور جبکہ اسے آزاد چھوڑ دیا جائے۔ اگر کمیت کو آزاد چھوڑنے کے ۸ ثانیے بعد نائے کو دفعتاً جدار کر لیا جائے یا جلا دیا جائے تو معلوم کرو کہ کمیت مستوی کے اوپر کیچھے پلٹنے سے پیشتر کتنی دور تک اوپر چڑھے گی۔

۱۰۔ ایک ہلکا تا کا دو ثابت چرخوں (۱ اور ۲) پر سے گزرتا ہے اور ان کے درمیان اس پر ایک تیسری چرخہ ج کا قالب ہے جس کے نیچے سے وہ گزرتا ہے۔ کمیت 'ک' تاکے کے ہر ایک سرے سے باندھی گئی ہے اور کمیت 'ک' حرکت پذیر قالب سے بندھی ہے۔ چرخوں کی کمیتیں قابل نظر انداز ہیں اور چرخوں کو اس سطح ترتیب دیا گیا ہے کہ تاکے کے تمام حصے انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ جب نظام کو چھوڑ دیا جائے تو تاکے کا تناؤ 'ک' (رگ + ک) پونڈ ہے۔ نیز وہ اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ کمیت 'ک' گرتی ہے۔

۱۱۔ کمیت 'ک' کا ایک پلکار پٹہ جس کا طبعی طول 'ل' اور مقیاس 'ل' ہے



محیط ب (۱ <) کے ایک کھردرے افقی پھٹے کے گرد پٹیا گیا ہے۔ کتنی تیزی سے پھیلا کوٹھا ناچا ہئے کہ پٹ پھیلا سے نکل جائے۔

۱۲۔ مثال ۱۱ کا پلکدار پٹہ محیط ب کے ایک چکنے کرہ پر جو زاویائی رفتار سے کے ساتھ گھوم رہا ہے رکھا گیا ہے۔ سکون کا محل معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر زمین تیز سے تیز تر اور اس سے تیز تر گھومنے لگے حتیٰ کہ بالآخر اجسام اس کے خط استوا سے اُڑنے لگیں تو ثابت کرو کہ اس منزل کے پہنچنے تک کسی نقطہ پر خط شاقول زمین کے محور کے متوازی ہو جائے گا۔

۱۴۔ ایک جسم کو ایک پچیدار ترازو پر رکھا گیا ہے اور ترازو ایک جہاز میں ہے جو خط استوا پر رفتار و سے حرکت کر رہا ہے۔ ترازو صحیح طور پر وزن دکھلاتا ہے جبکہ جہاز ساکن ہو۔ ثابت کرو کہ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ترازو کی قوت سے جسم کے وزن کا  $\frac{1}{2}$  سے گنا خطا (تقریباً) ظاہر ہوتی ہے جہاں سے زمین کی زاویائی رفتار ہے۔

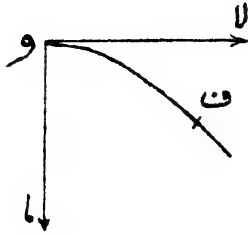
## مرمیوں کی پرواز

(۲۰۵)

۱۶۶۔ مرمی سے کہاں مراد وہ جسم ہے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک ذرہ تصور کیا جاسکے اور جو اس طریقہ سے پھینکا گیا ہو کہ وہ جاذبہ کے اثر کے تحت راستہ طے کرے۔

کوئی مرمی جاذبہ کے ساتھ ساتھ ہوا کی مزاحمت سے بھی بالغوم متاثر ہوگا لیکن ہم فرض کریں گے کہ ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہے اور اس لیے جاذبہ ہی صرف وہ قوت ہے جس کا لحاظ رکھنے کی ضرورت ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول سادہ ترین صورت لیتے ہیں جتنا سچہ خیال کرو کہ مرمی کو نقطہ و (شکل ۱۱۶) سے رفتار و کے ساتھ افقاً پھینکا گیا ہے۔ عمل کرنیلی قوت صرف جاذبہ ہے جس کا افقی جزو تسکیمی کوئی نہیں ہے اور اس لیے افقی رفتار و پوری حرکت کی ابتدا میں علیٰ حالہ رہتی ہے۔ ابتدائی رفتار کا



شکل (۱۱۶)

انتصابی جزو ترکیبی صفر ہے لیکن  
نیچے وار اسراع بوجہ جاذبہ ج ہے  
اس لیے وقت ت کے بعد افقی  
فاصلہ طے شدہ ع ت ہے اور وہ  
انتصابی فاصلہ جس میں سے جسم  
گرجکا ہے  $\frac{1}{4}$  ج ت ہے۔  
افقی فاصلہ طے شدہ کو لا سے  
اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر  
کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = ع ت، \frac{1}{4} ج ت = ما$$

راستہ طے شدہ کی مسادات، ان مساواتوں سے ت کو ساقط  
کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = \frac{ج}{\frac{ع}{2}} = \frac{2ج}{ع}$$

یہ مساوات ایک قطع مکانی کی ہے جس کا وتر خاص  $\frac{2ج}{ع}$  ہے۔

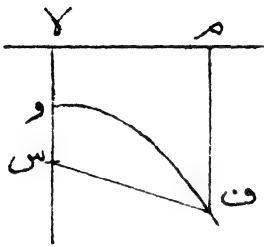
صریحاً اس منحنی کو متعین کرنے کا مسئلہ فی نفسہ وہی ہے جو دفعہ ۱۵۶ میں

زیر بحث آچکا ہے۔ وہاں ایک جسم آزادانہ گر رہا تھا اور اپنا راستہ ایک کاغذ پر  
جو ایکساں افقی رفتار کے ساتھ اس سے گذر رہا تھا حتم کرنا تھا۔ یہاں بھی ایک جسم  
آزادانہ گر رہا ہے اور ہم تصور کر سکتے ہیں کہ وہ اپنا راستہ ایک کاغذ پر حتم کرتا ہے  
جس سے وہ ایک ایکساں افقی رفتار سے گذرنا جاتا ہے۔ ان دو صورتوں میں  
اضافی حرکت وہی ہے اور اس لیے منحنی ضرور وہی ہونے چاہئیں۔

(۲۰۶) ۱۶۷۔ و پر رفتار ع ہے اور یہ رفتار وہی ہے جو اُس صورت میں ہوتی

اگر جسم و کے انتصاباً اوپر ارتفاع  $\frac{2ج}{ع}$  سے نیچے و تک گرتا۔ یہ ارتفاع

و ترخاص کا ایک چوتھائی ہے اور اس لیے مرتب لاہر کے نیچے مکانی کے  
راس و کی گہرائی کے مساوی ہے۔ اس لیے و پر مری کی کل توانائی اُس  
کل توانائی کے مساوی ہے جو سکون کی حالت میں لا پر اس کی ہوتی یا مرتب کے  
کسی اور نقطہ پر ہوتی کیونکہ مرتب



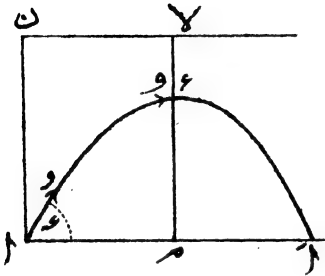
انفی ہے۔ اب چونکہ کل توانائی مستقل  
رہتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ذرہ  
اپنے راستہ کے کسی نقطہ ف پر ہوتا  
ہے تو اس کی توانائی بالحرکت وہ ہوتی  
ہے جو فاصلہ ف م میں سے گرنے کی  
وجہ سے اس کو حاصل ہوتی ہے یعنی  
اُس فاصلہ میں سے جو مرتب سے  
نقطہ ف تک ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے:

شکل (۱۱ء)

کسی نقطہ پر مری کی رفتار وہ ہوتی ہے جو مرتب سے اُس نقطہ  
تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔

۱۶۸۔ یہ فرض کرنے کی بجائے کہ ذرہ کو مکانی کے راس و سے اچھا پھینکا  
گیا ہے ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ وہ و پر ہوا میں سے پرواز کرتے ہوئے پہنچا ہے  
اور اس سے پیشتر اس کو کسی نقطہ (سے پھینکا گیا تھا۔ اُسی استدلال  
سے جس سے یہ معلوم ہوا تھا کہ و سے گزرنے کے بعد ذرہ کے راستہ کا  
حصہ مکانی ہے یہ معلوم ہوگا کہ و پر پہنچنے سے پیشتر بھی اس کا راستہ  
مکانی ہے۔ اس لیے کسی ذرہ کا راستہ جو کسی طریقہ سے پھینکا گیا ہو مکانی  
ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ کو نقطہ (سے ایک ایسی سمت میں رفتار و  
سے پھینکا گیا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ اس کے



راستہ کار اس و ہے اور فرض  
کرو کہ جب مرئی نقطہ و میں سے  
گزرتا ہے تو اس کی رفتار ۶ ہے  
یہ رفتار بے شبہ افقی ہے۔  
ذرہ پر عمل کرنے والی کوئی  
افقی قوت نہیں ہے اور اس لیے  
اس کی افقی رفتار اس کی پوری  
پرداز میں مستقل رہتی ہے۔  
اس لیے

(۲۰۷)

اس لیے مکانی کاوتر خاص  $۶ = و \cdot ج$   
شکل (۱۱۸)

$$\frac{۶^۲}{ج} = \frac{۲^۲}{ج}$$

رفتار و وہ ہے جو مرتب سے ۱ تک گرنے کی وجہ سے پیدا  
ہوتی ہے اس لیے اگر ن لا مرتب ہو تو

$$\frac{۲}{ج} = ن$$

۱ سے و تک پرواز کا وقت وہ وقت ہے جو جاذبہ انتصابی نقا  
و جب ۶ کو معدوم کرنے میں لیتی ہے اس لیے وہ  $\frac{۶}{ج}$  ہے۔ اوقت

میں افقی فاصلہ ۱ مہیکساں رفتار ۶ سے طے ہوا ہے، ایسے  
 $۱ م = \frac{۶}{ج} = و$  جب ۶ جم ۶

طے شدہ انتصابی فاصلہ و مہو جب مساوات (۲۰۷) نصف وقت مضروب  
ابتدائی انتصابی رفتار کے مساوی ہے، اس لیے

$$و م = \frac{1}{2} \frac{و ا ج ب^2}{ج}$$

افقی مسُوی پر پورا پیہ ۱' ۱' (م کا دگنا ہے اور اس لیے

$$۱' ۱' = \frac{۲ و ا ج ب^2}{ج} = \frac{۲ و ا ج ب^2}{ج}$$

۱۶۹۔ اگر و کی قیمت مستقل ہو (مثلاً اگر ہم گولی کو بارود کی ایک مقررہ

بھرن سے فائر کرتے رہیں) اور زاویہ عم متغیر ہو تو پیہ ۱' ۱' (و سے

تجاو ز نہیں کر سکتا کیونکہ جزو ضروری جب ۲ عم کی قیمت اکائی سے زیادہ

نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اگر پھینکنے کی رفتار و معلوم ہو تو بڑے سے

بڑا پیہ جو افقی مسُوی پر حاصل ہو سکتا ہے و سے ہے اور اس پیہ کو حاصل

کرنے کے لیے جب ۲ عم = ۱ ہونا چاہئے یعنی عم = ۴۵°۔ پس کسی

مرمی کو افقی مسُوی پر حتی الامکان دور پھینکنے کے لیے اس کو زاویہ ۴۵° پر

پھینکنا چاہئے۔

۱۷۰۔ ان نتائج کو تجلیلی طور پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کر دو کہ ہم

نقطہ رمیدگی کو مبداء لیتے ہیں اور اس مسُوی کو جس میں پرواز واقع ہوتی ہے

مسُوی لا ما فرض کرتے ہیں چنانچہ

مجاور لا اور ما علی الترتیب افقی

اور انصبابی ہیں۔

اس نقطہ کا لا محدود جس پر

ذره وقت ت کے بعد پہنچتا ہے

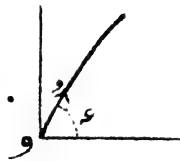
اس افقی فاصلے کے مساوی ہے

جو وقت ت میں یکساں رفتار و جم عم سے طے ہوتا ہے۔ اس لیے

لا = و جم عم ت

اسی طرح اس نقطہ کا لا محدود فاصلہ ہے جو وقت ت میں تبدیلی

رفتار و جب عم اور ابطاج کے ساتھ طے ہوا ہے۔ اس لیے یہ فاصلہ



شکل (۱۱۹)

لا = و جم عم ت (۵۶)

اسی طرح اس نقطہ کا لا محدود فاصلہ ہے جو وقت ت میں تبدیلی

رفتار و جب عم اور ابطاج کے ساتھ طے ہوا ہے۔ اس لیے یہ فاصلہ

ما = وجب عہ x ت -  $\frac{1}{2}$  ج ت<sup>۲</sup> ..... (۵۷)  
ہے۔ اگر ہم مساواتوں (۵۶) اور (۵۷) سے ت کو سا قط کریں تو راستہ  
کی مساوات حاصل ہوگی چنانچہ

$$ما = لا مس عہ - \frac{2}{2} و^۲ جم^۲ عہ \frac{ج لا^۲}{ج} \dots \dots (۵۸)$$

اس کو شکل

$$ما - \frac{1}{2} و^۲ جم^۲ عہ = - \frac{ج}{2} و^۲ جم^۲ عہ \left( \frac{لا - و^۲ جم^۲ عہ}{ج} \right)$$

میں رکھا جاسکتا ہے جو سرکھا ایک قطع مکانی کی مساوات ہے جس کا  
راس نقطہ

$$لا = \frac{و^۲ جم^۲ عہ}{ج} ، ما = \frac{1}{2} و^۲ جم^۲ عہ \frac{ج}{ج} \dots \dots (۵۹)$$

پر ہے اور جس کے وتر خاص کا طول

$$\frac{2 و^۲ جم^۲ عہ}{ج}$$

ہے۔

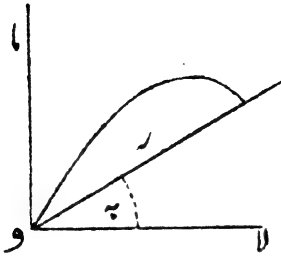
افقی مستوی پر بیہ حاصل کرنے کے لئے وہ نقطہ معلوم کرنا چاہئے  
جس میں یہ مکانی خط ما = کو قطع کرتا ہے۔ مساوات (۵۸) میں ما =  
رکھنے سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{2 و^۲ جم^۲ عہ}{ج} مس عہ = \frac{و^۲ جم^۲ عہ}{ج}$$

جو دفعہ ۱۶۸ میں حاصل شدہ قیمت کے مطابق ہے۔

**پہ ماثل مستوی پر**

۱۷۱۔ فرض کرو کہ مری کو نقطہ رمیدگی و میں سے گزرنے والے



ایک مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے۔  
فرض کرو کہ اس مستوی کا میلان  
افق کے ساتھ یہ ہے اور فرض  
کرو کہ اس مستوی پر مرمی کا ٹپہ رہے۔  
پس اس نقطہ کے محدود جس پر مرمی  
مستوی سے ٹکراتا ہے

$$لا = رجم یہ = ما = رجب یہ$$

ہونے چاہئیں۔

یہ نقطہ قطع مکانی پر ہونا چاہئے

اور اس لیے اس کے محدودوں کو مساوات (۵۸) پوری کرنی چاہئے۔ ان  
محدودوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$رجب یہ = رس عہ جم یہ - \frac{ج ر جم یہ}{۲ و ۲ جم عہ}$$

جس سے ٹپہ ر کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$ر = \frac{۲ و ۲ جم عہ جب (عہ - یہ)}{ج ر جم یہ} \dots \dots (۶۰)$$

چونکہ ۲ جم عہ جب (عہ - یہ) = جب (۲ عہ - یہ) - جب یہ ... (۶۱)  
اس لیے ظاہر ہے کہ اگر صرف عہ کو بدلنے دیا جائے تو ٹپہ ر اعظم ہوگا جبکہ  
جب (۲ عہ - یہ) اعظم ہو یعنی جبکہ وہ اکائی کے مساوی ہو۔ اس قیمت  
کو حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$عہ = \frac{۲}{۲} + \frac{۱۱}{۲}$$

(۶۱) اس لیے اعظم ٹپہ حاصل کرنے کے لیے ہم مرمی کو اس سمت میں  
پھینکتے ہیں جو مائل مستوی اور انتصابی کے درمیانی زاویہ کی تضعیف کرتی ہے۔  
جب رمیدگی اس سمت میں واقع ہوتی ہے تو اعظم ٹپہ مساوات

(۶۰) سے حاصل شدہ رکی قیمت میں جب (۲عہ - یہ) = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے - چنانچہ

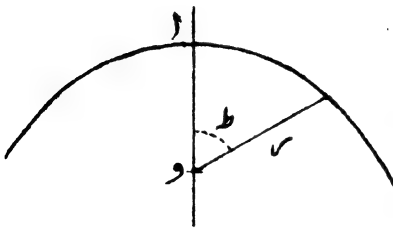
$$\begin{aligned} \frac{2}{ج} = \frac{2}{ج} \cdot \frac{جم ۲ عہ جب (عہ - یہ)}{جم ۲ عہ جب (عہ - یہ)} \\ \frac{2}{ج} = \frac{2}{ج} \cdot \frac{جب (۲عہ - یہ) - جب یہ}{جم ۲ عہ جب (عہ - یہ)} \\ \frac{2}{ج} = \frac{2}{ج} \cdot \frac{۱ - جب یہ}{جم ۲ عہ جب (عہ - یہ)} \\ \frac{2}{ج} = \frac{2}{ج} \cdot \frac{۱ + جب یہ}{جم ۲ عہ جب (عہ - یہ)} \end{aligned}$$

(۶۲)

۱۶۲ - اس مساوات سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ معلوم ہو سکتا ہے جو مری کسی سمت میں طے کر سکتا ہے جبکہ اس کو رفتار و سے پھینکا گیا ہو - فرض کر دو کہ ہم یہ کی بجائے  $\frac{1}{2}$  - طہ رکھتے ہیں اور اس لیے طہ وہ زاویہ ہے جو مری کی سمت انتصابی کے ساتھ بناتی ہے - اب کر اور طہ میں ربط ہے

$$\frac{2}{ج} = \frac{2}{ج} \cdot \frac{۱ + جب طہ}{جم ۲ عہ جب (عہ - یہ)} \quad (۶۳)$$

اس کو قطبی محدود کر، ط میں مساوات سمجھنے سے صریحاً یہ ایک ایسے منحنی کی مساوات ہے کہ اس کے اندر کسی نقطہ پر ہم ایک مری کے ذریعہ جو رفتار و سے فائر کیا گیا ہو ضرب لگا سکتے ہیں لیکن اس کے باہر کسی نقطہ تک مری کو نہیں پہنچا سکتے - ہم جانتے ہیں کہ وتر خاص ل کے قطع مکانی کی قطبی مساوات اس کے واسطے اور محور کے حوالے سے حسب ذیل ہے:



شکل (۱۲۱)



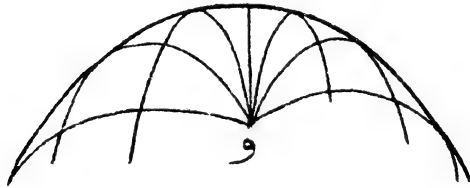
$$\frac{L}{1 + \text{جم طہ}} = \sqrt{}$$

اس کا مقابلہ مساوات (۶۳) کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ نقطہ رمیدگی ہے اور محور انتصابی ہے اور نیم وتر خاص  $\frac{1}{2}$  ہے۔

## راستوں کا لفاف

(۲۱۱)

۱۷۳۔ اگر ہم ان تمام مکافیوں کا تصور کریں جن کو مری جو نقطہ و سے زقارہ کے ساتھ فائر کیے گئے ہوں مرسوم کرتے ہیں تو ہمیں شکل (۱۲۲) کے مشابہ ایک شکل حاصل ہوگی۔ مری و نی جلی منحنی صریحاً ان نقطوں کو جن پر مری پہنچ سکتے ہیں ان نقطوں سے جن پر مری نہیں پہنچ سکتے جدا کرتا ہے۔ اس لیے یہ وہ مکانی ہے جس کی مساوات (۶۳) سے حاصل ہوتی ہے۔ شکل (۱۲۲) کے مطالعہ سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ منحنی مکافیوں



شکل (۱۲۲)

کے اس نظام کا لفاف ہے جو فائر کرنے کی مختلف سمتوں کے متناظر ہیں۔  
۱۷۴۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف تحلیلی طریقوں کے ذریعہ نسبتاً زیادہ راست طریقہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم مساوات (۵۸) میں مس عہ کی بجائے م نکھیں تو نظام کے ایک مکانی کی مساوات شکل

$$(r+1) \frac{r}{r} - r = 1$$

میں حاصل ہوتی ہے اور پورا نظام، م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ وہ شرط کہ اس مساوات کی اصلیں م میں مساوی ہوں یہ ہے کہ

$$(6 + \frac{12}{2,2}) \frac{12}{2,2} = 12$$

جس کو شکل

$$(4r) \dots \dots \dots \left( \frac{r}{2r} - 6 \right) \frac{r}{2} = 11$$

میں تحول کیا جاسکتا ہے۔

اگر لا، اس مساوات کو پورا کریں تو دو مکانی جن میں لا انتہا کم فرق ہے نقطہ لا، ا میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے نفادیر کا ایک

(۳۱۲) نقطہ لا، ما ہے۔ اس طرح مساوات (۶۴) لفاف کی مساوات ہے اور اس سے وہی مکانی لفاف حاصل ہوتا ہے جو قبل انہیں حاصل کیا جا چکا ہے۔

۱۷۵۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف معلوم کرنے کا ایک بہت سادہ ہندسی طریقہ بھی ہے۔

اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ جب سب مریوں کو ایک ہی نقطہ سے

زقارہ کے ساتھ فائر کیا جاتا ہے

توان کے راستوں کا ایک ہی مرتب

ن م (شکل ۱۲۳) ہونا چاہئے۔

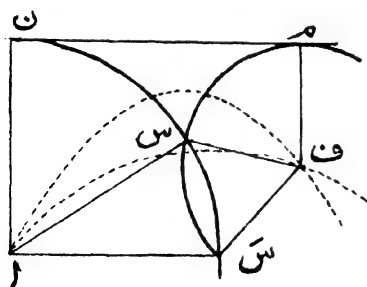
فرض کرو کہ نظامِ نئے کوئی

دو مکانی، 'ف' پر متقاطع ہوتے

ہیں اور فرض کرو کہ ان کے پاس

میں، میں ہیں۔ فرض کرو کہ

۱، ف سے مرتب پر عمود علی الترتیب



شکل (۱۲۳)

ان 'ف' میں۔

اب اس = اس کیونکہ ان میں سے ہر ایک ان کے مساوی ہے، نیز ف = ف کیونکہ ہر ایک ف کے مساوی ہے۔ اس لئے اس اور اس، ان دو دائروں کے نقاط تقاطع ہیں جن کے مرکز 'ف' ہیں۔

اگر ان دو مکافیوں کو متصل فرض کیا جائے تو ان کے ماسکے 'س' میں متصلہ نقطے ہوں گے اور اس لئے مذکورہ بالا دو دائرے 'س' کرینگے اور اس ف انتہا میں ایک خط مستقیم ہوگا۔ پس اس صورت میں

$$ا ف = اس + س ف$$

$$= ان + ف م$$

= نقطہ ف سے ایک ایسے ثابت افقی خط پر

عمود جو م ن کے اوپر فاصلہ ان پر ہے۔

پس نقطہ ف یہ شرط پوری کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ اس ثابت خط سے اس فاصلہ کے مساوی ہے جو اس کے اوپر ثابت نقطہ کے درمیان ہے۔ اس لیے ف ہمیشہ ایک خاص مکانی پر رہتا ہے جس کا ماسکے 'ا' ہے۔ لیکن ف ہمیشہ لفاف کا ایک نقطہ بھی ہے جہاں یہ لفاف نظام کے دو دو متصلہ مکافیوں کے نقاط تقاطع کا طریق ہے۔ اس لیے لفاف وہ مکانی ہے جو ابھی اوپر مائل ہو چکا ہے اور جس کا ماسکے 'ا' ہے۔ یہ مکانی وہی مکانی ہے جو قبل ازیں مائل ہو چکا ہے۔

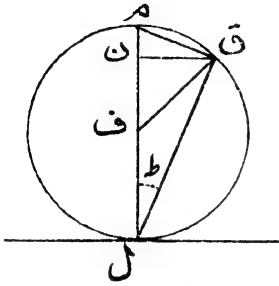
## توضیحی مثالیں

(۲۱۳)

۱۔ ایک گاڑی ہموار سڑک پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور اس کے پیسوں کے پٹوں سے کیچڑ کے ذرات خارج ہوتے ہیں۔ وہ بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو جس تک ان میں سے کوئی ذرہ اچھلیگا۔

فرض کرو کہ پیسہ کا نصف قطر ۱ ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں (صفحہ ۱۳) کہ کوئی

نقطہ ق رفتار  $\times$  ق ل ا سے  
سمت ق م میں جو ق ل پر  
عمود ہے حرکت کرتا ہے۔ ق سے  
نکلے ہوئے کیچر کی رفتار بھی ہوگی۔  
اگر زاویہ ق ل ف ط  
ہو تو زمین کے اوپر جس ارتفاع سے  
کیچر نکلتا ہے وہ



ل = ن = ل ف + ف ن = ۱ (۱ + جم ط)  
ہے اور اس کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی

شکل (۱۲۳)

و (ق ل ا) جب ط = ۲ وجب ط جم ط = وجب ۲ ط  
ہے۔ کیچر جو اس انتصابی رفتار سے نکلتا ہے مزید انتصابی ارتفاع

$$\frac{(وجب ۲ ط)}{ج ۲}$$

حاصل کرتا ہے اور اس لیے کل ارتفاع جہاں تک کیچر پہنچتا ہے

$$۱ + ۱ جم ط + \frac{۱}{ج ۲} جب ۲ ط$$

ہے۔ اس کو جم ۲ کے ایک دو درجی تفاعل کے طور پر شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:

$$(۱ + \frac{۱}{ج ۲}) - \frac{۱}{ج ۲} جم ۲ ط + ۱ جم ط$$

$$= (۱ + \frac{۱}{ج ۲}) + \frac{۱}{ج ۲} - \frac{۱}{ج ۲} [جم ۲ ط - \frac{۱}{ج ۲}]$$

اس جملہ کی اعظم قیمت جبکہ ط بدلے اس وقت واقع ہوتی ہے

$$جب ۲ ط = \frac{۱}{ج ۲} بشرطیکہ جم ۲ ط کے لیے یہ قیمت اختیار کرنا ممکن ہو$$

یعنی بشرطیکہ  $\frac{1}{2} > 1$  - اس صورت میں اعظم ارتفاع زمین کے اوپر

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

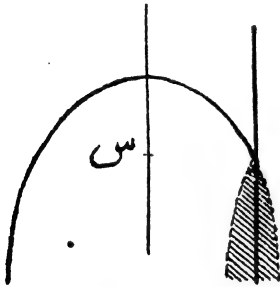
ہے۔

لیکن اگر  $\frac{1}{2} > 1$  تو ہم [جم ۲ طہ -  $\frac{1}{2}$ ] کو معدوم نہیں کر سکتے

اس لیے ہم اس کو حتی الامکان چھوٹا بناتے ہیں اور اس لئے جم ۲ طہ = ۱ لیتے ہیں۔  
اس طرح کیچڑ جو بلند ترین نقطہ تک پہنچتا ہے وہ ہے جو یہیہ کے سب سے اوپر کے  
نقطہ سے نکلتا ہے اور صریحاً وہ اپنے ابتدائی نقطہ سے بلند تر ہرگز نہیں اچھلتا۔

۲۔ ایک اگن ہوز رفتار و سے پانی پھینکتا ہے اور اس سے

ف فاصلہ پر ایک انتصابی دیوار ہے۔ معلوم کر دو کہ دیوار کا کتنا رقبہ  
تر ہو گا۔



فرض کرو کہ اگن ہوز کا دباؤ اس ہے  
اور فرض کرو کہ وہ پانی کے ذرات  
کسی سمت میں رفتار و سے پھینک  
سکتا ہے۔ وہ نقطے جن تک پانی  
پہنچ سکتا ہے حسب دفعہ ۱۷۲ وہ تمام  
نقطے ہوں گے جو ایک گردشی مکانی نما  
کے اندر واقع ہوں گے جس کا محور

شکل (۱۲۵)

انتصابی 'ما سکے' میں اور وتر خاص  $\frac{1}{2}$  ہے۔ اگر ہم 'س' کو مبدأ لیں اور ہم  
س میں گزرنے والے انتصابی خط کو محوری فرض کریں تو اس مکانی نما کی مساوات ہوں گی

$$(لا + ما) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)$$

دیوار کی مساوات ما = ف لیا جاسکتی ہے اور وہ منحنی جس میں یہ مکانی نما دیوار کو

قطع کرتا ہے

$$\text{لا} + \text{ف}^2 = \frac{\text{و}^2}{\text{ج}} - \left( \text{ی} - \frac{\text{و}^2}{\text{ج}^2} \right)$$

$$\text{یا} \quad \text{لا} = \frac{\text{و}^2}{\text{ج}} - \left( \frac{\text{و}^2}{\text{ج}^2} - \frac{\text{ف}^2}{\text{و}^2} - \text{ی} \right)$$

ہے۔ یہ مساوات ایک قطع مکانی کی مساوات ہے جس کا وتر خاص  $\frac{\text{و}^2}{\text{ج}}$  ہے، محور انتصابی ہے اور اس، اس کے اوپر ارتفاع

$$\frac{\text{و}^2}{\text{ج}} - \frac{\text{ف}^2}{\text{و}^2}$$

پر ہے۔ اس قطع مکانی کے اندر کے سب نقطے پانی کی دیوار کے حدود کے اندر واقع ہوں گے اور وہ نقطے جو اس مکانی کے باہر ہوں گے ناقابل رسائی ہوں گے۔

## مثالیں

۱۔ ایک ریوالور کو ۱۰۰ فٹ بلند مینار کے سرے سے افقاً فائر کیا گیا ہے اور گولی ریوالور کے دہانے سے رفتار ۶۰۰ فٹ فی ثانیہ سے نکلتی ہے۔ گولی زمین پر کس جگہ لگیگی؟

۲۔ ایک گولی جس کو ایک تالاب کی سطح کے اوپر ۱۰ فٹ ارتفاع سے افقاً فائر کیا گیا ہے پانی سے ۵۰۰ گز کے فاصلہ پر ٹکراتی ہے۔ اس کی رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو اگر ہوا کی فراہمت ناقابل قدر ہو۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی بندوق کے متعلق یہ دعوے کرنا کہ اس کی گولی ۱۰۰ اگر کے ٹپے میں ایک انچ سے زیادہ نہیں چڑھتی اس بات کو مستلزم ہے کہ رفتار ۲۰۰۸ فٹ فی ثانیہ سے بڑی ہونی چاہئے۔

۴۔ کرکٹ کا گولہ ایک افقی مستوی پر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک بندوق ہے جس کا دہانہ زمین سے قریب ہے۔ اس بندوق سے

ایک گولی فائر کی گئی ہے جو ۶ فٹ لمبے آدمی کے اوپر سے جو ۱۰ اگر دُور کھڑا ہے عین گزرجاتی ہے اور خود زمین میں ایک چوتھائی میل دُور دفن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ گولی زمین کے اوپر جس بلندی تک اُڑتی ہے وہ یقیناً ۲۲ گز سے بڑی ہے۔

۶۔ ایک مرمی کا اعظم افقی پٹہ ۲۵۶ فٹ ہے۔ اس کو پھینکنے کی رفتار کیا ہے۔ اگر اس کو اس رفتار سے ۲۴ فٹ بلند غلام گردش کے فرش پر کے ایک نقطہ سے پھینکا جائے تو اس کا بڑے سے بڑا پٹہ کیا ہوگا اگر وہ چھت سے نہ ٹکرائے اور غلام گردش کافی طویل ہو۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۲۰ میل پٹہ کے لیے مطلوبہ رفتار کم از کم ۸۴۰ فٹ فی ثانیہ ہوگی اور مرمی کے پرواز کا وقت ۱۱.۳ ثنائے ہوگا۔

۸۔ مثال ماسبق میں ۲۰ میل پٹہ کے لیے بارود کی بھرن معلوم کرو و فرض کر کے کہ گولے کا وزن ایک ٹن ہے اور بارود کی طاقت ۱۰۰ فٹ ٹن (فی پونڈ بارود) کی قوت پیدا کر سکتی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرمی کو رفتار ۹ سے ایک ہموار سُتوی کے اوپر ارتفاع ف سے زاویہ  $\alpha$  پر پھینکا جائے تو اس کا پٹہ س مساوات  $۲(ف + ف \sin \alpha) = ج \times \text{قطعہ}$  سے حاصل ہوگا۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک ہموار سُتوی کا وہ رقبہ جو اُس توپ کی زد میں ہو جو سُتوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے ف کے ساتھ متناسباً بڑھتا ہے اور

$$۱ + ۲ف \sqrt{۱ + ۲ف}$$

کے مساوی ہے جہاں ۱ وہ رقبہ ہے جو زد میں ہوتا ہے جبکہ توپ سُتوی کی ہمواری پر ہوتی ہے۔

۱۱۔ ایک مرمی کو ایک قلعہ سے جو افقی سُتوی کے اوپر ۳۰۰ فٹ بلند ہے ۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے فائر کیا جاسکتا ہے۔ معلوم کرو کہ سُتوی کا کتنا رقبہ زد میں رہتا ہے۔

۱۲۔ ضلع ۱ کے ایک منظم سدس کو انتصاباً اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا

ایک کنارہ ایک افقی میز پر ٹکا ہوا ہے۔ ایک ذرہ کو اس طریقہ سے پھینکا گیا کہ وہ اس سس کے چار اوپر کے کونوں کو عین چائتے ہوئے گزر جاتا ہے۔ ذرہ کی پروا میں بلند ترین نقطہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ میز پر پٹہ ۱۷۱ ہے۔

۱۳۔ ایک شین گن کو ایک مسلح ٹرین پر نصب کیا گیا ہے۔ ٹرین افقی پٹریوں پر رفتار سے دوڑتی ہے اور توپ کے دھانے سے گولے رفتار سے نکلتے ہیں۔ بڑے سے بڑا پٹہ معلوم کرو

(۱) ٹرین کے سامنے

(ب) ٹرین کے پیچھے

## عام مثالیں

۱۔ ایک ٹرین ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے اور وہ ایک منحنی پر پہنچتی ہے جس کا نصف قطر ۱۰۰ میٹریل ہے۔ ٹرین میں دیوار پر ایک کامل چکن افقی تختہ لگا ہے جس کا کنارہ پٹریوں کے متوازی ہے اور اس جانب ہے جو منحنی کے مرکز سے دور ہے۔ تختہ پر ایک چھوٹی چیز اس کے کنارے سے ۸ انچ فاصلے پر اساتادہ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ چیز تختہ سے گر جائے گی جبکہ وہ ڈبہ جس میں چیز ہے منحنی کا نصف قطر ۲۴ گز فاصلہ طے کرے گا۔ اس کی افقی رفتار معلوم کرو جبکہ وہ تختہ کو چھوڑتی ہے۔

۲۔ ایک غبارہ ایسی پال سے اوپر وار حرکت کر رہا ہے جو ہر ثانیہ میں ۴ فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ معلوم کرو کہ ۱۰ پونڈ کے ایک جسم کا وزن جبکہ اس کو کمانی دار ترازو کے ذریعہ غبارے میں معلوم کیا جائے اس وزن سے کتنا فرق رکھگا جو معمولی حالات میں حاصل ہوتا ہے۔

(۲۱۶)

۳۔ ایٹوڈ کی شین ترازو کے ایک پلے پر رکھی گئی ہے اور شین کی ڈوری کو کلپ کے ذریعہ حرکت کرنے سے روکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کلپ کو جدا کرتے ہی شین کا ظاہری وزن بقدر

$$\frac{(ک - ک')}{ک + ک'}$$



کے تخفیف ہو گا جہاں کہ، ک لگے ہوئے وزن ہیں۔  
۴۔ طول ل اور وزن و کی ایک ایکساں زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور اس کی ہر جانب انتصاباً ٹکلتی ہے۔ اگر زنجیر آزادانہ حرکت کر رہی ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک جانب اس کا طول لا ہو تا ہے تو کھونٹی پر دباؤ

$$\frac{۴ \text{ لا} (ل - لا)}{۲}$$

ہے۔  
۵۔ ایک ٹل سے پانی کی دھار زمین تک انتصاباً گرتی ہے اور اس کی ابتدائی رفتار قابل نظر انداز ہے۔ ثابت کرو کہ اس پانی کا مرکز ثقل جو کسی آن ہو ا میں رہتا ہے زمین سے اوپر اس فاصلہ کا دو تہائی ہے جو زمین اور ٹل کے درمیان ہے۔  
۶۔ وزن و کی ایک وزنی ایکساں زنجیر کو ایک دوری سے باندھ کر دوری کو تناؤت سے اوپر اٹھایا گیا ہے۔ زنجیر کے کسی نقطہ پر تناؤ دریافت کرو۔  
۷۔ ایک زنجیر ٹن کا مستقل بوجھ برداشت کر سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ سکون سے سکون تک کم سے کم وقت جس میں زنجیر وٹن کے ایک وزن کو انتصاباً فاصلہ ف میں سے اٹھا اور اتار سکتی ہے

$$\frac{۲۲}{ج} \frac{ف}{ف} \text{ ثنائے } و$$

ہو گا۔

۸۔ چرخوں کے ایک نظام میں ایک ثابت اور ایک حرکت پذیر قالب ہے۔ رسی حرکت پذیر قالب کے محور سے بندھی ہے اور اس کے بعد ثابت قالب پر سے گذرتی ہے اور پھر حرکت پذیر قالب کے نیچے سے اور پھر ثابت قالب پر سے۔ وزن ف معلوم کرو جس کو اگر رسی سے باندھ دیا جائے تو وہ معلومہ وزن و کو جو حرکت پذیر قالب سے بندھا ہے مہار سکے۔ (قالب اس قدر چھوٹے ہیں کہ رسی کے تمام سیدھے حصوں کو متوازی خیال کیا جاسکتا ہے)۔  
اگر اوزان متوازن نہ ہوں تو ثابت کرو کہ و کا نیچے وار اسراع

$$\frac{9}{9} = \frac{3}{3}$$

ہوگا جب کہ رسی کے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہو اور حرکت پذیر قالب کا وزن و میں شامل ہو۔

۹۔ ایک چرخہ جو گول بوجھ و کو ہمارے ہوئے ہے رسی کے ایک طبقہ میں لٹکائی گئی ہے یہ رسی دو ثابت چرخوں پر سے گزرتی ہے اور اس کے سروں سے اوزان و اور ق آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ رسی کا ہر حصہ انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ جب اس نظام کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو و ساکن رہے گا یا ایکساں رفتار سے حرکت کرے گا بشرطیکہ  $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$  اور کہیں رگڑ نہ ہو۔ (۲۱۷)

اگر یہ ربط موجود نہ ہو تو و کا اسراع معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک ذرہ جو باذہ کے تحت گر رہا ہے کسی خاص شانے میں ۱۰۰ فٹ طے کرتا ہے۔ اس کے بعد ۱۰۰ فٹ طے کرنے میں اُسے کتنا وقت لے گا۔ ہو اکی فراحت نظر انداز کی گئی ہے۔ اگر فراحت کی وجہ سے وقت ۹ دہائیہ لگے تو فراحت (مستقل فرض کردہ) کی نسبت ذرہ کے وزن کے ساتھ معلوم کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی منحنی سے کسی دوسرے منحنی تک (جو اُسی انتصابی مستوی میں ہے) سریع ترین اُتار کا خط ان منحنیوں کے ان نقطوں پر کے عمادوں کے ساتھ مساوی زاوے بناتا ہے جن پر وہ ان سے ملتا ہے۔

۱۲۔ ایک انتصابی دائرے کے محیط پر اُس نقطہ کا محل معلوم کرو کہ اُس سے مرکز تک خط مستقیم میں اُتار کا وقت وہی ہو جو زیر ترین نقطہ تک اُتار میں صرف ہوتا ہے۔

۱۳۔ ماسک سے مکانی تک تیز ترین اُتار کا خط معلوم کرو جبکہ مکانی کا محور انتصابی ہو اور اس اوپر وار۔ نیز ثابت کرو کہ اس خط کا طول و ترخاص کے مساوی ہے۔

۱۴۔ ایک ناقص کو اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصابی ہے۔

وہ قطر معلوم کرو جس کے نیچے کوئی ذرہ کم سے کم وقت میں گر سکتا ہے۔ خروج المکرز کی کم سے کم کیا قیمت ہے تاکہ یہ قطر محور اعظم نہ ہو سکے۔

۱۵۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانہ پر فائر کرنا مقصود ہے تاکہ وہ نشانہ پر علی القوائم ٹکرائے۔ اگر گولی کی رفتار  $v$  ہو اور فائرنگ کے نقطے سے نشانے

کا فاصلہ  $L$  ہو تو ثابت کرو کہ گولی کا زاویہ ارتفاع  $\frac{1}{2}$  جب  $\left(\frac{L}{2g}\right)$  ہونا چاہئے

اور ثابت کرو کہ نشانے کا وہ نقطہ جس پر ضرب پڑتی ہے اُس نقطہ کی بہ نسبت نصف ارتفاع پر ہو گا جس کی جانب نشانہ باندھا جاتا ہے۔

۱۶۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانے پر فائر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولی کو فائر کرنے والا شخص نشانے پر گولی کے ظل کو دیکھے تو ظل یکساں رفتار سے حرکت کرتا نظر آئے گا۔

۱۷۔ ایک بندوق دو گولیوں کو فائر کرتی ہے، ایک کو رفتار  $v$  کے ساتھ زاویہ ارتفاع  $\alpha$  پر اور دوسری کو رفتار  $w$  کے ساتھ زاویہ ارتفاع  $\beta$  پر (عمدے عم) اور گولیاں ایک ہی انتصابی مستوی میں جاتی ہیں۔ ثابت کرو کہ گولیاں ٹکرائیں گی اگر فائرنگ کے درمیان وقفہ

$$\frac{2}{g} \text{ وجب } \alpha + \text{ وجب } \beta$$

ہے۔

۱۸۔ 'ا'، 'ب'، 'ج'، ایک افقی خط میں ترتیب و اتین نقطے ہیں اور 'ا' ۶۴۰ فٹ ہے۔ ایک ذرہ کو 'ا' سے رفتار ۳۹۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو 'ا' کے ساتھ زاویہ مس  $\frac{5}{12}$  بناتی ہے۔ اُسی آن ایک دوسرے ذرہ کو 'ب' سے رفتار ۲۵۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو 'ب' کے ساتھ زاویہ مس  $\frac{3}{4}$  بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ذرے ٹکرائیں گے، نیز معلوم کرو کہ کب اور کہاں؟

۱۹۔ ایک توپ ۴۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گولے سر کرتی ہے۔ (۷۱۸)

ایک پہاڑی، سطحِ مستوی پر ۲۰۰ فٹ بلند ہے اور توپِ مستوی کے اُس نقطہ سے ... اگرز کے فاصلہ پر ہے جو پہاڑی کے سرے کے انتصاباً نیچے ہے۔ پہاڑی کے سرے کے عین پیچھے کتنا فاصلہ توپ کے گولیوں سے محفوظ ہوگا۔

۲۔ ایک بندوق کی مکھیاں غلط نصب ہیں جس کی باعث گولی تین فیصدی

زیادہ دور تک جاتی ہے یہ نسبت اُس فاصلے کے جو مکھیوں سے معلوم ہوتا ہے ایک نشانہ یا زجو بندوق کی اس خطا سے واقف نہیں ہے ایک نشان پر جو ... اگرز کے فاصلہ پر ہے نشانہ باندھتا ہے۔ اگر گولی کی رفتار ۱۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو تو ثابت کرو کہ گولی نشان سے تقریباً ایک گز اوپر سے گذر جائے گی۔

۲۱۔ ایک بندوق کی مکھیاں درست ہیں اور ۱۰ فٹ فاصلہ پر کسی چیز پر نشانہ باندھنے کے لیے بندوق کو زاویہ عہ تک اٹھانا پڑتا ہے۔ نشانہ باز کا ہاتھ تھر تھرانے کی وجہ سے بندوق اُن سمتوں میں رہتی ہے جو اصلی سمت سے چھوٹے زاویہ ط کے اندر کہیں واقع ہو سکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نشانہ باز گولیوں کو متواتر فائر کرے تو وہ نقطے جن پر گولیوں کی ضرب پڑے گی سب کے سب ایک چھوٹے قطع ناقص کے اندر واقع ہوں گے جس کے نیم محاورہ طہ جم عہ اور ۱ طہ (۱-مس عہ) ہوں گے۔

جب  $\mu = 1$  تو اس قطع ناقص کا محور اصغر معدوم ہوتا ہے اور اس لیے گولیوں کو ایک خط مستقیم میں واقع ہونا چاہئے۔ اس نتیجہ کا مطلب بیان کرو۔  
۲۲۔ ایک ذرہ سکون سے ایک چلنے کرہ کے بلند ترین نقطے سے اس کی بیرونی سطح پر نیچے وار پھیلتا ہے۔ وہ کرہ سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور فضاء میں ایک قطع مکانی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مکانی کے نقطہ ف پر کا دائرہ انحناء مرتبہ کو مس کریگا۔

۲۳۔ ایک ذرہ کو ایک چلنے کرہ کی اندرونی سطح کے زیر ترین نقطے سے افتاً پھینکا گیا ہے۔ وہ کرہ کی سطح سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور ایک قطع مکانی مرتسم کرنے کے بعد پھر کرہ سے نقطہ ق پر پکڑا رہا ہے۔ ثابت کرو کہ ق اور ف پر کا تماس، انتصابی کے ساتھ مساوی زاوئے بنتے ہیں۔

۲۴۔ ایک توپ کو ایک پہاڑی کے رُخ پر جو مستوی ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کل رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے ایک قطع ناقص ہے جس کا ماسکہ توپ پر ہے اور جس کا خروج المرکز پہاڑی کے میلان کی جیب ہے اور نیم وتر خاص اس ارتفاع کے نصف کے مساوی ہے جس تک گولی کی ابتدائی رفتار گولی کو لیا جاسکتی ہے۔

۲۵۔ ایک پہاڑی کا رُخ مستوی ہے اور اس کا میلان  $\alpha$  ہے۔ ایک توپ کو پہاڑی پر کے ایک قلعہ پر جس کا ارتفاع  $x$  ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ پہاڑی کے مستوی رُخ کا وہ رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے

$$\frac{\pi r^2}{2} (1 + \sin \alpha) \text{ قطعہ}$$

ہے جہاں گولی کی ابتدائی رفتار  $v$  ج رہے۔

۲۶۔ ایک کروی خول جس کی کمیت  $k$  ہے پھٹ پڑتا ہے جبکہ وہ زمین کے اوپر ارتفاع پر ناقابل قدر رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ خول بہت چھوٹے ذرات میں منقسم ہو جاتا ہے اور ان میں سے ہر ذرہ کرہ کے مرکز سے رفتار  $v$  کے ساتھ مرکز سے دور حرکت کرتا ہے اور بالآخر زمین پر گر جاتا ہے۔ ان ذروں کی کل کمیت معلوم کرو جو اس نقطہ سے جو خول کے انقطاع سے نیچے ہے کسی مقررہ فاصلہ پر کا فی رقبہ میں ملیں گے۔

۲۷۔ ایک خول ہوا میں پھلتا ہے اور اس کے تمام ذرے دھماکہ کی پائے مساوی رفتاریں حاصل کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی آن ذرے ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور ان کے راستوں کے ماسکے بھی ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور اس ایک کرہ کا پر واقع ہوں گے۔

۲۸۔ ایک ذرہ ایک کھردرے مال مستوی  $\alpha$  ب کے نیچے پھیلتا ہے، وہ مستوی کے نقطہ  $\alpha$  سے حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مستوی کو نقطہ  $\beta$  پر چھوڑنے کے بعد آزادانہ ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے۔ اگر مرتسم مکافی کا ماسکہ  $m$  ہے تو ثابت کرو کہ زاویہ  $\alpha$   $\beta = \frac{\pi}{2}$  ہے جہاں  $\alpha$  رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۹۔ ایک قلعہ سے پانی پر تیرنے والے ایک نشان کا مشاہدہ کیا گیا تو

معلوم ہوا کہ اس کا زاویہ انحراف افق کے نیچے  $\alpha$  ہے۔ اس نشان پر ایک توپ کو ارتفاع  $h$  پر فائر کیا گیا لیکن گولہ پانی پر اس نقطہ سے جا لگا جس کا انحراف  $\alpha$  تھا۔ ثابت کرو کہ نشان پر ضرب لگانے کے لیے گولے کو ارتفاع  $h$  پر فائر کرنا چاہئے جہاں

$$\text{جم } h \text{ جب } (h + \alpha) = \text{جم } \alpha \text{ جب } \alpha$$

جم  $\alpha$  جب  $(h + \alpha)$  جم  $\alpha$  جب  $\alpha$  ۳۔ ثابت کرو کہ کم سے کم توانائی جس کے ذریعہ ایک ذرہ کو ایک دیوار کے اوپر پھینکا جاسکتا ہے جب کہ دیوار پھینکنے کے نقطہ سے  $h$  فاصلہ پر ہو حسب ذیل ہے:-

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh + \frac{1}{2} m v^2$$

جہاں پھینکنے کے نقطہ پر دیوار کے سرے کا ارتفاع  $\alpha$  ہے۔  
۳۔ نصف قطر  $r$  کا چمکی کا ایک پاٹ اس طرح گھومتا ہے کہ اس کی کور کی رفتار  $v$  ہے اور پاٹ کی کور سے آٹے کے ذرات نکلے ہیں ثابت کرو کہ ان کے راستوں کا لفاف ایک قطع مکانی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا ماسکہ پاٹ کے مرکز کے انتصاباً اوپر  $\frac{r}{2}$  کے فاصلہ پر ہے۔



(۲۲۰)

## نواں باب

### ذروں کے نظاموں کی حرکت

### حرکت کی مساواتیں

۱۷۶۔ اس باب میں ذروں کے نظاموں کی حرکت پر بحث کی جائے گی اور ان اعمال اور تعاملات کا بھی لحاظ رکھا جائے گا جو ذروں کے مختلف زوجوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتے ہیں۔ ابتداً ان نتیجوں کو جو ایک ذرہ کے لئے حاصل ہو چکے ہیں اختصاراً بیان کرنا اور انہیں پہلے کی نسبت زیادہ تفصیلی شکل میں رکھنا سہولت بخش ہوگا۔

ایک واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے کل نظام کا حاصل ایک واحد قوت ہونی چاہئے کیونکہ یہ سب قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم اس حاصل کو  $F$  سے تعبیر کرتے ہیں اور تین قائم محوروں کی سمت میں اس کے اجزائے ترکیبی کو  $F_x$ ،  $F_y$ ،  $F_z$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

نیز چونکہ ذرہ کو ایک نقطہ سمجھا جاسکتا ہے اس لئے اس کا ایک معین اسراع ہونا چاہئے اور چونکہ ایک سمتی ہے اس لئے اس اسراع کو محدود کرنے میں تین اجزائے ترکیبی  $F_x$ ،  $F_y$ ،  $F_z$  کا مرکب فرض کیا جاسکتا ہے۔

حرکت کے دوسرے قانون سے رشتہ

ف = ک ع

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن حرکت کے دوسرے قانون سے اس سے کچھ زیادہ بھی معلوم ہوتا ہے اور وہ یہ کہ ف اور ع کی سمتیں ایک ہی ہیں۔ فرض کرو کہ اس واحد سمت کی سمتی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہیں تو

$$\text{لا} = \text{لہ ف، ما} = \text{مہ ف، مے} = \text{نہ ف}$$

$$\text{اور نیز } \text{ع لا} = \text{لہ ع، ع ما} = \text{مہ ع، ع مے} = \text{نہ ع}$$

ان رشتوں اور رشتہ (۶۵) کے ذریعہ حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$(۶۶) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ک ع} \\ \text{ما} = \text{ک ع} \\ \text{مے} = \text{ک ع} \end{array} \right.$$

یہ مساواتیں تحلیلی شکل میں ایک ذرہ کی حرکت کی ہیں۔ یہ ریاضی

کی زبان میں صرف حرکت کے دوسرے قانون کو بیان کرتی ہیں۔

۱۷۷۔ فرض کرو کہ کسی آن ذرہ کے محدودا، ما، مے ہیں اور فرض کرو کہ

اس کی رفتار کے تین اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں۔ جزو ترکیبی ع، محور لا پر

اُس رفتار کو تعبیر کرتا ہے جو محور لا پر متحرک نقطہ کے نقل کی ہے اور کسی آن

اس نقطہ کا فاصلہ مبداء سے صرف لا ہے۔ اس لیے رفتار کی تعریف سے

$$(۶۷) \dots\dots\dots \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} = \text{ع}$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} = \text{و}$$

$$\frac{\text{فر مے}}{\text{فرت}} = \text{ط}$$

اسی طرح

وہ شرح جس سے رفتار کا جزو ترکیبی لا بڑھتا ہے  $\frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}}$  ہے لیکن



اس کو ع فرض کیا جا چکا ہے کیونکہ وہ اسرّاع کا جزو ترکیبی لا ہے۔ اس طرح

$$\frac{\text{ع}}{\text{فرت}} = \text{لا}$$

$$\frac{\text{ع}}{\text{فرت}} = \text{ما}$$

اسی طرح

$$\frac{\text{ع}}{\text{فرت}} = \text{ی}$$

ع، و، ط کی جو قیمتیں اوپر حاصل ہوئی ہیں ان کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں:

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{فرت}^2} = \text{لا}$$

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{فرت}^2} = \text{ما}$$

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{فرت}^2} = \text{ی}$$

حرکت کی مساواتوں (۶۶) میں اسرّاع کے اجزائے ترکیبی کے ان (۲۳۲) جملوں کو درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل نئی شکل میں حاصل ہوئی ہیں:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{ع}^2}{\text{فرت}^2} = \text{لا} \\ \frac{\text{ع}^2}{\text{فرت}^2} = \text{ما} \\ \frac{\text{ع}^2}{\text{فرت}^2} = \text{ی} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (۶۸)$$

۸۷۔ فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام — ک، نقطہ لا، ما، ی پر ک نقطہ لا، ما، ی پر وغیرہ — ہے اور فرض کرو کہ ان پر عمل کرنے والی قوت

اجزاء ترکیبی لا، ما، ہے، لا، ما، ہے، وغیرہ ہیں۔  
اب مساواتوں (۶۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ک} \frac{\text{فر} \text{لا}}{\text{فر} \text{ت}}$$

$$\text{لا} = \text{ک} \frac{\text{فر} \text{لا}}{\text{فر} \text{ت}} ، \text{ وغیرہ}$$

اس لئے جمع کرنے سے  $\text{لا} = \text{ک} \frac{\text{فر} \text{لا}}{\text{فر} \text{ت}}$  ..... (۶۹)

جہاں  $\text{لا}$ ، نظام کے تمام ذروں پر عمل جمع کو تعبیر کرتا ہے۔  
اس مساوات کی دائیں جانب کا رکن  $\text{لا}$ ، ولا کی سمت  
میں ان تمام قوتوں کے اجزاء ترکیبی کا مجموعہ ہے جو نظام کے تمام  
ذروں پر عمل کرتی ہیں۔ دفعہ ۵۰ کی بموجب ان قوتوں کو دو جماعتوں میں  
تقسیم کیا جاسکتا ہے:

(ا) بیرونی قوتیں۔۔۔ وہ قوتیں جو ذروں پر نظام کے باہر سے  
عمل کرتی ہیں۔

(ب) اندرونی قوتیں۔۔۔ وہ قوتیں جو نظام کے ذروں کے درمیان  
ایک دوسرے پر عمل کرتی ہیں۔

حسب دفعہ ۵۰ یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوتوں کی اس دوسری جماعت سے  
 $\text{لا}$  میں کوئی اضافہ نہیں ہوتا کیونکہ یہ سب قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی  
ہیں اور ہر جوڑا عمل اور تعامل پر جس کے اجزاء ترکیبی مساوی اور مخالف  
ہوتے ہیں مشتمل ہوتا ہے۔

پس  $\text{لا}$  کو محسوب کرنے میں ہمیں صرف بیرونی قوتوں کو ملحوظ  
رکھنا ہوگا۔

مساوات (۶۹) کی بائیں جانب کی رقم  $\text{ک} \frac{\text{فر} \text{لا}}{\text{فر} \text{ت}}$  کی شکل بھی

بدلی جاسکتی ہے۔ کیونکہ مساوات (۶۷) کی رو سے  $\frac{فریت}{فریت} = ۶$  اور اس لیے

$$\frac{فریت^۲}{فریت} کی قیمت \frac{فریت}{فریت} ہے، اس لیے$$

$$(۶۰) \quad \frac{فریت^۲}{فریت} = \frac{فریت}{فریت} = \frac{فریت}{فریت} (۶ ک ۶)$$

کسی ذرہ کے معیار حرکت سے مراد اس کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب ہے (دفعہ ۲۰) اس لیے ذرہ کا معیار حرکت ایک سمتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ک، ۶، ک و ک ط ہیں اور ک ۶ کو معیار حرکت کا جزو ترکیبی لاکھا جاسکتا ہے۔ نظام کا ہر ذرہ معیار حرکت رکھتا ہے اور اس کے اجزائے ترکیبی لاک (۶ ک ۶) ہوں گے اور یہ وہ مقدار ہے جو مساوات (۶۰) کی بائیں جانب واقع ہے اب ہم مساوات (۶۹) کی جگہ حسب ذیل مساوات رکھ سکتے ہیں:

$$(۶۱) \quad \frac{فریت^۲}{فریت} = \frac{فریت}{فریت} (۶ ک ۶)$$

یہاں  $\frac{فریت^۲}{فریت}$  سے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی لاک کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور  $\frac{فریت}{فریت}$  ک ۶، معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی لاک کا مجموعہ ہے۔

## خطی معیار حرکت کا بقا

۱۷۹۔ جب کوئی بیرونی قوتیں موجود نہ ہوں تو  $\frac{فریت^۲}{فریت} = ۰$  اور اس لیے

$$(۶۲) \quad \frac{فریت^۲}{فریت} = ۰ = \frac{فریت}{فریت} (۶ ک ۶)$$

$$(۶۳) \quad \frac{فریت^۲}{فریت} = ۰ = \frac{فریت}{فریت} (۶ ک ۶) \quad \text{اسی طرح}$$

$$(۶۴) \quad \frac{فریت^۲}{فریت} = ۰ = \frac{فریت}{فریت} (۶ ک ۶)$$

ان مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقادیریں  
 $\chi$  ک،  $\epsilon$ ،  $\chi$  ک و،  $\chi$  ک ط  
 وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتیں۔ یعنی کل معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی  
 مستقل رہتے ہیں اور اس لیے کل معیار حرکت جسے ایک سمتی تصور کیا گیا  
 ہے مستقل ہے۔ اس کو معیار حرکت کے بقا کا اصول کہتے ہیں۔ اسے  
 الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے:

جب ذروں کا کوئی نظام حرکت کرتا ہے درآئیں لیکہ اس پر  
 کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں تو نظام کا کل معیار حرکت مقدار  
 اور سمت میں مستقل رہتا ہے۔

## نظام کے مرکز ثقل کی حرکت

۱۸۰۔ اب ہم عام مساواتوں (۷۱)

$$\chi = \chi_0 + \frac{1}{2} \chi_0^2 + \dots \quad (۷۵)$$

کی طرف رجوع کرتے ہیں۔  
 فرض کرو کہ نظام کے ذروں کے مرکز ثقل کے محدود کسی آن لآ، مآ، ہی  
 ہیں اور فرض کرو کہ اس نقطہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی  $\epsilon$ ،  $\omega$ ،  $\tau$  سے  
 تعبیر ہوتے ہیں۔

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau^2} \quad \text{وغیرہ}$$

لآ کی قسمت بموجب مساوات (۸) حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\chi^2}$$

$$\therefore \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

پس اگر تمام ذروں کی کل کمیت  $\text{فرقہ} = \text{فرقہ}$  تو

$$\text{فرقہ} = \text{فرقہ}$$

اب مساوات (۷۵) ہو جاتی ہے

$$\text{فرقہ} = \text{فرقہ} \dots \dots \dots (۷۷)$$

اسی طرح مساواتیں

$$\text{فرقہ} = \text{فرقہ} \dots \dots \dots (۷۸)$$

$$\text{فرقہ} = \text{فرقہ} \dots \dots \dots (۷۹)$$

حاصل ہوتی ہیں۔

چونکہ

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}, \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}, \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

مرکز ثقل کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز ثقل کی حرکت وہی ہے جو ہوتی اگر اس کی بجائے کمیت  $\text{فرقہ}$  کا ایک ذرہ رکھا جاتا اور اس پر وہ قوت عمل کرتی جس کے اجزائے ترکیبی  $\text{فرقہ}$ ،  $\text{فرقہ}$ ،  $\text{فرقہ}$  ہیں۔ نیز یہ قوت صرف وہ قوت ہے جو تمام بیرونی قوتوں کا حاصل ہے جبکہ ان قوتوں کو اس خیالی ذرہ پر عمل کرتا ہوا سمجھا جائے جس کے متعلق ہم نے فرض کیا ہے کہ وہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

۱۸۱۔ اس مخصوص صورت میں جس میں کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں مرکز ثقل کی حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک ایسا ذرہ ہے جس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں، اس لیے اس کی حرکت، ایک خط مستقیم میں یکساں رفتار کی حرکت ہوگی۔

۱۸۲۔ مرکز ثقل کی حرکت اس مخصوص صورت میں اور اس عام تربیت میں جس میں بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں حسب ذیل دو قوانین کے تحت فرض کیجا سکتی ہے:

قانون (۱)۔ ذروں کے ہر نظام کا مرکز ثقل سکون کی حالت میں رہتا ہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں، الا آنکہ اس نظام پر بیرونی قوتوں کا عمل اس حالت کو بدلنے پر مجبور کرے۔

قانون (۲)۔ جب ذروں کے کسی نظام پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں تو مرکز ثقل کی حرکت وہی ہوتی ہے جو ہوتی اگر ذروں کی تمام کمیتیں ایک واحد ذرہ میں مرکز ہوتیں اور یہ ذرہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا اور اس پر تمام بیرونی قوتیں لگائی جاتیں۔

ان قوانین کو نیوٹن کے قوانین (۱) اور (۲) کی توسیع سمجھا جاسکتا ہے جبکہ انہیں ذروں کے ایک نظام کی حرکت پر عائد کیا جائے۔ (۳۲۶) اب ہم اس امر کی توجیہ کر سکتے ہیں کہ کیوں نیوٹن کے دوسرے قانون کو چھوڑنے کے اجسام کی حرکت پر عائد کرنا اکثر جائز ہے گویا کہ یہ اجسام ذرے ہیں (مقابلہ کرو دفعہ ۲۶ کے ساتھ)۔

معیار حرکت کے بقا کا اصول کسی حرکتیاتی مسئلہ کے حل کرنے میں

جس میں صرف دو اجسام حرکت میں ہوں اکثر کافی ثابت ہوتا ہے۔

## توضیحی مثال

کمیت  $k$  کا ایک گولہ کمیت  $k$  کی توپ سے سر کیا گیا ہے اور توپ افقی پٹریوں کے ایک زوج پر پیچھے حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ توپ کے پیچھے ہٹنے کی رفتار معلوم کر دو اور اس کے ہٹنے کا اثر گولے کی حرکت پر ردیر یافت کرو۔

فرض کر دو کہ توپ کو سر کرنے سے پیشتر وہ ایسے محل میں قائم ہے جو افق سے زاویہ  $\theta$  بنا تی ہے اور فرض کر دو کہ گولے کی ابتدائی رفتار یعنی وہ رفتار جو توپ کے لحاظ سے اس کے دہانے سے خارج ہوتے وقت ہوتی ہے وہ  $u$  اور گولے کی کمیت  $k$  ہے۔ فرض کر دو کہ زمین کے لحاظ سے گولے کی رفتار کے اجزاء ترکیبی افقی اور انتظامی  $u_x$  اور  $u_y$  ہیں اور فرض کر دو کہ توپ کی پیچھے کی رفتار  $v$  ہے جس کو افقی سمت میں اس سمت کے خلاف چلائش کیا گیا ہے جس کی جانب توپ قائم کی گئی ہے۔ وہ نظام جو توپ، بارود اور گولے پر مشتمل ہے بیرونی قوتوں کے عمل سے آزاد نہیں ہے لیکن یہ قوتیں ”یعنی نظام کا وزن اور زمین کے ساتھ اس کا تعامل“ کوئی افقی جزو ترکیبی نہیں رکھتیں۔ اس لیے نظام کا افقی معیار حرکت دھماکے سے غیر متبدل رہنا چاہئے۔ یہ افقی معیار حرکت ابتداً صفر تھا اور اس لیے وہ صفر ہے جبکہ گولہ توپ سے نکلتا ہے۔ پس بارود کے وزن کو نظر انداز کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$k \cdot v + k \cdot u = 0 \quad (1)$$

توپ کے لحاظ سے گولے کی رفتار  $v$  ہے اس کے اجزاء ترکیبی

$$v_x + v_y \theta$$

ہیں۔ لیکن یہ رفتار، رفتار  $u$  ہونی چاہئے جو افق سے زاویہ  $\theta$  بنا تی ہے اس لیے

(ب)

$$۶ + ۶ = ۱۲$$

(ج)

$$۱۲ = ۱۲$$

مساوات (ا) اور مساوات (ب) سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۲}$$

پس پیچھے ہٹنے کی رفتار ہے

$$۱۲ = \frac{۱۲}{۱۲} \times ۱۲$$

گوئے کی اصلی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں

(۲۲۷)

$$۱۲ = \frac{۱۲}{۱۲} \times ۱۲$$

$$۱۲ = ۱۲$$

اس طرح گوئے کی اصلی رفتار

$$\sqrt{۱۲ + ۱۲} = ۱۲ \quad [۱ - \frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۲}{۱۲}]$$

ہے اور زاویہ ارتفاع طہ مساوات

$$\frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۲}{۱۲}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک خالی ریلوے ڈبہ ۸ ٹن وزنی ساکن ہے، ایک دوسرا مشابہ ڈبہ جس پر ۲۴ ٹن کا بوجھ ہے اور جو ایک میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے اول الذکر ڈبے سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں ڈبے باہم حرکت کرتے ہیں۔ ان کی مشترک رفتار معلوم کرو۔



۲۔ کمیت گ کی ایک توپ کمیت ک کا ایک گولہ افتقا فائر کرتی ہے۔  
ثابت کرو کہ بارود سے جتنا کام انجام پاتا ہے اس کی ایک کسر ہی توپ کو بھیجے  
دیکھ دینے میں ضائع ہوتی ہے۔

۳۔ کمیت ک کا ایک ذرہ زاویہ  $\alpha$  کے ایک چمکنے والے مستوی پر نیچے  
پھسلتا ہے اور خود مستوی (جس کی کمیت گ ہے) ایک چمکنے والے مستوی پر پھسلنے میں  
آزاد ہے۔ ذرہ اور مستوی کا اسراع معلوم کرو۔

۴۔ ایک خول کا مشاہدہ کیا گیا کہ وہ اس وقت پھٹا جبکہ وہ اپنے راستے  
کے بلند ترین نقطہ پر تھا اور پیٹ کروہ دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوا جن میں سے  
ایک انحصاراً نیچے گرتا نظر آیا۔ ثابت کرو کہ دو سراحہ ایک قطع مکانی مرتسم کرے گا  
جس کا وتر خاص ابتدائی مکانی کے وتر خاص کا چار گنا ہو گا۔

۵۔ ایک گولی جس کا وزن  $\frac{1}{2}$  اونس ہے ایک پرندے کو جس کا وزن  
۵ پونڈ ہے لگتی ہے جبکہ وہ ہوا میں اڑ رہا تھا۔ گولی کی ضرب پڑنے وقت گولی  
کی افقی رفتار ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور پرند زمین سے اوپر ۶۴ فٹ بلندی پر  
اسی افقی سمت میں رفتار ۲۰ فٹ ثانیہ سے اڑ رہا تھا۔ ثابت کرو کہ پرند اس مقام  
سے جہاں اس پر مار پڑی تھی تقریباً ۵۲.۲ فٹ آگے گرے گا۔

۶۔ ۵۰۰ ٹن کا ایک جہاز جو ۲۰ بحری میل فی گھنٹہ کی شرح سے جا رہا ہے  
اچانک ایک وہیل بھلی سے ٹکراتا ہے جس کا وزن ۱۲ ٹن ہے اور جو پانی کی سطح پر سواری  
ہے۔ جہاز کی چال کتنی گھٹے گی؟ (پانی کی رفتار کو نظر انداز کرو)۔

۷۔ ایک پارسل کو جس کا وزن ۲ ہنڈرویت ہے ایک ریل سے جو ۶۰ میل  
فی گھنٹہ کی شرح سے جا رہی ہے پھینکا گیا ہے پھینکنے وقت اس کی افقی رفتار ٹرین کے  
لحاظ سے ۱۱ فٹ فی ثانیہ ہے اور پٹریوں کے علی القوام ہے۔ ۳۰ ہنڈرویت  
وزنی دستی گاڑی پر گرتا ہے جو ایک ہموار چوڑے پر حرکت کرنے میں آزاد ہے  
اور اس کے پھینے اس طرح ہیں کہ ان کی حرکت پٹریوں سے ۳۰ کا زاویہ بنائی گئی  
کس رفتار سے گاڑی حرکت میں آئے گی؟

(۲۲۸)

۸۔ ہ پونڈ کی ایک کمیت جو شمالاً ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے ۶ پونڈ کی ایک کمیت سے جو شرقاً ۱۴ فٹ فی ثانیہ سے حرکت کر رہی ہے ٹکراتی ہے اور اس کی حرکت میں ۳۰ کا انصراف واقع ہوتا ہے اور اس کی رفتار بعد ایک فٹ فی ثانیہ کے بڑھ جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری کمیت کی رفتار بعد ۳۰ فٹ فی ثانیہ کے گھٹ جاتی ہے۔ اس کی حرکت کی نئی سمت معلوم کرو۔  
۹۔ دو برف بجرے جن میں سے ہر ایک کی کمیت گ ہے کامل پکنے برف پر ساکن کھڑے ہیں اور ان کے پینڈے ایک ہی سمت میں ہیں۔ ایک شخص کمیت ک ایک بجرے سے دوسرے پر کودتا ہے اور فوراً بعد ہی دوسرے سے پہلے پرواپس آتا ہے۔ ثابت کرو کہ بجروں کی انتہائی رفتاروں میں نسبت  $k + k : k$  ہے۔

## توانائی بالحرکت

۱۸۳۔ ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت کے مطالعہ کی ابتداء بہترین طریقہ پر اس طرح کی جاسکتی ہے کہ سب سے اول اس مشکل کی طرف اپنی توجہ کو منعطف کیا جائے جو اس کتاب میں تا حال زیر بحث نہیں آئی ہے۔ اس مشکل کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی۔

فرض کرو کہ ایک جہاز یابی میں ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور عرشہ پر سے ایک شخص کمیت ک کا ایک گولہ جہاز کے لحاظ سے ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے آگے پھینکتا ہے۔ اگر یہ شخص فضا میں ساکن ہوتا تو ہم کہہ سکتے کہ اس نے اتنا کام انجام دیا ہے جو گولے کی آخری توانائی بالحرکت کے مساوی ہے اور اس لئے  $\frac{1}{2}k$  (۳۰) یا ۵۰ کم ہے لیکن جہاز کے عرشہ پر گولے کی ابتدائی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور شخص اس رفتار کو ۵۰ تک بڑھاتا ہے۔ اس لیے گولے کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی

$$\frac{1}{2}k(50) - \frac{1}{2}k(30)$$

یعنی ۱۰۵۰ اک ہے۔ اگر اس سے اس شخص کا کام تعبیر ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا پڑتا ہے کہ جہاز کے عرشہ سے گولہ پھینکنا زمین پر اسے پھینکنے کی بہ نسبت دُگنے سے زیادہ سخت کام ہے۔ یہ صریحاً غلط ہے۔

۱۸۴۔ خطا اس میں واقع ہوئی ہے کہ پھینکنے والا شخص نہ صرف گولے کو رفتار ایصال کرتا ہے بلکہ جہاز کو بھی۔ اگر وہ گولے کو آگے پھینکتا ہے تو اس کو ساتھ ہی معیار حرکت کے بقا کے اصول کی رو سے جہاز کو پیچھے وار رفتار ایصال کرنی چاہئے جس کا معیار حرکت گولے کے آگے دار معیار حرکت کے مساوی اور مخالف ہوگا۔

کل کام جو انجام پایا اس تبدیلی کے مساوی ہے جو جہاز اور گولے کی (۲۲۹) توانائی بالحرکت میں پیدا ہوئی۔

اب چونکہ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کوئی قوت تنہا عمل نہیں کر سکتی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توانائی بالحرکت سے کام کو محسوب کرنے کی ہر صورت میں ایک سے زیادہ اجسام کی توانائی بالحرکت پر غور کرنا ہوگا۔ مثلاً ایک شخص جو زمین پر سے ایک گولے کو پھینکتا ہے نہ صرف گولے کو آگے جنبش دیتا ہے بلکہ اس کے ساتھ ہی پوری زمین کو بھی پیچھے وار دھکا مارتا ہے اور اس لیے دونوں کی توانائی کو شمار کرنا ہوگا ورنہ غلط نتیجے برآمد ہوں گے۔

۱۸۵۔ ایک دوسری مشکل جو پہلی سے قریبی تعلق رکھتی ہے فوراً پیش ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم نے ایک گولے کو رفتار و سے جہاز کے عرشہ کی سمت میں جو خود رفتار و سے حرکت کر رہا ہے پھینکا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہمیں گولے کی توانائی کو  $\frac{1}{2}k$  و فرض نہیں کرنا چاہئے بلکہ  $\frac{1}{2}(k + v^2)$  فرض کرنا کچھ زیادہ مناسب ہے؟ ہرگز نہیں کیونکہ وہ سمندر جس میں جہاز چل رہا ہے زمین کی گردش کے باعث رفتار و (فرض کرو) رکھتا ہے اور اس لئے توانائی کو اسی سبب کی بنا پر

۱ ک (و+و+و) ۲

لینا ہوگا اور علیٰ ہذا ہم اس سلسلہ کو لازماً تباہ کر سکتے ہیں۔ کوئی ایسا حوالہ کا فریم معلوم ہونے سے جو کامل طور پر ساکن ہو تو انائی بالحرکت کی پہلی قیمت معلوم کرنا ناممکن نظر آئے گا۔ مزید بریں یہ مشاہدہ طلب ہے کہ تو انائی بالحرکت کے جملے جو مختلف حوالے کے فریموں کے حوالے سے حاصل ہوتے ہیں صرف مستقلوں کا ہی فرق نہیں رکھتے۔ مثلاً ان دو جملوں کے درمیان فرق جو ہم نے سمندر کے لحاظ سے تو انائی بالحرکت اور زمین کے مرکز کے لحاظ سے تو انائی بالحرکت کے لیے معلوم کئے ہیں حسب ذیل ہے:

۱ ک (و+و+و) ۲ - ۱ ک (و+و) ۲

= ۱ ک و ۱ ک (و+و) ۲

یہ فرق نہ صرف ک اور و پر منحصر ہے بلکہ و اور و پر بھی۔ یہ فرق مستقل نہیں ہے اور اس لیے معدوم نہیں ہوتا جب ہم تو انائی بالحرکت کا اضافہ محسوب کرتے ہیں جو تو توں کے عمل سے پیدا ہوا ہے۔  
حسب ذیل سٹوں سے ایک ایسے طریقے کا اظہار ہوتا ہے جس سے یہ مشکلیں اور ان کی جیسی دوسری رفع ہو سکتی ہیں۔

۱۸۶۔ مسئلہ۔ متحرک ذروں کے کسی نظام کی تو انائی بالحرکت، ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی تو انائی بالحرکت اور اس واحد ذرہ کی تو انائی بالحرکت کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے جس کی کمیت نظام کی کل کمیت کے مساوی ہو اور جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرے۔  
فرض کرو کہ نقطہ لا، ما، ی پر ذرہ ک ہے اور علیٰ ہذا۔ فرض کرو کہ محدودوں کی پیمائش اس طرح عمل میں آئی ہے کہ مرکز ثقل کو مبدا لیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ رفتاریں ع، و، ط، وغیرہ سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ ان کی

پچائش ایک فریم کے لحاظ سے کی گئی ہے جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے  
اس لئے

$$F = \frac{F_{\text{لا}}}{F_{\text{ث}}} \text{، وغیرہ}$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار کسی حوالے کے فریم کے حوالے سے جو خود متحرک ہے یا ساکن ہے (صرف اس شرط کے ساتھ کہ محوروں کی سمتیں گردش نہیں کرتیں) اجزائے ترکیبی ع، و، ط رکھتی ہے۔ اب ذرہ ک کی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہے، ایک ذرہ کی وہ رفتار ہے جو نظام کے مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے اور جس کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں اور دوسری مرکز ثقل کی رفتار ہے جس کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں۔ اس لیے ذرہ ک کی کل رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہیں:

$$ع + ع'، و + و'، ط + ط'$$

پس پہلے ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} k [(ع + ع')^2 + (و + و')^2 + (ط + ط')^2]$$

ہے اور اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} \sum k [(ع + ع')^2 + (و + و')^2 + (ط + ط')^2]$$

ہے یا مبعوں کو پھیلانے سے

$$\frac{1}{2} (\sum k) (ع^2 + و^2 + ط^2)$$

$$+ \sum k (ع + و + ط)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum k (ع' + و' + ط')^2 \quad (۸۰)$$

چونکہ مرکز ثقل کو مبداء کے طور پر لیا گیا ہے اور ذروں کے محدود

لا، ما، ی، وغیرہ ہیں اس لیے مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\frac{3}{2}k}{\frac{3}{2}} = 0 \text{، وغیرہ}$$

(۲۳۱)

اور اس لئے  $\frac{3}{2}k$  لا =۔۔ پس  $\frac{3}{2}k$  فرلا =۔ یا  $\frac{3}{2}k$  ع =۔۔ اسی طرح

$\frac{3}{2}k$  د =۔ اور  $\frac{3}{2}k$  ط =۔۔ اس طرح جملہ (۸۰) کی دوسری سطر پوری کی پوری معدوم ہوتی ہے اور توانائی بالحرکت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{4}(\frac{3}{2}k)(\epsilon^2 + \omega^2 + \tau^2) + \frac{1}{4}(\frac{3}{2}k)(\epsilon^2 + \omega^2 + \tau^2)$$

(۸۱)۔۔۔۔۔

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۸۷۔ اس کے بعد فرض کرو کہ مرکز ثقل کے محدود ثابت محوروں کے ایک خیالی جٹ کے حوالے سے کسی اُن لا، ما، ی ہیں اور مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق  $\epsilon$ ،  $\omega$ ،  $\tau$  ہیں۔

ہم فرض کر چکے ہیں کہ مرکز ثقل کے لحاظ سے ذرہ ک کے محدود لا، ما، ی ہیں اور رفتار کے اجزائے ترکیبی  $\epsilon$ ،  $\omega$ ،  $\tau$  ہیں۔ اس لیے خیالی ثابت محوروں کے حوالے سے ذرہ ک کے محدود

لا، لا، ما، ما، ی، ی ہوں گے اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق

$$\epsilon + \omega + \tau$$

ہوں گے۔

فرض کرو کہ ذرہ ک پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی ہیں۔ دفعہ اولہ کی بموجب اس ذرہ پر بیرونی قوتیں جو کام کرتی ہیں وہ اس منفی کام کے مساوی ہے جو ذرہ ان قوتوں کے خلاف انجام دیتا ہے۔ پس جب ذرہ اپنے راستے کے کسی چھوٹے عنصر کو طے کرتا ہے تو اس پر جو کام انجام پاتا ہے

وہ حسب دفعہ ۱۱۸

لا، فر (لا + لا) + ما، فر (ما + ما) + مے، فر (ی + ی) کے مساوی ہے۔ اس لئے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں وہ کام جو تمام ذروں پر ہوتا ہے

$$\Sigma [\text{لا، فر (لا + لا)} + \text{ما، فر (ما + ما)} + \text{مے، فر (ی + ی)}]$$

ہے اور اس کو حسب ذیل طریقہ پر دو حصوں میں جدا کیا جاسکتا ہے :

پہلے حصہ کو

(۲۳۲)

$$\Sigma \text{لا، فر لا} + \Sigma \text{ما، فر ما} + \Sigma \text{مے، فر ی} \quad (۸۲)$$

لے سکتے ہیں اور دوسرا حصہ حسب ذیل ہے

$$\Sigma \text{لا، فر لا} + \Sigma \text{ما، فر ما} + \Sigma \text{مے، فر ی} \quad (۸۳)$$

مساوات (۷۷) سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma \text{لا} = \text{گ} \frac{\text{فر}}{\text{قوت}}$$

جہاں گ نظام کی کل کمیت ہے اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ کمیت گ کا ایک ذرہ ہے جس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی  $\Sigma \text{لا}$ ،  $\Sigma \text{ما}$ ،  $\Sigma \text{مے}$  ہیں۔ یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ جملہ (۸۲) اس کام کو تعبیر کرتا ہے جو اس خیالی ذرہ کی حرکت میں انجام پاتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ کام اس کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مساوی ہونا چاہئے۔

کل کام جملوں (۸۲) اور (۸۳) کا مجموعہ ہے۔ یہ کل کام نظام کی کل توانائی بالحرکت میں اضافے کے مساوی ہے (بموجب دفعہ ۱۱۸) اور نیز وہ پھر (بموجب دفعہ ۱۱۷) ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی

توانائی بالحرکت اور کمیت گ کے خیالی ذرہ کی توانائی بالحرکت کے اضافہ کے مجموعہ کے مساوی ہے جبکہ خیالی ذرہ کو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہوا خیال کیا جائے۔

یہ آخری انشانہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جملہ (۸۲) سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے قبل الذکر (۸۳) سے تعبیر ہونا چاہئے۔  
اس طرح مرکز ثقل کے لحاظ سے توانائی بالحرکت میں اضافہ

$$Z (\Delta \text{فرلا} + \text{ما فرلا} + \text{فری})$$

ہے اور اس لیے اس کام کے مساوی ہے جو قوتیں کرتی ہیں جبکہ اس کو اس طوطہ محسوب کیا گیا ہو گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

۱۸۸۔ اس مسئلہ میں کہ توانائی بالقوہ کا اضافہ انجام پائے ہوئے کام کے مساوی ہے یہ جائز ہے کہ توانائی بالقوہ اور انجام پائے ہوئے کام دونوں کو صرف مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت پر غور کر کے محسوب کیا جائے یعنی نظام پر اس طریقہ سے بحث کی جاسکتی ہے گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

مثلاً اس مسئلہ پر غور کرو جس میں ایک گولی کو متحرک جہاز پر سے خارج کیا گیا ہے۔ گولی کی کمیت جہاز کی کمیت کے مقابلہ میں خفیف ہونے کی وجہ سے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی اور جہاز کے مرکز ثقل کی حرکت ٹھیک وہی ہے جو جہاز کی ہے۔ اس مرکز ثقل کے لحاظ سے گولی کی رفتار کو صرف وہ رفتار فرض کیا جاسکتا ہے جو بلحاظ عرشہ کے ہے۔ گولی کو نالی سے خارج کرنے میں بارود جو کام کرتی ہے وہ وہی ہے گویا کہ جہاز ساکن ہے اور اس لیے جہاز کے لحاظ سے گولی کی رفتار وہی ہوگی گویا کہ جہاز ساکن ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک گاڑی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور گاڑی پر سے ایک شخص ریت کو گاڑی کی پشت کی جانب ک پونڈنی منٹ کی شرح سے انقباض کرتا ہے



۱ اور ریت کی رفتار سڑک کے لحاظ سے وہ ہے۔ کس شرح سے آدمی کام کر رہا ہے؟  
۲۔ ایک توپ گولے کو انتضاباً اوپر ارتفاع ف تک فائر کر سکتی ہے اسکو  
ایک مسلح گاڑی پر جو رفتار و سے دوڑ رہی ہے رکھا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ  
معلوم کرو جہاں تک گولہ پہنچ سکتا ہے (۱) گاڑی کے پیچھے (ب) گاڑی کے  
سامنے۔

۳۔ مثال مابقی میں راستہ سے قریب ترین وہ نقطہ معلوم کرو جو توپ کی  
زد سے باہر ہے۔

۴۔ کمیت گ کا ایک خول رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اندرونی  
دھماکے سے توانائی کی مقدار ن پیدا ہوتی ہے اور خول کو دو کمیتوں میں توڑ دیتی  
ہے جن میں سے ایک کمیت دو سری کا ک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ٹکڑے اسی  
خط میں حرکت کرنا جاری رکھیں جس میں خول حرکت کر رہا تھا تو ان کی رفتاریں حسب  
ذیل ہوں گی:

$$+ \left[ \frac{2}{3} \text{ گ} \right] \text{ ن } \text{گ} \quad - \left[ \frac{2}{3} \text{ گ} \right] \text{ ن } \text{گ}$$

۵۔ دو آدمی جن میں سے ہر ایک کی کمیت گ ہے دو غیر لچکدار تھوڑے  
کھڑے رہتے ہیں ہر تھمے کی کمیت گ ہے اور وہ ایک چکنی جربنی پر سے لٹک  
رہے ہیں۔ ان میں سے ایک آدمی زمین سے کود کر اپنے مرکز ثقل کو ارتفاع ف  
تک اونچا لیجا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ تھمے سے اسی توانائی کے ساتھ  
اُچکے تو اس کا مرکز ثقل، ارتفاع ف (۱)  $\left( \frac{2}{3} \text{ گ} \right)$  تک بلند ہوگا۔

## دھکے والی قوتیں

۱۸۹۔ حرکیاتی مسائل میں بہت سی ایسی صورتیں پیش ہوتی ہیں جن میں  
قوت کا عمل وقت کے اس قدر خفیف وقفہ میں شروع اور ختم ہوتا ہے  
کہ اس عمل کو فوری یا آنی سمجھا جاسکتا ہے ایسی قوتوں کو دھکے والی قوتیں

کہتے ہیں۔ دھکے والی قوتوں کی مثالیں وہ قوتیں لیجا سکتی ہیں جو نا امتداد پذیر تانگے کو جھٹکا دینے میں یا دو سخت اجسام کے درمیان ٹکڑے ہونے میں بہ عمل آتی ہیں۔

دھکے والی قوت کے عمل سے معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس کی مقدار بالعموم محدود ہوتی ہے۔ چونکہ قوت صرف ایک صغیر وقت میں عمل کرتی ہے اس لیے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لا انتہا بڑی ہوتی چاہئے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح اس قوت کے مساوی ہے جو عمل کرتی ہے اور اس لیے خود قوت کو جب تک کہ وہ عمل کرتی رہتی ہے لا انتہا بڑی ہونا چاہئے۔ اس لیے دھکے والی قوت کو ایک لا متناہی قوت سمجھا جاسکتا ہے جو صغیر وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

۱۹۰۔ دھکے والی قوتوں کے مطالعہ کی ابتداء ہی میں ان قوتوں کی ایک طبعی خصوصیت کا مشاہدہ کرنا مناسب ہوگا۔ کامل طور پر استوار جسم کی تعریف یہ کی گئی تھی کہ وہ ایسا جسم ہے جو کسی قوتوں کے زیر عمل خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہوں اپنی شکل قائم رکھتا ہے۔ اس کے ساتھ ہی یہی ظاہر کر دیا گیا تھا کہ کوئی کامل طور پر استوار جسم کائنات میں موجود نہیں ہے۔ پس بہت بڑی یا لا متناہی قوتوں مثلاً دھکے والی قوتوں کے زیر عمل کسی جسم کو کامل طور پر استوار نہیں سمجھا جاسکتا۔

اس کا نتیجہ یہ ہے کہ جب کوئی دھکے والی قوتیں عمل میں آتی ہیں تو مختلف چھوٹے ذروں کے درمیان جن سے مسلسل اجسام ترکیب یا تہہ ہو رہے ہیں اضافی حرکت شروع ہوتی ہے۔ یہ اضافی حرکت اس قسم کی توانائی رکھتی ہے جو حیلی اعمال کے ذریعہ نظام سے واپس وصول نہیں کیجا سکتی۔ فی الحقیقت ان ذروں کی اضافی حرکت صرف جسم کی حرارت کو تعبیر کرتی ہے چونکہ یہ توانائی نظام سے حیلی کام کے طور پر واپس وصول نہیں کی جا سکتی اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے والی قوتوں کو جو یہ توانائی پیدا کرنے کا

(۳۳۴)

کام انجام دیتی ہیں بقائی قوتیں نہیں خیال کیا جاسکتا۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ کسی نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ دھکے والی قوتوں کے عمل میں مستقل نہیں رہتا۔ کیونکہ مریکا دھکوں کے بعد توانائی کا ایک حصہ حرارت کی شکل میں رہ جاتا ہے۔

مثلاً سیسے کی ایک گولی پر غور کرو جو ایک فولادی نشانے پر ضرب لگاتی ہے۔ فرض کرو کہ نشانے پر ضرب پڑنے سے پیشتر گولی ارتفاع  $F$  پر افقی رفتار سے حرکت کر رہی تھی۔ اس کی توانائی بالحرکت  $\frac{1}{2}mv^2$  ہے اور اس کی توانائی بالقوہ  $mgF$  ہے۔ ضرب کے بعد ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی افقی رفتار نہیں رکھتی اور نشانے کے انتصاباً نیچے گر جاتی ہے۔ جس آن گولی گرنے لگتی ہے اس وقت توانائی بالحرکت صفر ہے لیکن توانائی بالقوہ  $mgF$  ہے جیسا کہ ضرب سے پیشتر تھی۔ اس طرح کل توانائی میں سے توانائی  $\frac{1}{2}mv^2$  و غائب ہو چکی ہے۔ یہ توانائی گولی اور نشانے کے ذروں میں باہد گر حرکتیں پیدا کرنے میں استعمال ہوئی ہے، اور انکا اظہار حرارت کی شکل میں اور نیز غالباً اجسام کی شکلوں کی مستقل تبدیلیوں میں۔ نشانے میں گڑبایا گولی کا چپٹا ہونا ہوتا ہے۔

## دھکے کی پیمائش

(۲۳۵)

۱۹۱۔ دھکے والی قوت، معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا کرتی ہے اس کو قوت کا دھکے کہتے ہیں۔ اس طرح اگر دھکے  $D$ ، کمیت  $k$  پر عمل کرے اور اس کی رفتار کو (یا دھکے کی سمت میں رفتار کے جزو ترکیبی کو)  $e$  سے  $w$  میں بدل دے تو

$D = k(w - e)$  (۸۴)  
حرکت کے دوسرے قانون کی رد سے کسی لمحہ پر عمل کرنے والی قوت

اُس ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی کی شرح کے مساوی ہوتی ہے جس پر وہ عمل کرتی ہے۔ اگر قوت کی مقدار مستقل ہے تو معیار حرکت کی کل تبدیلی قوت اور اُس وقت کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جس میں وہ عمل کرتی رہتی ہے۔ لیکن اگر قوت کی مقدار متغیر ہے تو معیار حرکت کی تبدیلی قوت کے تکملہ کے مساوی ہوگی جو بلحاظ وقت کے جس میں قوت عمل کرتی رہتی ہے لیا گیا ہو۔ پس اگر کل وقت  $t$  کے کسی لمحہ پر قوت کی قیمت  $F$  ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے  $F = F t$ ، اگر قوت کی مقدار مستقل ہو لیکن  $F = F t$ ، اگر قوت کی مقدار متغیر ہو۔

### دھکے کا کام

۱۹۲۔ کمیت  $k$  کی رفتار کو  $u$  سے  $v$  میں تبدیل کرنے میں دھکے  $d$  سے جو کام انجام پاتا ہے وہ

$$\frac{1}{2} k v^2 - \frac{1}{2} k u^2$$

کے مساوی ہے یعنی کمیت کی توانائی بالحرکت میں جو اضافہ ہوا ہے اُس کے مساوی ہے۔ اب چونکہ

$$d = k(u - v)$$

اس لئے اس کام کے جملے کو شکل

$$\frac{1}{2} k (v - u)(v + u)$$

$$= d \left( \frac{v + u}{2} \right)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لئے دھکے کا کام 'زیر عمل کمیت کی ابتدائی اور آخری

رفتاروں کے اوسط اور دھکے کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔  
 اگر کمیت دھکے کے خط عمل کی سمت میں حرکت نہیں کر رہی ہے تو  
 مذکورہ بالا نتیجہ صریحاً درست ہوگا اگر ع، و کو دھکے کے خط عمل کی سمت میں  
 رفتاروں کے اجزائے ترکیبی سمجھا جائے۔

## توضیحی امثلہ

۱۔ ۱۴ پونڈ کا ایک گولہ، ۲۰۰ پونڈ کمیت کے ایک نشانہ پر جو رنجرو  
 کے ذریعہ ٹٹکا ہوا ہے فائر کیا گیا ہے، نشانہ حرکت کی ابتدا اتفاقاً  
 کرنے میں آزاد ہے۔ اگر گولہ ٹکرائے سے پیشتر ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی  
 افقی رفتار سے حرکت کر رہا تھا اور ٹکرائے کے بعد نشانے میں دھنسا ہوا  
 رہ جائے تو ٹکرائے کی وجہ سے توانائی کا نقصان معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکرائے کے بعد نشانہ اور گولہ باہم ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے  
 حرکت کی ابتدا کرتے ہیں۔ لہذا معیار حرکت کے بقا کے اصول سے ٹکرائے سے پیشتر  
 کے معیار حرکت کو ٹکرائے کے بعد کے معیار حرکت کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۴ \times ۱۰۰۰ = ۲۱۴ \times ۵$$

$$\frac{۱۴۰۰۰}{۲۱۴} = ۵$$

ٹکرائے سے قبل توانائی بالحرکت  $\frac{1}{2} \times ۱۴ \times (۱۰۰۰)^2$  تھی اور بعد  
 $\frac{1}{2} \times ۲۱۴ \times ۵^2$ ۔ اس لئے توانائی کا نقصان ہے

$$\frac{1}{2} (۱۴۰۰۰۰ - ۲۱۴ \times ۵^2) = ۶۵۴۰۰۰۰ \text{ فٹ پونڈ، تقریباً}$$

۲۔ ایک بھاری رنجیر جس کا طول ۱ ہے اور فی اکائی طول کمیت

ک ہے ایک مینر کے کنارے پر اس طرح پکڑی گئی ہے کہ اس کا طول ط، کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور باقی حصہ مینر کے انتہائی کنارے پر گول لیٹا پڑا ہے۔ اگر زنجیر کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو حرکت کی کسی منزل پر رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حرکت کی کسی منزل پر زنجیر کا طول لا انتصاً لٹک رہا ہے اور اس طرح طول ل۔ لا مینر پر گول لیٹا ہوا ہے۔ معیروقت فرت کے بعد فرض کرو کہ زنجیر کا جو حصہ لا لٹک رہا ہے وہ لا سے لا+ فرلا میں بڑھ جاتا ہے۔ اس لیے اگر زنجیر کی نیچے وار رفتار و ہو تو صریحاً

$$و = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

وقفہ فرت کی ابتدا میں زنجیر کا نیچے وار معیار حرکت وہ تھا جو رفتار و سے حرکت کرنے والی کمیت ک لا کا ہے۔ اس لیے وہ ک ولا تھا۔ اس وقفہ کے ختم پر معیار حرکت وہ ہے جو کمیت ک (لا+ فرلا) کا ہے جو اس رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو (و+ فرو) سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ پس معیار حرکت میں اضافہ

ک (لا+ فرلا) (و+ فرو) - ک لا و  
ہے یا دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرو فرلا کو نظر انداز کر دیا جائے تو یہ اضافہ  
ک (لا فرو + و فرلا)

ہے۔

لیکن معیار حرکت کا اضافہ فی اکائی وقت مساوات (۱۷) کی رو سے عمل کرنے والی کل قوت کے مساوی ہوتا ہے اور یہ قوت وقفہ فرت کی ابتدا میں ک ج لا ہے اور ختم پر ک ج (لا+ فرلا) اس لیے دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرلا فرت کو نظر انداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ وقفہ فرت میں معیار حرکت میں اضافہ ک ج لا فرت ہوتا چاہئے۔  
اس لیے

(۲۳۷)

ک (لا فرو + و فلا) = ک ج لا فرت

$$= \text{ک ج لا فرلا} \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$\text{یا} \quad \text{ولا} \frac{\text{فرو}}{\text{فلا}} + \text{و}^2 = \text{ج لا}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے کے لیے ہم ۲ لا سے ضرب دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^2 \text{ لا} = \frac{۲}{۳} \text{ ج لا} + \text{مستقل}$$

مستقل کا تعین کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا = ط تو و = ۰ اور اس لیے مستقل کی قیمت -  $\frac{۲}{۳} \text{ ج ط}$  ہونی چاہئے۔ اس طرح

$$\text{و}^2 = \frac{۲}{۳} \text{ ج} \frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{لا}}$$

اس مساوات سے وہ رفتار معلوم ہوتی ہے جبکہ طول لا میز پر سے انتصاباً لٹک رہا ہو۔ جب زنجیر کا آخری ذرہ کھینچ جاتا ہے تو لا کی قیمت ل ہے اور اس لیے اس لمحہ پر

$$\text{و}^2 = \frac{۲}{۳} \text{ ج} \frac{\text{ل} - \text{ط}}{\text{ل}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ و کی یہ قیمت وہ قیمت نہیں ہے جو توانائی کی مساوات سے حاصل ہوگی۔ صریحاً یہاں اس مساوات کو استعمال نہیں کرنا چاہئے کیونکہ دھکے پورے وقت میں عمل کرتے ہیں اور زنجیر کے نئے ذروں کو جھٹکے کے ساتھ حرکت میں لاتے ہیں۔

## مثالیں

- ۱۔ ۱۰ ٹن وزن کا ایک خالی ریلوے ڈبہ ایک چھوٹے ڈبے سے جبرئ
- ۵۔ ٹن کو ٹکڑا لدا ہے ٹکڑا ہوا ہے اور دونوں باہم ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے

حرکت کرتے ہیں۔ پہلے ڈبہ کی رفتار ابتدا کیا تھی اور ڈبوں کے درمیان دھکے کی مقدار کیا ہے۔

۲۔  $\frac{1}{2}$  اولس وزن کا ایک پتھر ۵ فٹ ارتفاع سے نرم زمین پر چھوٹا گیا ہے۔ پتھر کے ساکن ہونے سے پیشتر عمل کرنے والے دھکے کی مقدار معلوم کرو۔

۳۔ ایک ٹن کی کمیت ۱۶ فٹ کے ارتفاع سے ایک انتصابی سطح پر گرتی ہے اور اس کو زمین میں نصف انچ زیادہ دھنسا دیتی ہے۔ یہ تسلیم کر کے کہ میخ پر کمیت کی قوت عاملہ اثنائے عمل میں مستقل رہتی ہے اس کی مقدار اور عمل کا وقفہ معلوم کرو۔

۴۔ ۱۰ گرام کمیت کا ایک جسم ۸ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ دفعتاً اس پر ایک ضرب پڑتی ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار دوگنی ہو جاتی ہے اور اس کی حرکت کی سمت بقدر نصف زاویہ قائمہ کے تبدیل ہو جاتی ہے۔ ضرب کی سمت معلوم کرو اور وہ رفتار معلوم کرو جس سے جسم حرکت کرتا اگر وہ ضرب سے پیشتر ساکن ہوتا۔

۵۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری سے اس کے سروں پر کمیتیں ک، کم، بندھی ہیں جن میں کم، زیادہ بھاری ہے۔ ڈوری کے ایک ثانیہ تک حرکت میں رہنے کے بعد کمیت کم، فرش سے ٹکراتی ہے۔ معلوم کرو (ا) کمیت کم، کتنی دیر تک چڑھنا جاری رکھے گی، (ب) کمیت کم، پھر کس رفتار سے حرکت میں آئے گی جبکہ ڈوری تن جائے۔

(۲۳۸)

۶۔ کسی خاص دن ایک انچ بارش ۱۰ گھنٹوں میں ہوئی جبکہ قطرے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرے۔ ایک ڈیرے کی چھت پر جو دبیر کیرے سے بنا ہے اوسطہ دباؤ فی مربع فٹ معلوم کرو جو بارش کے قطروں کے تصادم سے پیدا ہوا تھا، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ چھت افقی ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن  $\frac{1}{4}$  ۶۲ پونڈ ہے)۔

۷۔ زمین جو اپنے مدار میں رفتار سے حرکت کر رہی ہے چھوٹے شہابوں کے ایک گروہ سے تصادم ہوتی ہے جس کی کثافت فی مکعب میل



ایک کیلو گرام ہے اور جو رفتار و سے ٹھیک اُس سمت کے خلاف حرکت کر رہے ہیں جو زمین کی حرکت کی ہے۔ شہابوں کے تصادم کی وجہ سے زمین کی رفتار میں تخفیف کی شرح معلوم کرو اور نیز زمین کی سطح پر کے مختلف نقطوں پر بارشیا کے ارتفاع میں اضافہ معلوم کرو یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام شہاب زمین کی سطح پر پہنچنے سے قبل گرد میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔ (زمین کی کمیت  $6 \times 10^{24}$  گرام ہے اور اس کا قطر  $12928$  میل ہے)

۸۔ ایک ایکساں زنجیر ایک افقی مستوی پر ڈھیر کی شکل میں گول لیٹی پڑی ہے اور ایک شخص اس کا ایک سر ہاتھ میں لیکر اس کو رفتار و سے یکساں طور پر اوپر اٹھاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اُس کا ہاتھ مستوی سے ارتفاع لا پر ہوتا ہے تو اس کے ہاتھ پر دباؤ زنجیر کے لا  $\frac{1}{2}$  چل طول کے وزن کے مساوی ہے۔

## لچک

۱۹۳۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ اگر ہم فولاد کے لچک گولے کو سخت فرش پر گرائیں تو وہ کچھ ارتفاع تک بازگشت کرے گا لیکن اگر لکڑی کے گولے کو گرائیں تو وہ اس سے بہت کم ارتفاع تک بازگشت کرے گا اور روٹی، کاغذ یا چمینی مٹی کا گولہ تو بازگشت ہی نہ کرے گا۔

جب دو جسموں کی سطحوں کے درمیان تماس ایسی نوعیت کا ہو کہ تصادم کے بعد وہ بالکل بازگشت ہی نہیں کرتے تو ہم کہتے ہیں کہ تماس کامل طور پر بے لچک ہے لیکن اگر جسم بازگشت کریں تو ہم کہتے ہیں کہ تماس لچکدار ہے۔ مریخا لچک کے مختلف درجے ہوتے ہیں۔

## بڑے سے بڑے لچک کا دلچسپ

۱۹۴۔ تصادم کی سب سے زیادہ معروف مثال جس میں لچک بہت بڑی ہوتی ہے غالباً بلیئرڈ کے دو گولوں کے تصادم سے ہم پہنچتی ہے۔ ہم

اس تصادم پر بہترین طریقے سے بحث کر سکیں گے اگر دوسرے گولے کی حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیا جائے جو پہلے گولے کے ساتھ حرکت کرے۔ تصادم سے قبل دوسرے گولے کا مرکز پہلے گولے کے مرکز کے قریب آ رہا ہے اور تصادم کے بعد اس سے بڑے ہمٹ رہا ہے۔ اس لیے اثنائے تصادم میں کسی لمحہ پر اس کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے بڑے ہمٹنے کی حرکت میں تبدیل ہو جانی چاہئے، اس لمحہ پر گولوں کے مرکروں کے درمیان فاصلہ اقل تھا۔

(۲۳۹)

فرض کرو کہ تجربہ کرنے سے پیشتر ہم نے گولوں کے ان دوروں پر سفیدی لگا دی ہے جن پر تصادم واقع ہوا ہے۔ تصادم کے بعد گولوں کا امتحان کرنے سے معلوم ہو گا کہ سفیدی میں غلطی ہو گیا ہے نہ صرف ایک واحد نقطہ پر بلکہ ایک پورے دائرہ پر جو کافی بڑا ہے۔ اگر گولے اچھی رفتار سے حرکت کر رہے ہوں تو اس دائرہ کا قطر نصف انچ بھی ہو سکتا ہے۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس لمحہ پر جس پر گولوں کے مرکز ایک دوسرے سے قریب ترین تھے ان کا درمیانی فاصلہ اس فاصلہ سے کم تھا جو ان کے درمیان ہوتا اگر گولے سکون کی حالت میں ایک دوسرے کو مس کرتے ہوئے رکھے جاتے۔ یعنی اثنائے تصادم میں گولے پچک گئے تھے۔

وہ لمحہ جس پر مرکز قریب ترین ہوتے ہیں بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔

بالعموم جب کوئی دو سطحوں تصادم میں ہوتی ہیں تو وہ لمحہ جس پر مشترک عماد کی سمت میں اضافی رفتار معدوم ہوتی ہے بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔ صریحاً یہ وہ لمحہ ہے جس پر ان دو سطحوں کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے بڑے ہمٹنے کی حرکت میں تبدیل ہوتی ہے۔

۱۶۵۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر پہنچنے سے پہلے بالعموم دونوں اجسام کی رفتاریں تبدیل ہو چکتی ہیں اور اس لیے اس تبدیلی کے پیدا کرنے میں

قوتیں بے عمل ہونی چاہئیں۔ ان قوتوں کے عمل کا پورا وقت (یعنی اس لمحہ سے جس پر اجسام ابتداً مس کرتے ہیں اس لمحہ تک جس پر بڑے سے بڑا پچکاؤ واقع ہوتا ہے) اس قدر کم ہوتا ہے کہ ان کو دھکے والی قوتیں سمجھا جاسکتا ہے۔ ان دو جسموں پر عمل کرنے والے دھکے، عمل اور تعامل ہونے کی وجہ سے مساوی اور مخالف ہونے چاہئیں۔ اگر سطحیں چکنی ہیں تو ان دھکوں کی سمت مشترک عماد کی سمت ہونی چاہئے۔ اگر سطحیں کھردری ہیں تو ہم سمت کی تخصیص نہیں کر سکتے جب تک کہ ایک دوسرے پر سطحوں کی پھسلنے کی سمت معلوم نہ ہو۔ ہر صورت میں فرض کرو کہ مشترک عماد کی سمت میں دھکا جزو ترکیبی د سے تعبیر ہوتا ہے۔ مقدار د کو پچکاؤ کا دھکہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ مقدار ان قوتوں کو تعبیر کرتی ہے جن سے دھکہ ترکیب پاتا ہے اور جو اضافی عمادی رفتار کو صفر میں تحویل کرتی ہیں۔

(۲۴۰) بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ کے بعد قوتوں کا ایک دوسرا نظام بے عمل آنا چاہئے تاکہ وہ رفتاریں پیدا ہوں جن سے اجسام ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں۔ فی الحقیقت بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر اجسام کے پچکے ہوئے حصے کسی ہوائی گمانی کے مانند عمل کرتے ہیں اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ انفریق کی رفتاریں اس خیالی گمانی کے عمل سے پیدا ہوتی ہیں۔ یہ قوتیں بھی جسموں کو جدا کرتی ہیں دھکے والی قوتیں سمجھی جاسکتی ہیں اور مشترک عماد کی سمت میں اس دھکے کے جزو ترکیبی کو د سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ دھکے د کو عود کا دھکہ کہتے ہیں۔

۱۹۶۔ جب تصادم سے قبل اجسام کی حرکت معلوم ہوتی ہے تو ہم معیار حرکت کے بقا کا اصول استعمال کر کے بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر رفتاریں معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے پچکاؤ کے دھکے د کو محبوب کرنا ممکن ہے۔

برخلاف اس کے دھکے د کی مقدار تصادم اجسام کے تماس کی نوعیت منحصر ہوتی ہے اگر اجسام کامل طور پر بے چلک ہیں تو تصادم کے بعد انفریق

نہیں ہوگا اور اس لیے  $d = 0$ ۔۔ تجربہ کی بنا پر بالعموم یہ معلوم ہوا ہے کہ دھکے  $d$  اور دھکے  $d$  میں حسب ذیل سادہ ربط ہے :

$$d = \text{چ } d$$

جہاں چ ایک مقدار ہے جو صرف دو متضاد سطحوں کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہے اور دھکے  $d$  کی مقدار پر منحصر نہیں ہے۔ مقدار چ کو ان دو اجسام کی لچک کی قدر کہتے ہیں۔

یہاں اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے کہ لچک کی یہ قدر وہ مقدار ہے جو ان قدروں یا لچک کے مستقلات سے بالکل مختلف ہے جو لچکدار اجسام کے نظریہ میں واقع ہوتے ہیں۔ واقعہ یہ ہے کہ اصطلاح لچک کی قدر جن معنوں میں مقدار چ کو تعبیر کرنے کے لیے یہاں استعمال ہوئی ہے وہ نامناسب ہے کیونکہ اس سے جس چیز کی پیمائش ہوتی ہے اس کو لچک کی بجائے بازگشتگی کہنا زیادہ مناسب ہے اور بلاشبہ لچک کی قدر کی بجائے بازگشتگی کی قدر کہنا زیادہ ٹھیک ہے۔ لیکن بالعموم اصطلاح لچک کی قدر استعمال کی جاتی ہے۔

۱۹۷۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ چ کی قیمت کامل طور پر بے لچک اجسام کے لیے صفر ہے۔ لوہا سیسے سے ٹکرائے تو چ کی قیمت تقریباً ۱۴ ہے لوہا لوہے سے ٹکرائے تو اس کی قیمت ۶۶ ہے اور سیسا سیسے سے ٹکرائے

تو ۲۰۔ ہم دیکھتے ہیں کہ بازگشتگی دو اجسام کے درمیانی تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور اس لحاظ سے رگڑ کی قدر کے مشابہ ہے۔ بازگشتگی

کچھ ایک جسم سے اور کچھ دوسرے جسم سے پیدا نہیں ہوتی کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو چ کی قیمت جبکہ لوہا سیسے سے ٹکرائے ان قیمتوں کے درمیان ہوتی جو لوہا لوہے سے اور سیسا سیسے سے ٹکرائے میں حاصل ہوتی ہیں۔

ان اجسام کی مثالیں جن کے لیے لچک کی قدر بڑی ہے حسب ذیل معلوم ہوئی ہیں، ہاتھی دانت کے دو گونے جب متضاد ہوتے ہیں تو چ کی قیمت تقریباً ۸۱ ہے اور شیشا شیشے سے متضاد ہوتا ہے تو چ کی

قیمت ۶۴ ہے۔ سب سے زیادہ کامل لچک جو تصور کی جاسکتی ہے

اُن دو اجسام کی ہے جن کے لیے  $\text{ج} = 1$  اس صورت میں عموماً دھکے پچکاؤ کے دھکے کے مساوی ہوگا۔ ایسے اجسام کو کامل طور پر چکدار کہا جاتا ہے۔ کامل طور پر چکدار اجسام کی یہ خصوصیت ہے کہ تصادم سے کسی توانائی کا نقصان نہیں ہوتا۔ یہ ظاہر ہے کہ ج کی قیمت اکائی سے متجاوز نہیں کر سکتی کیونکہ اگر اس کی قیمت اکائی سے متجاوز ہو تو عموماً دھکے سے جو توانائی بالحرکت ظہور پذیر ہوگی وہ اُس توانائی سے زیادہ ہوگی جو پچکاؤ کا دھکے جذب کرنا ہے اور اس لیے مجموعی توانائی بڑھ جائے گی جو ناممکن ہے۔

اب ہم ان اصولوں کو تصادم کی چند اہم صورتوں پر استعمال کریں گے۔

## ذره جو ایک ثابت سطح سے ٹکرائے

### راست تصادم

۱۹۸۔ اول فرض کرو کہ تصادم راست ہے یعنی ٹکر کے لمحے پر ذرہ سطح کے اُس نقطہ کے عماد پر حرکت کر رہا ہے جس پر وہ آکر ٹکراتا ہے۔ فرض کرو کہ اس کی کمیت  $k$  ہے اور تصادم سے قبل اس کی رفتار  $u$  ہے۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحے پر ذرہ مستوی کے لحاظ سے ساکن ہوگا اور اس لیے اس کا معیار حرکت پچکاؤ کے دھکے کی وجہ سے  $k$  و سے صفر میں متحول ہوگا۔ اس لیے

$$d = k \cdot u$$

اگر لچک کی قدر  $\text{ج}$  ہے تو

$$d = \text{ج} \cdot k \cdot u$$

(۲۴۲) اس طرح مقدار  $\text{ج} \cdot k$  کا ایک عمادی دھکے ظہور پذیر ہوگا اور

اس کی وجہ سے ذرہ میں رفتار  $\text{ج}$  و پیدا ہوگی۔ کوئی ماسی دھکے موجود نہیں ہے کیونکہ سطحیں ایک دوسرے پر نہیں پھسلتیں۔ پس رفتار بازداشت سطح کے

عماد کی سمت میں ج و ہے۔

## مائل تصادم۔ چکنا تھامس

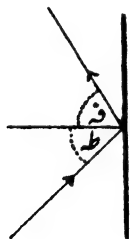
۱۹۹۔ اگر تصادم مائل ہے تو فرض کرو کہ تصادم سے قبل ماس مستوی اور

عماد کی سمتوں میں رفتار کے اجزائے ترکیبی 'و' و 'ج' ہیں۔ حسب سابق

$$\begin{aligned} & \text{اس لیے تصادم کے بعد عماد کی سمت میں رفتار (فرض کرو تو)} \\ & \text{و} = \text{ج} \end{aligned}$$

ہے۔ اگر تھامس کو چکنا فرض کیا جائے تو ماس مستوی میں کوئی قوت نہیں ہو سکتی اور اس لیے ماس مستوی میں معیار حرکت غیر متغیر رہتا ہے۔ اس طرح ماس مستوی میں رفتار 'و' کے مساوی رہتی ہے اور اس لیے تصادم کے بعد رفتار وہ ہوگی جس کے اجزائے ترکیبی 'و' و 'ج' ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو رفتار تصادم سے پیشتر عماد کے

ساتھ بناتی ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد متناظر زاویہ نہ ہے۔ تب



$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}$$

$$\text{مس نہ} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}$$

شکل (۱۲۶)

ایسے مس طہ = ج مس نہ

اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو ج = ۱ اور اس لیے طہ = نہ یعنی ذرہ ایسے زاویہ پر بازگشت کرتا ہے جو زاویہ وقوع کے مساوی ہے۔ اس کا انعکاس اسی قانون کے تحت ہوتا ہے جو نور کی کرن کا ہے۔ اگر اجسام کامل لچکدار نہیں ہیں تو طہ > نہ اور اس لیے بازگشت کا

راستہ عادی سے زیادہ ہٹا ہوا ہو گا۔

اگر اجسام کا کل طور پر بے چلک ہیں تو  $\vec{v} = 0$  اور اس لیے  $\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{v}$  ذرہ مستوی پر صرف پھسلے گا اور صریحا ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ  $\vec{v} = 0$ ۔  
تصادم سے قبل توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} k (\vec{v}^2 + \vec{v}^2)$$

ہے اور تصادم کے بعد

$$\frac{1}{2} k (\vec{v}^2 + \vec{v}^2)$$

ہے۔ اس لیے توانائی بالحرکت میں نقصان کی مقدار

$$\frac{1}{2} k (\vec{v}^2 - \vec{v}^2)$$

$$\frac{1}{2} k (\vec{v}^2 - \vec{v}^2)$$

ہے یعنی

یہ نقصان معدوم ہو گا اگر اجسام کا کل طور پر چلدار ہوں یعنی  $\vec{v} = 0$ ۔  
باقی تمام صورتوں میں توانائی کا نقصان ضروری ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ  
جج اکائی سے بڑا نہیں ہو سکتا ورنہ اجسام کو ایک دوسرے سے ٹکرا کے  
توانائی میں اضافہ کرنا ممکن ہوتا۔

## ماثل تصادم - کھردراتماس

۲۰۰۔ چکنے تماس کی صورت کی طرح ہمیں ربط  $\vec{v} = \vec{v}$  و حاصل ہوتا ہے  
جو عادی سمت میں رفتار کے اجزائے ترکیبی کو مربوط کرتا ہے۔ لیکن تعامل  
کلا عادی سمت میں عمل نہیں کرتا اور اس لیے اب یہ کہنا درست نہیں ہے کہ  
رفتار کا ماسی جزو ترکیبی غیر متغیر رہتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں جس میں ذرہ کی سطح ثابت  
سطح پر اس پورے وقفہ میں جس میں یہ دو سطحیں ایک دوسرے کو مس کر رہی ہیں  
ایک ہی سمت میں پھسلتی ہے۔ تب تصادم کے ہر لمحہ پر ایک ماسی قوت  
ہوگی جو عادی قوت کے مہ گنا کے مساوی ہوگی اور اس لیے کل ماسی دھکے  
عادی دھکے کے مہ گنا کے مساوی ہونا چاہئے اور اس لیے مہ  $(\vec{v} + \vec{v})$  کے مساوی۔

اس لیے اگر تصادم کے بعد ماسی رفتار ع ہے تو

$$ک = (ع - ع) = مہ (د + د)$$

$$= مہ (ع + ۱) د$$

$$= مہ (ع + ۱) ک و$$

$$ع = ع - مہ (ع + ۱) مہ$$

اس طرح حسب سابق اگر ہم فرض کریں کہ ذرہ کارا سمتہ تصادم سے قبل اور اس کے بعد عماد کے ساتھ زاوے طہ، نہ بناتا ہے (دیکھو شکل ۱۲۶) تو

$$مس طہ = \frac{ع}{و}$$

$$مس نہ = \frac{ع - مہ (ع + ۱) مہ}{و}$$

$$اس لیے ع مس نہ = مس طہ - مہ (ع + ۱) مہ$$

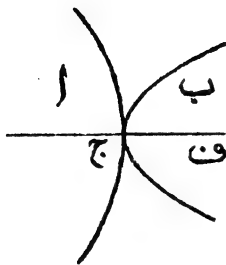
(ع + ۱) مہ کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوگی اور اس لیے نہ ہمیشہ اُس قیمت سے کم ہوگا جو مستوی کے چکنے ہونے کی صورت میں حاصل ہوتی ہے، دوسرے الفاظ میں مستوی کا کھر دراپن ذرہ کو عماد سے قریب تر بازگشت کرانے کا موجب ہوتا ہے۔

لیکن یہ مساوات صرف بعض حدود کے اندر درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ تصادم کے پورے وقفہ میں پھیلن واقع ہوتی ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ حرکت کی کسی خاص منزل پر پھیلن ہو تو پ ہو اور ذرہ لڑھکنا شروع کرے اور اگر ایسا ہو تو محصلہ بالا مساوات جائز نہیں رہتی

## دو متحرک اجسام کا تصادم

۲۰۱۔ فرض کرو کہ کیتوں ک، ک کے دو جسم ۱، ۲، نقطہ ج پر تصادم ہوئے ہیں اور ج پر مشترک عماد ج ف ہے۔ فرض کرو کہ تصادم کے





شکل (۱۲۷)

لمحہ پر ان اجسام کے مراکز ثقل دونوں  
خط ج ف پر واقع ہیں اور فرض  
کرو کہ کینٹوں 'ا' 'ب' کے مراکز ثقل  
کی رفتاروں کے اجزائے ترکیبی عماد  
ج ف کی سمت میں

ء 'ء' تصادم سے قبل  
و 'و' سے بڑے پچکاؤ کے

اور و 'و' تصادم کے بعد  
ہیں۔ اب اگر پچکاؤ کے دھکے کو د سے تعبیر کیا جائے اور عود کے دھکے کو  
د سے تو

$$(۸۵) \quad د = ک (۶ - ۹) = ک (۶ - ۹)$$

$$(۸۶) \quad د = ک (۹ - ۶) = ک (۹ - ۶)$$

پہلی مساوات سے

$$۶ = د + \frac{د}{۹}$$

$$۶ = د - \frac{د}{۹}$$

$$\text{اس لیے} \quad ۶ - ۶ = د \left( \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} \right)$$

یہ مساوات تصادم سے پیشتر جو اضافی رفتار ہے اس کو د سے مربوط  
کرتی ہے۔

اسی طرح مساواتوں (۸۶) سے

$$۹ - ۶ = د \left( \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} \right)$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تجربی ربط  $\dot{D} = \dot{C} + \dot{D}$  ربط

و۔ و۔ = ج۔ (ع۔ ع۔) کے ٹھیک مائل ہے یعنی الفاظ میں: تصادم کے بعد مرکز ثقل کی اضافی رفتار کا عمادی جزو ترکیبی تصادم سے قبل اضافی رفتار کا ج۔ گنا اور اسکی مخالف سمت میں ہوتا ہے۔

اس قانون کو نیوٹن کا تجربی قانون کہتے ہیں، اس سے مادہ کی وہی خاصیت بیان ہوتی ہے جو ربط  $\dot{D} = \dot{C} + \dot{D}$  سے ظاہر ہے۔

ایک اور رشتہ جو تصادم سے قبل اور اس کے بعد کی رفتاروں کو مربوط کرتا ہے معیار حرکت کے بقا کے اصول سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ

$$k + k' = k + k' + \dot{C} + \dot{D}$$

اس کو مساوات (۸۷) کے ساتھ ملانے سے ہم تصادم کے بعد کی رفتاروں و، و' کو تصادم سے قبل کی رفتاروں ع، ع' کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔

ان مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$(۸۸) \quad \frac{k + k' + \dot{C} + \dot{D}}{k + k'} = \frac{k + k' + \dot{C} + \dot{D}}{k + k'}$$

$$(۸۹) \quad \frac{k + k' + \dot{C} + \dot{D}}{k + k'} = \frac{k + k' + \dot{C} + \dot{D}}{k + k'}$$

ان سے عمادی رفتاریں حاصل ہوں گی۔

اگر اجسام کھردرے ہیں تو ہم ماسی رفتاروں کو اسی طریقے سے معلوم کرتے ہیں جو دفعہ ۲۰ میں بیان کیا جا چکا ہے، لیکن اگر اجسام چکنے ہیں تو ج۔ ف کی عمود ا سمتوں میں رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں۔ اگر ان دو اجسام کا مرکز ثقل ساکن ہو یا اگر ہم تمام رفتاروں کو مرکز ثقل کے لحاظ سے پیمائش کریں جس کا مطلب بھی وہی ہے تو

$$\begin{aligned} & \text{ک} + \text{ع} = \text{ع} - \\ & \text{اس لیے} \quad \text{و} = - \frac{\text{ک} - (\text{ع} - \text{ع})}{\text{ک} + \text{ک}} \\ & \quad \text{و} = \frac{\text{ک} - (\text{ع} - \text{ع})}{\text{ک} + \text{ک}} \end{aligned}$$

رہا کہ  $\text{ع} = \text{ک} - \text{ع}$  کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\text{و} = - \text{ع}$$

$$\text{و} = - \text{ع}$$

اور اس لیے اجسام ایک دوسرے سے باز گشت کرتے ہیں گویا کہ وہ چک چک کے ایک ثابت مستوی پر متصادم ہوئے تھے۔  
توانائی بالحرکت، تصادم سے قبل یا بعد، دو توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگی (۱) اُس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہے (۲) نظام کی توانائی بالحرکت بلحاظ مرکز ثقل کے۔ اول الذکر توانائی تصادم سے غیر متغیر رہتی ہے اور اس لیے تصادم کی وجہ سے کل توانائی بالحرکت میں جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ اُس توانائی کے نقصان کے مساوی ہے جو مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے۔

اگر اجسام چکے ہیں تو توانائی بالحرکت کا یہ نقصان

$$= \frac{1}{2} (\text{ک} + \text{ع} - \text{ک} - \text{و} - \text{ک} - \text{و})$$

$$= \frac{1}{2} (\text{ک} + \text{ع} - \text{ک} - \text{و}) (1 - \text{ج})$$

اس طرح توانائی بالحرکت کا نقصان، مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی بالحرکت کے (۱ - ج) گئے کے مساوی ہے۔ اگر اجسام کامل طور پر چکدار ہیں تو ج = ۱ اور اس لیے توانائی میں کوئی نقصان واقع نہیں ہوتا۔ لیکن اگر ج = ۰ تو مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی پوری کی پوری نقصان میں آ جاتی ہے۔

## دو چکنے کرؤں کا تصادم

۲۰۲۔ فرض کرو کہ تصادم کے بعد دو چکنے کرؤں کی حرکت معلوم کرنے میں ہم اوپر کے اصولوں کو استعمال کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تصادم کے لمحہ پر کرؤں کے مرکز ثقل  $A$ ،  $B$  ہیں اور اس لیے خط  $AB$  تصادم کے نقطہ  $C$  پر سطحوں کا مشترک عماد ہے۔

سب سابق فرض کرو کہ تصادم سے قبل  $A$  پر رفتاریں  $u, v$  ہیں اور ان دونوں کو سمت  $AB$  میں پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد اسی سمت میں رفتاریں  $u', v'$  ہیں۔ تب معیار حرکت کے بقا کی رو سے  $AB$  پر

$$k + u = k' + u' \quad \text{و} \quad k + v = k' + v'$$

اور نیوٹن کے قانون سے  $u - v = e(v' - u')$  (۶۔۷)

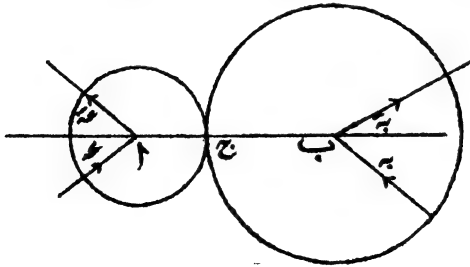
ان سے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) حسب سابق حاصل ہوتی ہیں۔

اگر تصادم سے قبل اور بعد  $A$  کی رفتاریں  $u, u'$  کے ساتھ زاویے

$\theta, \theta'$  بنائی ہیں (حسب شکل) تو تصادم سے قبل اور بعد ماسی رفتاریں

$$u \cos \theta, u' \cos \theta'$$

ہیں۔ لیکن چونکہ ماسی رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں اس لیے



شکل (۱۲۸)

دس عہ = عس عہ

اسی طرح ب کی حرکت سے

دس عہ = عس عہ

اس لیے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) ہو جاتی ہیں

م عہ = ع + عک عہ - عک (ع - ع) م عہ  
(ک + عک) ع

م عہ = ع + عک عہ + عک (ع - ع) م عہ  
(ک + عک) ع

اور ان سے عہ، پہ ابتدائی حرکت کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔  
اگر کرے مساوی کمیت کے ہوں اور دوسرا کرے ابتدا ساکن ہو (۲۴۸)  
جیسے کہ بلیرڈ کے کھیل میں ہوتا ہے تو ک = ع، عہ = ع۔ اور اس لیے

م عہ = ع + عک (ع - ع) م عہ = ع۔

اس طرح ب، مرکزوں کے خط پر حرکت کی ابتدا کرتا ہے اور  
صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ وہ قوتیں جو اس کو حرکت میں لاتی ہیں  
اس خط پر عمل کرتی ہیں۔

چونکہ ج ہمیشہ اکائی سے کم ہوتا ہے اور عہ ضرور حادہ ہے  
اس لیے م عہ منفی ہونا چاہئے اور اس لیے عہ منفی ہو گا۔ اگر ج = ۱  
تو عہ = ۰۔ چنانچہ اگر کرے کا بل چکنے اور کامل چکدار ہوں تو تصادم کے  
بعد کرے ۱ مرکزوں کے خط کے علی القوائم حرکت کرے گا، اس کی حرکت  
وہی ہوگی جو ہوتی اگر وہ کامل چکنے اور بے لچک مشوی سے ٹکراتا۔

## توضیحی مثال

ایک کھڑے میز پر چند مشابہ سیکوں کو مساوی فاصلوں پر  
ایک خط مستقیم میں رکھا گیا ہے۔ پہلے سیکہ کو اس خط پر

اس طرح متحرک کیا جاتا ہے کہ وہ دوسرے سکے سے راست ٹکرائے۔  
حاصل حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ دو سکوں کے درمیان تصادم کے لیے چلک کی قدر ج ہے  
اور سکوں اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ ہر سکہ کی کیت ک  
ہے اور وہ متصل سکوں کے قریب ترین نقطوں کے درمیان فاصلہ ف ہے۔  
ایک سکہ اور میز کے درمیان عمادی تعامل ک ج ہے اور اس لیے  
سکہ کی حرکت میں مزاحم رگڑ کی قوت مہ ک ج ہے اور پیدا شدہ ابطاء مہ ج  
ہے۔ پس اگر ایک سکہ اپنے ابتدائی محل سے رفتار و سے چلے تو اس کی رفتار  
دوسرے سکہ تک پہنچنے میں ۶ ہو جائے گی جہاں

$$و' - ۶ = ۲ مہ ج ف \quad (۱)$$

اب ہمارے پاس مساوی کیت کے دو سکے ہیں جو رفتاروں ۶، ۶ سے  
ٹکراتے ہیں تصادم کے بعد ان کی رفتاریں و' و' حسب ذیل مساواتوں سے حاصل  
ہوتی ہیں:

$$و - و' = ج ۶ \quad (\text{قانون نیوٹن})$$

$$و + و' = ۶ \quad (\text{معیار حرکت کا بقا})$$

$$\text{اس لیے} \quad و = \frac{۱}{۲} ۶ (۱ - ج)$$

$$و' = \frac{۱}{۲} ۶ (۱ + ج)$$

تصادم کے بعد وہ سکہ جو ابتداً حرکت میں تھا رفتار و حاصل کرتا ہے اور  
رگڑ کی قوت سے اس میں ابطاء مہ ج پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے وہ ساکن  
ہو جائے گا اگر وہ اس اثناء میں فاصلہ س طے کرنے کے بعد پھر نہ ٹکرائے  
جہاں س مساوات

$$و = ۲ مہ ج س$$

$$\text{یا} \quad س = \frac{و}{۲ مہ ج} = \frac{۶^۲ (ج - ۱)^۲}{۸ مہ ج} \quad (ب)$$

(۲۳۹)

سے حاصل ہوگا۔ وہ سکے جو تصادم کی وجہ سے حرکت میں آیا ہے رفتار

$$v = \frac{1}{4} (u + v) \quad (ج)$$

سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ اس سے پہلے کا سیکہ رفتار و سے حرکت کی ابتدا کیا تھا یہ رفتار مساوات (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔ اب مساواتوں (۱) اور (ج) سے  $u$  کو ساقط کیا جائے تو ابتدا حرکت میں آنے کی متواتر رفتاروں کے درمیان شہ

$$v = 2 \text{ مہ ج ف} + \frac{u}{(ج + ۱)} \quad (د)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ربط مستقل سروں والی فرق کی مساوات ہے۔

اگر  $ج = ۱$  تو ہم مساوات (ب) سے دیکھتے ہیں کہ  $س = ۰$ ۔ اور اس لیے ہر سکے اپنے سامنے کے سکے سے ٹکرانے کے بعد مطلقاً ساکن ہو جاتا ہے، وہ اپنا پورا معیار حرکت اُس سکے میں منتقل کر دیتا ہے۔ نیز مساوات (۱) سے

$$u = 2 \text{ مہ ج ف}$$

جب  $n$  سکوں کے درمیان معیار حرکت منتقل ہو چکتا ہے تو رفتار کے مربع کی قیمت بقدر  $2n$  مہ ج ف کے گھٹ جاتی ہے۔ اس طرح کسی نقطہ پر متحرک سکے کی رفتار وہ رفتار ہوتی ہے جو ایسے سکے کی ہوتی جو رفتار و سے حرکت کی ابتدا کرتا اور وہ فاصلہ طے کرتا جو ان سکوں کے درمیانی تمام وقفوں کے مجموعے کے مساوی ہے جن پر سے حرکت منتقل ہوئی ہے۔

اگر  $ف = ۰$  یعنی اگر سکے ابتداً ایک دوسرے کو مس کر رہے ہوں تو

$$v = \frac{2}{ج + ۱}$$

پس اگر  $n$  سکے ہیں تو  $n$  واں سکے رفتار

$$v = \frac{2}{(ج + ۱)} \quad (۱-۵)$$

سے حرکت کی ابتدا کرے گا۔

## مثالیں

۱۔ اوّلے ایک منجد تالاب کی سطح پر ایسی سمت میں ٹکراتے مشاہدہ کئے گئے ہیں جو انتصابی کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بناتی ہے اور وہ ٹکراتے کے بعد ۶۰ کے زاویہ پر بازگشت ہوتے ہیں۔ تماس کو چکنا تسلیم کر کے لچک کی قدر معلوم کرو۔

۲۔ اگر مثال مابقی کے اوّلے تصادم کے بعد ۲ فٹ کے ارتفاع تک اچھلیں تو وہ رفتار معلوم کرو جس سے وہ ابتداً زمین سے ٹکرائے تھے۔

۳۔ مثال مابقی میں وہ ارتفاع معلوم کرو جہاں تک اوّلے برف پر سے دوسری بار بازگشت کرنے میں اچھلیں گے۔

۴۔ ایک گولے کو ایک افقی فرش پر گرایا گیا ہے جو دومرتبہ بازگشت کرنے کے بعد ایک ایسے ارتفاع تک اچھلتا ہے جو اس ارتفاع کا نصف ہے جہاں سے وہ گرایا گیا تھا۔ لچک کی قدر معلوم کرو۔

۵۔ ایک گولی ایک کھردرے نشانہ پر ۵۰ کے زاویہ پر ٹکراتی ہے اور اُسی زاویہ پر بازگشت ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$e = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

۶۔ ایک گولہ جس کو فاصلہ ۱ سے سر کیا گیا ہے ایک نشانہ سے زاویہ قائمہ پر ٹکراتا ہے اور بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ نشانہ سے فاصلہ ۱ چ پر گرے گا (ہوا کی مزاحمت نظر انداز کرو)۔

۷۔ کمیت ک کا ایک کرہ کمیت ک کے ایک ساکن کرہ سے ٹکراتا ہے ان کے درمیان تماس چکنا ہے اور تصادم کے بعد ان کے راستے ایک دوسرے کے علی القوائم مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ  $k = \frac{1}{2}$ ۔

۸۔ بلیڈ کے دو گولے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں (اور ساکن ہیں) ایک تیسرا گولہ ایک ساتھ ان سے ٹکراتا ہے اور تصادم کے بعد ساکن



ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ  $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$   
 ۹۔ ایک چکنے افقی مستوی پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار  $v$  کے ساتھ ارتفاع  $h$  پر پھینکا گیا ہے اور یہ ذرہ مستوی سے ٹکرانے کے بعد مستوی پر متعدد مرتبہ بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی پرواز کا کل وقت  $\frac{2}{g}$  (جب  $g$  ہے اور اس کا کل طے  $\frac{2}{g}$  (۱-ج) ہے۔

۱۰۔ ایک کھلاڑی ایک دیوار سے افقی فاصلہ  $f$  پر کھڑا ہے اور وہ ایک گولے کو دیوار کی جانب افقی سے میلان  $\theta$  پر پھینکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولہ بازگشت کرنے کے بعد کھلاڑی کے پاس واپس ہو تو جس رفتار سے کھلاڑی نے اسے پھینکا ہے وہ حسب ذیل ہونی چاہئے:-

$$v = \frac{2g(1 + \sin \theta)}{2g \cos \theta} \text{ (جب } g = \text{مہجم } g)$$

جہاں  $g$  اور  $\theta$ ، لچک اور رگڑ کی قدریں ہیں۔

۱۱۔ مثال مابقی میں حسب ذیل صورتوں پر غور کرو:

$$(A) \text{ } g = 0, (B) \text{ } g = \text{مہجم } g, (C) \text{ } g = \text{مہجم } g$$

## عام مثالیں

۱۔ ایک چکنے فانیہ ایک افقی مینہ پر پھیل سکتا ہے، اس کے رخ پر ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ فانیہ کو کس طرح متحرک کرنا چاہئے کہ ذرہ نہ اڑے نہ چڑھے نہ نیچے اترے۔ نیز ذرے اور فانیہ کے درمیان دباؤ معلوم کرو۔

۲۔ ریل کا ایک ہموار برقی راستہ ہے جس پر نصف میل کے فاصلوں سے اسٹیشن ہیں۔ اس راستہ پر ۱۰۰ ٹن کی ٹرینوں کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے چلانا مقصود ہے جس میں ہر اسٹیشن پر نصف منٹ کا قیام بھی شامل ہے۔ ثابت کرو کہ برقی محرک کے کم از کم مزید ۸ ٹن وزنی ہونے چاہئیں اگر رگڑ کی قدر  $\mu$  ہو

اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ٹرینوں میں مسلسل بریک لگے ہوئے ہیں۔ (انفعالی  
مزامحتوں کو نظر انداز کرو)۔

ثابت کرو کہ اس ریلوے کو جاذبہ ارض سے چلایا جاسکتا ہے اگر راستہ  
اسٹیشنوں کے درمیان تقریباً ۶۰ فٹ کے نصف قطر تک نیچے وار منحنی ہو  
اور یہ کہ اسٹیشنوں کے درمیان میلان (Dip) تقریباً ۲۰ فٹ اسٹیشنوں پر دھال  
تقریباً ۳۳ میں ۱ اور اعظم رفقہ تقریباً  $\frac{1}{2}$  میل فی گھنٹہ۔

۳۔ ارتفاع ف اور قطر کا ایک اسطوانہ دہل کے ایک ڈبہ کے فرش پر  
استادہ ہے اور ڈبہ دقیقاً اسراع کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ ثابت  
کرو کہ اسطوانہ ڈبے کے لحاظ سے صرف اُس وقت ساکن رہے گا جبکہ ع، مہج  
اور  $\frac{W}{F}$  دونوں سے کم ہو۔

۴۔ ایک دائری طوق پھینکا گیا ہے جو ایکساں گھومتا ہوا غیر متغلب حرکت  
کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک قطع مکانی مرتسم کرے گا اور کورکاتنا کوور کے  
طول  $\frac{2}{3}$  کے وزن کے مساوی ہوگا جہاں د، طوق کے مرکز کے لحاظ سے کورکی  
رفقہ کو تعبیر کرتا ہے۔

(۲۵۱)

۵۔ ۶ فٹ لمبی ایک ایکساں زنجیر جس کی کمیت فی فٹ ۲ پونڈ ہے  
ایک کھردرے افقی میز پر خط مستقیم کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا کچھ حصہ میز کے  
کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور پھسلن عین واقع ہوئے کوہے۔ زنجیر اور  
میز کے درمیان رگڑ کی قدر  $\frac{1}{4}$  ہے۔ اگر ذرا سے خلل سے زنجیر پھسلنے لگے تو میز کے  
کنارے پر زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ اس کا لافٹ طول پھسل چکے۔

۶۔ دو مساوی گولے ۱، ۲، جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے  
ایک دوسرے سے فاصلہ ۱ پر ہیں۔ ۱ پر دھک د سمت ۱، ۲ میں عمل کرتا  
ہے اور ۲ پر ایک مستقل قوت ف اسی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ  
۱، ۲ سے نہ ملیگا اگر

د > ۲ ر ف ک

۷۔ ایک گولی کا وزن ایک اونس ہے، اس کو ایک درجہ کے ارتفاع پر رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ سے فائر کیا گیا ہے، یہ گولی اپنے راستہ کے بلند ترین نقطہ پر ایک پوند سے سے جا لگتی ہے جس کا وزن  $2\frac{1}{4}$  پونڈ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ جب گولی پر بندے پر پڑی تھی تو وہ ساکن تھا اور اس کے بعد پیوست شدہ گولی کے ساتھ پیچھے گرا معلوم کرو کہ فائر کرنے کے نقطہ سے کتنی دور پر بندہ گرا ہو گا۔

۸۔ ایک گولی کا وزن ۱۰ پونڈ ہے، اس کو رفتار ۱۰۰۰ سے ایک جسم پر فائر کیا گیا ہے جو رفتار ۱۰۰ سے آگے جا رہا ہے اور جس کا وزن ۱۰۰ ہے۔ ثابت کرو کہ جسم کی رفتار گولی کی ضرب پڑنے کے بعد

$$\frac{100 - 10}{10} \text{ یا } 9 \text{ یا } \frac{10}{10} (1 - 0.1)$$

ہو جائے گی بموجب اس کے کہ گولی جسم میں پیوست ہو جائے یا اس کو چھید کر رفتار سے حرکت کرے۔

آزاد شدہ توانائی محسوب کرو اور پھر جسم کی اوسط مزاحمت گولی سے چھدے ہوئے طول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۹۔ ایک وزن اوپر سے ایک میخ پر گرتا ہے اور اپنے متواتر دھکوں سے میخ کو زمین میں دھکیلتا جاتا ہے۔ ہر ضرب پر میخ جس حد تک زمین میں ڈھنسی ہے وہ کس طرح (۱) وزن کی مقدار پر اور (ب) اس کو جس ارتفاع تک اٹھا کر چھوڑا گیا ہے اس پر منحصر ہوگی؟

اگر وزن ایک ٹن ہے اور جس ارتفاع سے وہ گرتا ہے وہ ۱۰ فٹ ہے اور میخ زمین میں ۱۰ انچ ڈھنسی تو مزاحمت (ٹنوں میں) معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک بے لچک میخ کی کمیت ک پونڈ ہے اور ایک ہتھوڑی جس کی کمیت ۱۰ پونڈ ہے انتصاباً فاصلہ ۱۰ فٹ میں سے گر کر اس پر ضرب لگاتی ہے اور ہر ضرب پر میخ زمین میں ۱۰ فٹ انتصاباً ڈھنسی ہے۔ ثابت کرو کہ میخ کو زمین میں بتدریج دھکیلنے کے لیے جو وزن سرے پر رکھنا ہو گا وہ

$$ک + \frac{ک^۲ ف}{(ک + ک)}$$

ہے۔

۱۱۔ ایک ہتھوڑی کا سیرا و پونڈ ہے، یہ سیرا رفتار فٹ فی ثانیہ سے حرکت کر کے ایک بے لچک کیلے پر پڑتا ہے جس کا وزن و پونڈ ہے اور وہ ک پونڈ کے ایک حرکت پذیر تختے میں نصب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کیلے کے دھنسنے میں تختے کی اوسط مزاحمت ک پونڈ کی ایک قوت ہو تو ہر ضرب پر کیلا تختے میں

$$\frac{ک و}{(ک + و + و)} \frac{ر}{ج ۲} فٹ$$

دھنسیگا۔

۱۲۔ چربیوں کے اس نظام میں جس کا بیان دفعہ ۱۲ میں کیا گیا ہے (۲۵۲) ثابت کرو کہ اگر ف ایک وزن ہو جو  $\frac{۹}{۱۰}$  کے مساوی نہیں ہے تو وزن و میں پیدا شدہ اسراع

$$\frac{ن ف - و}{ن ف + و} ج$$

ہوگا۔

۱۳۔ دو کمیتیں ک، ک ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ ملحق ہیں اور ایک پکڑے افقی میز پر رکھی گئی ہیں، کمیتیں ساکن ہیں اور ڈوری بے تنی ہوتی ہے۔ دھکے ف کی ایک ضرب پہلی کمیت پر لگائی گئی ہے اس سمت میں جو دوسری کمیت کی سمت کے مخالف ہے۔ ثابت کرو کہ جب ڈوری پھر بے تنی ہوئی حالت میں ہوتی ہے تو دوسری کمیت کی رفتار

$$\frac{۲ ف}{ک + ک}$$

ہے۔

۱۴۔ ایک نامتناہی پذیر ڈوری کے سرروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی

ذرے باندھے گئے ہیں اور دوری کو پوری طرح تنی ہوئی حالت میں ایک چمکنے میں زیر رکھا گیا ہے۔ وسطی ذرہ جھٹکے کے ساتھ اس سمت میں حرکت میں آتا ہے جو دوسرے ذروں کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔ توانائی کا نقصان معلوم کرو جب دوسرے ذرے جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتے ہیں۔

۱۵۔ کوئلہ لیجانے والی ایک ٹرین میں متعدد مشابہ ڈبے ہیں جن کو ایک انجن کھینچتا ہے جس کا وزن تین ڈلوں کے عین مساوی ہے۔ ٹرین ہوا اور راستہ ساکن ہے اور جوڑک (Couplings) جو مساوی طول کے ہیں سب کے سب برابر ڈھیلے ہیں۔ انجن ایک مستقل جری قوت کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ہر ڈبہ جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتا ہے جبکہ اسکا جوڑک تن جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ انجن کی چال بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ دسواں جھٹکا عین واقع ہوئی ہو۔

۱۶۔ برف ایک چھت پر مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے۔ اگر اس کی کچھ کمیت پھسلنا شروع کرے اور جاتے ہوئے ایکساں عرض کا راستہ بناتے جاتے تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع مستقل ہے اور اس اسراع کے ایک ثلث کے مساوی ہے جو اس کمیت کا ہوگا جو آزادانہ چھت کے نیچے پھسلے۔

۱۷۔ ایک وزنی اور کامل مائع یکساں دوری انتظاماً لٹک رہی ہے اور اس کا زیر ترین نقطہ، ایک بے بچک افقی مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے۔ اگر اس کو مستوی پر گرنے کے لیے دفعتاً چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب میز پر دوری کا طول لاگ کر پڑتا ہے تو میز پر دباؤ

$$(3 + 2f)k$$

ہے۔

۱۸۔ اگر دو مساوی گولے رفتاروں  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  کے ساتھ

متصادم ہوں تو ثابت کرو کہ اہل الذکر ساکن ہو جائے گا۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ ایک کرہ کی وہ کمیت ک جو کمیت ک کے ایک ساکن کرہ اور رفتار  $w$  سے ٹیک اس کی جانب حرکت کرنے والے کمیت ک کے

ایک دوسرے کرہ کے درمیان رکھی رہتی چاہئے تاکہ اول الذکر کرہ تصادم سے بڑی سے بڑی رفتار حاصل کر سکے۔

$$\frac{g + g(1 + j)}{g + g + 2}$$

ہوگی۔

۲۰۔ ایک پلکار گولے کو ایک سخت فرش پر ارتفاع ف فٹ سے انتصاباً گرایا گیا ہے اور گولہ فرش سے جس رفتار سے ٹکراتا ہے ہر دفعہ اس کی رفتار سے انتصاباً بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ گولہ ساکن ہونے سے پیشتر

$$\frac{1+j}{1-j} F \text{ فٹ } \left| \frac{1+j}{1-j} \right| \frac{2}{j} \text{ ثانیوں میں}$$

طے کرے گا۔

ف = ۱، ج =  $\frac{1}{4}$  کے لیے اس کا حساب لگاؤ۔

۲۱۔ ارتفاع ف کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک گولہ گرایا گیا ہے اور اسی وقت مساوی وزن لے ایک دوسرے گولے کو رفتار  $\frac{2}{j}$  فٹ کے ساتھ مینار کے قاعدے سے اوپر وار بھیجا گیا ہے جو گرتے ہوئے گولے کے ساتھ راست متصادم ہوتا ہے۔ اگر غود کی قدر ج ہو تو ثابت کرو کہ گولہ بازگشت میں ارتفاع ف -  $\frac{2}{j}$  (۱-ج) تک اچھلے گا۔

۲۲۔ ایک لڑکا ریل کے ایک ڈبے کی افقی چھت پر جو پل کے نیچے سے رفتار ۵ میل فی گھنٹہ سے جا رہا ہے ایک گولے کو چھوڑتا ہے۔ اگر چھت اور گولے کے درمیان  $\frac{1}{4}$  ج =  $\frac{1}{4}$  ہے تو چھت کے اوپر لڑکے کے ہاتھ کا کم از کم ارتفاع معلوم کرو تاکہ گولے کی دوسری بازگشت چھت کے اسی نقطہ سے ہو جس سے پہلی بازگشت ہوئی تھی۔

اگر لڑکے کا ہاتھ اس سے زیادہ ارتفاع پر ہے تو کیا واقع ہوگا۔

۲۳۔ ایک کابل طور پر لمبکدار ذرہ کو پھینکا گیا ہے، یہ ذرہ ایک

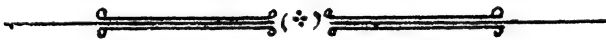
گردشی سطح کے اندرونی حصہ سے ٹکراتا ہے، گردشی سطح کا محور ایک معلومہ انتصابی

خط ہے۔ ثابت کرو کہ ان سب مکافوں کے راس جو متواتر بازگشتوں سے مرتب ہوتے ہیں ایک سطح پر واقع ہوتے ہیں جس کی شکل گردشِ سطح کی شکل پر منحصر نہیں ہوتی۔  
۲۴۔ ثابت کرو کہ قطر ۱ کے ایک چمکنے والے گولے کی حرکت کی سمت میں ایک دوسرے ساکن مساوی گولے پر تصادم کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ ممکن انحراف پیدا کرنے کے لیے قبل الذکر کو ایک ایسی سمت میں پھینکنا ہوگا جو مرکزوں کو ملانے والے خط (طول ج) کے ساتھ زاویہ

$$\text{جب } \left( \frac{1}{\text{ج}} \right) \left( \frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ج} - ۳} \right)$$

بنائے۔

۲۵۔ ایک رقص اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا لنگر ایک چمکنے والی مستوی کو عین مس کرتا ہے۔ لنگر کو ایک جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ وہ پہلے کی نسبت ۵ انچ زیادہ بلند ہوا اور پھر اس کو چھوڑ دیا گیا تاکہ مستوی سے عماد کی سمت میں ٹکرائے، پہلی بازگشت میں وہ انتصاباً ۴ انچ اچھلتا ہے۔ اگر رقص کو اسی زاویہ میں سے ایک جانب کھینچا جائے لیکن اس طور پر کہ لنگر مستوی سے ایسے زاویہ میں ٹکرائے جو عماد کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بنائے تو بازگشت میں لنگر انتصاباً کتنا اچھلے گا۔



## دسواں باب

(۲۵۲)

### متغیر قوت کے تحت ذرہ کی حرکت

۲۰۳۔ اب تک ہم نے ذرہ کی حرکت کی صرف ان صورتوں پر بحث کی ہے جن میں ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں اس کی حرکت کے پورے راستہ میں مستقل تھیں اور اس لیے ذرہ کا اسراع مستقل تھا۔ اب ہم ایک ایسے ذرہ کی حرکت پر غور کریں گے جس پر وہ قوتیں عمل کرتی ہیں جو ذرہ کے راستے پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہیں۔

اس قسم کی حرکت کے مسائل دو جماعتوں میں تقسیم کئے جاسکتے ہیں، ایک تو وہ جس میں راستہ جو ذرہ طے کرتا ہے مسئلہ کے معطیات کے طور پر دیا گیا ہو اور دوسری وہ جس میں یہ راستہ نامعلوم ہو۔ اول الذکر جماعت سادہ ترین ہے اور اس لیے اول ہم اسی پر غور کریں گے۔ اس میں وہ متغیر شامل ہیں جو نمونہ حسب ذیل ہیں: رقاص کی حرکت جس میں رقاص کا لنگر، رقاص کے لٹکانے کی میکائینٹ کی وجہ سے ایک دائرہ مرتسم کرنے پر مجبور ہے، اتار میں پروئے ہوئے منکے کی حرکت جس میں منکا وہ راستہ طے کرنے پر مجبور ہے جو تار سے نشان زدہ ہے۔

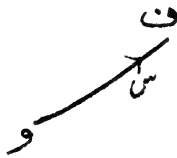
### حرکت کی مساوات

۲۰۴۔ فرض کر دو کہ ذرہ اپنے راستہ کا فاصلہ  $s$  کسی لمحہ  $t$  پر طے کرتا ہے



یہ فاصلہ راستہ کے کسی ثابت نقطہ سے پیمائش کیا جاتا ہے۔ اب راستہ پر ذرہ کی رفتار  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$  ہے۔ اس کو د سے تعبیر کرنے سے ذرہ کا اسراع

$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$  یا  $\frac{\text{فرس}^2}{\text{فرت}}$  حاصل ہوتا ہے۔



شکل (۱۲۹)

اگر عمل کرنے والی قوتیں معلوم ہوں تو بھی ہم اسراع کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس کے لیے تمام قوتوں کو جو ذرہ پر عمل کرتی ہیں راستہ کی

سمت میں تحلیل کرنا چاہئے۔ اگر اس سمت میں قوت کا جزو تکیبی  $\text{س}$  ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے ذرہ کی حرکت کی مساوات

$$\text{س} = \text{ک} \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \quad (۹۰)$$

$$\text{یا} \quad \text{س} = \text{ک} \frac{\text{فرس}^2}{\text{فرت}} \quad (۹۱)$$

ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ قوت کا میدان دائمی ہے اور اس لیے مقدار  $\text{س}$  کے متعلق یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ صرف اسی محل پر منحصر ہوتی ہے جو ذرہ اپنے راستہ پر اختیار کرتا ہے اور اس لمحہ پر منحصر نہیں ہوتی جس پر وہ رہا پہنچتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر  $\text{س}$  کا ایک تفاعل ہے نہ کہ ت کا۔ مساوات (۹۱)  $\text{س}$  اور  $\text{ت}$  میں ایک تفرقی مساوات ہے اور اگر ہم اس کو حل کر لیں تو ذرہ کی حرکت کا پورا علم ہو جائیگا بشرطیکہ اس کا راستہ معلوم ہو۔

یہ مساوات دو سرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے لیکن اس کو آسانی کے ساتھ پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{د} \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}$$

اس لیے مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$س = ک د \frac{فرس}{فرس}$$

اب چونکہ س، س کا تفاعل ہے اس مساوات کو س کے لحاظ سے  
تفرق کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$(۹۲) \quad م + ک س فرس = \frac{۱}{۲} ک د$$

جہاں م تکمل کا مستقل ہے۔

چونکہ د، فرس کے مساوی ہے ایسے اس مساوات کو شکل

$$(۹۳) \quad \frac{فرس}{فرس} = \frac{۲}{س} (م + ک س فرس)$$

میں رکھا جاسکتا ہے اور یہ درجہ اول کی مساوات ہے۔ اگر یہ حل ہو سکے تو مسئلہ  
مکمل طور پر حل ہو جائے گا۔

(۲۵۶) ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۲) کی بائیں جانب ذرہ کی توانائی بالحرکت  
ہے۔ نیز چونکہ ذرہ کے راستہ کی سمت میں اس کی حرکت میں غرام قوت - س  
ہے اس لیے ذرہ کی توانائی بالقوہ

- ک س فرس

ہے۔ پس مساوات (۹۲) سے واضح ہے کہ توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ  
کا مجموعہ مستقل رہتا ہے یہ مساوات ذرہ کی حرکت کے لیے توانائی کی مساوات  
ہے۔ اگر ہمیں ذرہ کی حرکت کے کسی لمحہ پر کل توانائی معلوم ہو تو ہم مستقل م  
متعین کر سکتے ہیں اور پھر مساوات (۹۳) کو تکمیل کیا جاسکتا ہے اگر وہ ممکن ہے۔

## توضیحی مثال

یہ تسلیم کر کے کہ جاذبہ کی قیمت، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے

مربع کے بالعکس بدلتی ہے ایک مرمی کی حرکت معلوم کرو جس کو ہوا میں انتصا بآ پھینکا گیا ہے، جاذبہ کی تخفیف کا لحاظ رکھو۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر  $r$  ہے اور اس کی سطح پر جاذبہ کی قیمت  $g$  ہے تب زمین کے مرکز سے  $r$  فاصلہ پر جاذبہ کی قیمت  $\frac{g}{r^2}$  ہوگی۔

چونکہ ذرہ، زمین کے مرکز سے کھینچے ہوئے ایک نصف قطر پر حرکت کرتا ہے اس لیے ہم تمام فاصلوں کو زمین کے مرکز سے جائش کر سکتے ہیں اور دفعۃً  $2$  کے محدود کی بجائے فاصلہ  $r$  لے سکتے ہیں۔ قوت  $2s$  کی قیمت، مرمی کے راستہ کی سمت میں تحلیل شدہ،  $\frac{g}{r^2}$  ہے اور اس لئے حرکت کی مساوات

$$- \frac{g}{r^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

ہے۔ تو انائی کی مساوات بموجب مساوات (۹۲) حسب ذیل ہے:

$$m - \frac{g}{r^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$(۱) \quad m + \frac{g}{r^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

فرض کرو کہ ذرہ کو زمین کی سطح سے رفتار  $v$  کے ساتھ پھینکا گیا تھا۔ مساوات (۱) میں  $r = r$  رکھنے سے  $v$  کی قیمت حاصل ہونی چاہئے اور اس لیے

$$(ب) \quad m + \frac{g}{r^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

اس مساوات سے  $m$  معلوم ہوگا۔ مساواتوں (۱) اور (ب) سے  $m$  کو ساقط کیا جائے تو

$$g \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

اس سے کسی نقطہ پر رفتار معلوم ہوگی۔ نیز چونکہ  $\frac{فر}{فرت} =$  اس لیے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$(د) \quad \frac{فر}{فرت} = \sqrt{\frac{1}{r} - 1}$$

$$(ع) \quad \frac{فر}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1}} = ت$$

تکمل کے عمل کی تکمیل کرنے سے وہ وقت معلوم ہو سکتا ہے جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم حل کے مختلف نمونوں پر غور کرتے ہیں۔ ہم مساوات (ج) سے دیکھتے ہیں کہ وہ معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$r = \frac{ج ۲}{۲ - ج ۲}$$

اس لیے اگر  $۲ > ج ۲$  تو  $۱$  اور  $\infty$  کے درمیان  $r$  کی ایک مثبت قیمت ہے جس کے لیے رفتار معدوم ہوتی ہے۔ پس اگر  $۲ > ج ۲$  تو  $r$  تو مری اُس نقطہ تک جاتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے  $\frac{ج ۲}{۲ - ج ۲}$  ہے اور پھر زمین پر واپس گرتا ہے۔ اگر  $۲ < ج ۲$  تو  $r$  کی کوئی مثبت قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کے لیے وہ معدوم ہو اور اس لیے ذرہ لاتنا ہی تک چلا جاتا ہے، وہ زمین کے جاذبہ سے صاف بچ نکلتا ہے۔

اگر  $۲ = ج ۲$  تو رفتار لاتنا ہی پر معدوم ہوتی ہے، اس لیے ذرہ زمین کی کشش سے عین بچ جاتا ہے لیکن صرف صفر رفتار کے ساتھ۔ پھینکنے میں اس کی توانائی بالحرکت زمین کی کشش پر غالب آنے میں عین کافی ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم اول اس خاص صورت  $۲ = ج ۲$  پر غور کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (ع)

$$ت = \frac{فر}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r}{g}} + \frac{r}{g}$$

میں تحویل ہوتی ہے جہاں  $\frac{r}{g}$  تکمیل کا ایک نیا مستقل ہے۔  
اگر ہم وقت کو پھینکنے کے لمحہ سے شمار کریں تو ت = حاصل ہونا چاہیئے  
جیکہ  $r = 0$  اور اس لیے

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{g}} + \frac{1}{g}$$

اور  $\frac{r}{g}$  کو ساقط کرنے پر

$$t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r}{g}} + \frac{r}{g} \quad (ف)$$

اُس صورت میں جیسے  $0 < \frac{r}{g} < 1$  مساوات (ع) کو تکمیل کرنے کے بعد حاصل  
ہوتا ہے

$$t = \frac{1}{g} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{g}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{g}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{g}}} \right\} \text{ لوک}$$

$$+ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r}{g}} + \frac{r}{g} \quad (گ)$$

جہاں  $\frac{r}{g}$  تکمیل کا ایک نیا مستقل ہے۔ اگر وقت کو اُس لمحہ سے شمار کیا جائے جس پر  
ذرہ کو پھینکا گیا تھا تو ت = کے لیے  $r = 0$  حاصل ہونا چاہیئے، اور اس لیے

$$= \frac{1}{g} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{g}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{g}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{g}}} \right\} \text{ لوک} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r}{g}} + \frac{r}{g}$$

اور  $\frac{r}{g}$  کو ساقط کرنے پر ہم پھر وہ وقت معلوم کر سکتے ہیں جو راستہ کا کوئی حصہ طے  
ہونے میں مطلوب ہوتا ہے صورت  $0 < \frac{r}{g} < 1$  پر بھی اسی طرح بحث کی جاسکتی ہے۔

اس کو طالب علم پر بطور مشق کے چھوڑا جاتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ پچھلی توضیحی مثال میں فرض کرو  $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$  اور معلوم کرو

(۱) بلند ترین ارتفاع جہاں تک ذرہ پہنچتا ہے

(ب) ذرہ کی پرواز کا وقت

۲۔ ایک شہاب زمین پر گر رہا ہے۔ فرض کرو کہ وہ لاتنا ہی سے صفر رفتار کے ساتھ نکلا تھا اور راست زمین پر گرا۔ زمین کی سطح پر جس رفتار سے وہ پہنچتا ہے اس کو معلوم کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو شہاب اس نقطہ سے زمین کی سطح پر گرنے میں لیتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے  $r$  ہے۔

۳۔ ایک ذرہ فاصلہ  $r$  سے قوت کے ایک مرکز پر گرتا ہے جو قانون  $\frac{1}{r^2}$  کی بموجب کشش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ کے نصف حصہ پر اوسط رفتار کو راستہ کے دوسرے نصف حصہ پر اوسط رفتار کے ساتھ حسب ذیل نسبت ہے:

$$2 - \pi : 2 + \pi$$

۴۔ قوت کے ایک مرکز پر گرنے کا وقت معلوم کرو جو قانون  $\frac{1}{r^3}$  کی بموجب کشش رکھتی ہے۔

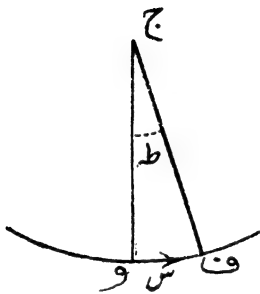
۵۔ ایک ذرہ فاصلہ  $r$  سے کشش کے ایک مرکز کی جانب خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ قوت کا قانون  $\frac{1}{r^2}$  ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز تک پہنچنے میں جو وقت مطلوب ہے وہ  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  ہے۔

۶۔ ایک ذرہ فاصلہ  $r$  سے ایک ثابت مرکز کی جانب حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ قوت کا مرکز قانون  $\frac{1}{r^2}$  کی بموجب دفع کرتا ہے۔ اگر ذرہ کی ابتدائی رفتار  $v$  ہے تو ثابت کرو کہ وہ ثابت مرکز کی جانب مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس تک کبھی بھی نہ پہنچے گا۔

## سادہ رقاص

۲۰۵۔ متغیر قوت کی اہم ترین صورتوں میں سے ایک سادہ رقاص کی

حرکت سے ٹہیا ہوتی ہے۔ پہلا تقرب حاصل کرنے کے لیے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ رقا ص کا پورا وزن اس کے لنگر میں مرکوز ہے جس کو ایک ذرہ خیال کیا جاسکتا ہے۔ اس لنگر کو ایک ثابت نقطہ سے ایک بے وزن ڈوری یا ڈنڈے کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے



شکل (۱۳۰)

اور اس لیے وہ ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرنے پر مجبور ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ اس دائرہ پر ذرہ

جو فاصلہ طے کرتا ہے اس کو س سے

تعبیر کیا گیا ہے جہاں س کو زیر ترین

نقطہ سے پیمائش کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ڈوری اور انتصابی کے

درمیان زاویہ ف ج و کٹھ سے

تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے س = ط جہاں ط ڈوری کا طول ہے۔ ذرہ پر

عمل کرنے والی قوت اس کے وزن اور ڈوری کے تناؤ پر مشتمل ہے۔

بعد الذکر اس سمت میں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے کوئی جزو ترکیبی نہیں

رکھتی۔ اول الذکر کا جزو ترکیبی اس سمت میں۔ ک ج جب ط ہے۔

اس لیے حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{فرس^2}{فرت} = - ج جب ط \quad (۹۴)$$

$$جہاں ط = \frac{س}{ر}$$

۲۰۶۔ اس مساوات کو ابتدائی ریاضی کے ذریعہ حل نہیں کیا جاسکتا

الا اس سادہ صورت کے جس میں زاویہ طہ چھوٹا ہو یعنی جس میں رقا ص

انتصابی سے ایک چھوٹے زاویہ سے زیادہ نہ جھونے پائے۔ اس صورت پر

اپنی توجہ محدود رکھنے سے ہم جب طہ کی بجائے طہ رکھ سکتے ہیں اور طہ کی

بجائے  $\frac{س}{۱}$  - چنانچہ حرکت کی مساوات شکل

$$\frac{فرس^۲}{فرس} = - \left( \frac{ج}{۱} \right) س$$

میں لکھی جاسکتی ہے -  
اس طرح رقاس کے لنگر کا اسراع، وکی جانب اور و سے اس کے  
فاصلے کے متناسب ہوتا ہے -  
مساوات کو شکل

(۲۶۰)

$$و فرس = - \left( \frac{ج}{۱} \right) س$$

میں لکھنے اور س کے لحاظ سے تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و^۲ = م - \left( \frac{ج}{۱} \right) س^۲ \quad (۹۵)$$

صریاً مستقل م کو مثبت ہونا چاہئے اور رفتار معدوم ہوگی جوں ہی  
س ایسی قیمت پر پہنچے کہ

$$م = \left( \frac{ج}{۱} \right) س^۲$$

فرض کرو کہ اس مساوات کو پورا کرنے والی س کی قیمتیں  $\pm س$  سے  
تعبیر ہوتی ہیں، تب لنگر کی حرکت صریاً ان نقطوں کے اندر مقید رہتی ہے جو  
نقطہ و سے اس کی مخالف سمتوں میں فاصلہ س پر ہیں۔ ہم س کو اہتر از کا  
حیطہ کہہ سکتے ہیں -

م کی بجائے  $\left( \frac{ج}{۱} \right) س^۲$  رکھنے سے مساوات (۹۵) ہو جاتی ہے

$$و^۲ = \frac{ج}{۱} (س^۲ - س^۲)$$



اس لیے 
$$\sqrt{\frac{g}{s} (s - s_0)} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}}$$
 اور اس مساوات کا تکملہ ہے

$$t = \int \frac{\text{فرس}}{\sqrt{\frac{g}{s} (s - s_0)}} ds$$

$$= \sqrt{\frac{g}{s_0}} \left[ \text{جم}^{-1} \left( \frac{s}{s_0} \right) + \text{صہ} \right]$$

جہاں صہ تکمیل کا مستقل ہے۔  
اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}^{-1} \left( \frac{s}{s_0} \right) = \sqrt{\frac{g}{s_0}} (t - \text{ت})$$

اس لیے  $s = s_0 \left\{ \sqrt{\frac{g}{s_0}} (t - \text{ت}) + \text{صہ} \right\}^2$   
(۲۶۱) اس مساوات میں مسئلہ کا پورا حل شامل ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $s$  کی قیمتیں وقت  $t$  کے وقفوں سے مسلسل تکرار پاتی ہیں جہاں  $t = \text{ت}$  مساوات

$$\sqrt{\frac{g}{s_0}} (t - \text{ت}) = \text{صہ}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح رقا ص کی حرکت لازماً مرتبہ خود تکرار پاتی ہے۔ ان دو لمحات کے درمیان وقفہ جن پر رقا ص ایک ہی محل میں ہوتا ہے یعنی وقفہ  $\text{ت}$  مساوات

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{s_0}{g}} \pi$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو رقاص کا دور کہتے ہیں۔

۲۰۔۷۔ ثانیوں کا رقاص۔ اس رقاص کو بنانے کے لیے جو ثانیوں کو

ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرے ہم کو ایسا لیتے ہیں کہ ت ' دو ثانیوں کے مساوی ہو کیونکہ ثانیوں کا رقاص ایسا رقاص ہونا چاہئے جو بائیں جانب سے سیدھی جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ اور پھر سیدھی جانب سے بائیں جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ لے لے۔ اس لیے

$$1 = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

فٹ ثانیہ اکائیوں میں ہم لندن کے لیے ج = ۳۲۵۱۹ لے سکتے ہیں اور اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$1 = ۳۹۶۱۴ \text{ انچ}$$

یعنی لندن کے لیے ثانیوں کے رقاص کا طول ۳۹۶۱۴ انچ ہونا چاہئے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ کسی رقاص کا دور اس کے طول کے جذر المرجع کے متناسب ہوتا ہے۔ مثلاً اس رقاص میں جو نصف ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرتا ہے اس کا طول ثانیوں کے رقاص کے طول کا صرف ایک چوتھائی ہوگا اور اس لیے لندن میں ۹۶۷۸ انچ۔

چونکہ ج کی قیمت زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے اس لیے ثانیوں کے رقاص کا طول بھی متغیر ہوگا۔ اگر ہم رقاص کا طول دیکھیں اور نیز وقت پیماس اس کا دور معلوم کریں تو ہم اس مقام پر جہاں تجربہ کیا جا رہا ہے ج کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں، فی الحقیقت یہ طریقہ زمین کی سطح کے کسی نقطہ پر ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سب سے زیادہ آسان اور صحیح ترین ہے۔

توضیحی مثال

ایک رقاص نیویارک میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں کے ذریعہ ظاہر

کرتا ہے، اس کو فیلڈ لفیا لجانے پر معلوم ہوا کہ وہ وہاں ۲ ٹائمنے فی یوم تیز رہتا ہے۔ نیویارک اور فیلڈ لفیا پر ج کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

فیلڈ لفیا میں رقام  $۲۴ \times (۶۰)^۲$  ٹائیوں میں  $۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲$  بار ضربیں ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے ایک ضرب کا وقت

$$\frac{۲(۶۰) \times ۲۴}{۲ + ۲(۶۰) \times ۲۴}$$

ہے اور یہ  $\sqrt{\frac{۱}{ج}}$  کے مساوی ہے جہاں ۱ رقام کا طول ہے اور ج فیلڈ لفیا میں جاذبہ کی قیمت ہے۔ اگر نیویارک میں جاذبہ کی قیمت ج سے تعبیر ہو تو

$$ج = ۱^۲ \pi$$

$$ج = ۱^۲ \pi \left[ \frac{۲ + (۶۰) \times ۲۴}{۲(۶۰) \times ۲۴} \right]$$

$$ج = ۱^۲ \pi \left( \frac{۴}{۲(۶۰) \times ۲۴} + ۱ \right) \text{ تقریباً}$$

$$ج = ۱^۲ \pi \left( \frac{۴}{۲(۶۰) \times ۲۴} + ۱ \right) \text{ اس لیے}$$

$$ج = ۱^۲ \pi \left( \frac{۱}{۲۱۶۰۰} + ۱ \right) \text{ تقریباً}$$

اس طرح نیویارک کی یہ نسبت فیلڈ لفیا میں جاذبہ تقریباً ۲۱۶۰۰ میں ایک حصہ زیادہ ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک رقام کا طول محسوب کرو جو ایک منٹ میں ۱۰۰ دفعہ ضربوں کے ذریعہ وقت کی پیمائش کرتا ہے۔

۲۔ ایک رقا ص لندن میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے اگر یہ رقا ص نیویارک میں ہو تو اس سے صحیح وقت کی پیمائش ہوتی ہے اگر اس کے طول کو بقدر ایک ہزارویں حصہ کے چھوٹا کر دیا جائے۔ لندن اور نیویارک میں جاذبہ کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

۳۔ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں ایک نقطہ پر ج کی قیمت

$$ج = ج. (۱ - ۰.۰۲۵۴ \times ج. ۲ لہ)$$

ہے جہاں ج. (= ۳۲.۶۱) عرض بلد ۴۵ میں ج کی قیمت ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عرض بلد جس میں معلومہ طول کا ایک چھوٹا سفر رقا ص گھڑی کی شرح میں بڑی بڑی خطا پیدا کرتا ہے عرض بلد ۴۵ ہے اس عرض بلد میں خطا فی میل معلوم کرو۔ (عرض بلد کا ایک دقیقہ = ۶.۴۵ فٹ)

۴۔ ایک عمارت میں زمین سے اوپر ف ارتفاع پر جاذبہ کی قیمت

$$ج - ۳.۰۰۰۰۰۰ ف$$

ہے جہاں ج. عمارت کے پائین پر جاذبہ کی قیمت ہے نیویارک میں ج = ۳۲.۶۱ رقا ص گھڑی کی شرح میں وہ خطا معلوم کرو جو اس کو زمین سے ۳۰۰ فٹ بلند عمارت کی چھت پر لیجانے سے پیدا ہوتی ہے۔

۵۔ ایک رقا ص کا طول ل ہے اور وہ ۲ ن ضربیں فی یوم ظاہر کرتا ہے اگر اس طول کو ل + ۱ میں بدل دیا جائے تو ثابت کرو کہ رقا ص تقریباً

$$\frac{ن}{ل} \text{ ضربیں فی یوم کھو دیگا۔}$$

۶۔ ایک غبارہ مستقل اسراع کے ساتھ بلند ہوتا ہے اور دو منٹ میں ۳۶۰۰ فٹ کے ارتفاع تک پہنچ جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اہل چڑیاؤں میں رقا ص گھڑی تقریباً ایک ثانیہ تیز ہو گئی ہوگی۔

۷۔ طول ل کے ایک رقا ص کو اس کے لنگر کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو حرکت دیکر ٹھیک بنایا جاسکتا ہے اس حصہ کی کمیت کل لنگر کی کمیت کا  $\frac{۱}{۱۰}$  ہے۔ اس کو کتنی دوز تک حرکت دینی چاہئے کہ ف ثانیے فی یوم کی خطا کی

تصحیح ہو جائے۔

## سادہ موسیقی حرکت

۲۰۸۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر کوئی رتاقص اس طور پر حرکت کرے کہ انتصابی کے ساتھ اس کا اعظم میلان چھوٹا ہو تو اس کی کل حرکت میں جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اس کے راستہ کے وسطی نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے اور اس اسراع کی سمت اس نقطہ کی جانب ہوتی ہے۔ اگر کوئی نقطہ اس طریقہ پر حرکت کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ چنانچہ اگر ایک نقطہ سادہ موسیقی حرکت کرے اور ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ  $s$  ہو تو شکل

$$\text{وقت} = \frac{s}{v} = k^2 s$$

کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جہاں  $k$  ایک مستقل ہے۔  
تکمیل کرنے سے حسب سابق (مقابلہ کرو مساوات (۹۶) کے ساتھ)  
مساوات

$$v^2 = k^2 (s - s_0)$$

حاصل ہوتی ہے اور پھر اس سے مساوات

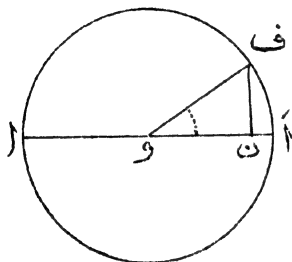
$$s = s_0 + \frac{1}{2} k^2 t^2 \quad (۹۷)$$

ملتی ہے۔ مستقل  $k$  کو حرکت کا تعدد کہتے ہیں۔ مثلاً کسی سادہ

رتاقص کا تعدد  $\frac{1}{2\pi}$  ہے۔

۲۰۹۔ سادہ موسیقی حرکت کی ایک آسان ہندسی توجیہ کیا جاسکتی ہے اور اس سے اس حرکت کا پورا علم تکمیلی احصاء یا تفریقی مساواتوں کے نظریہ کے استعمال کے بغیر ہو جاتا ہے۔ شکل ۱۳۱ میں فرض کرو کہ خط  $OF$  کے

گرو یکساں زاویٰ رفتار کے ساتھ گردش کرتا ہے اور اس لیے ف، یکساں رفتار کے ساتھ نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ف سے ایک ثابت قطر (۱) پر عمود فن کھینچا گیا ہے۔ اب معلوم ہو گا کہ نقطہ ن خط (۱) پر سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ آگے اور پیچھے حرکت کرتا ہے۔



شکل (۱۳۱)

ف کا اسراع موجب  
دفعہ ف کی سمت میں ک  
ہے۔ اس اسراع کو دو اسراعوں کا  
مکرب خیال کیا جاسکتا ہے (۱) ن  
کے لحاظ سے ف کا اسراع جس کو  
ن ف پر ہونا چاہئے (۲) و کے  
لحاظ سے ن کا اسراع جس کو و ن پر

ہونا چاہئے۔ پس ن کا اسراع، ف کے اسراع کا وہ جزو ترکیبی ہے جو سمت  
(۱) میں ہے۔ لیکن یہ جزو ترکیبی ک (۱) جم طہ یا ک (۲) و ن ہے اور  
اس کی سمت ن و ہے۔ و ن کو س کے مساوی لینے سے اسراع  
ک (۲) س اس سمت میں حاصل ہوتا ہے جس میں س کی پیمائش ہوئی  
ہے یعنی و ن۔ اس لئے نقطہ ن سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت  
کرتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی اس ہندسی توجیہ سے و اور س کے لیے  
جملے راست حاصل کئے جاسکتے ہیں س کی قیمت و ن یا و جم طہ  
ہے۔ فرض کرو کہ ت = صہ وہ لمحہ ہے جس پر نقطہ ف، دائرہ کے گرد  
اپنی حرکت میں نقطہ (۱) میں سے گزر رہا تھا، تب اس کے بعد کسی لمحہ  
ت پر وقت ت۔ صہ ہو گا اور اس لیے و ف سے مرتسم شدہ زاویہ  
طہ = ک (ت - صہ) ہو گا۔ اس لیے

(۹۸)

س = و ن = و جم ک (ت - صہ)

یہ وہی نتیجہ ہے جو مساوات (۹۷) میں مندرج ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت کا محیط  $s$  وہی ہے جو دائرہ کا نصف قطر  $r$  ہے اور تعداد  $k$ ، زاویائی رفتار کے ماثل ہے۔ مساوات (۹۸) کو تفرق کرنے سے رفتار کے لیے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$v = \frac{r \omega}{k} = k \cdot r \quad (ت - ص)$$

$$k = \frac{r}{s}$$

اس نتیجہ کو اس طریقہ پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ متحرک نقطہ  $P$  کی رفتار  $k \cdot r$  کو  $k$  کی سمت میں اور  $r$  کی سمت  $r$  کی سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اول الذکر صریحاً  $k$  پر  $n$  کی رفتار ہے اور  $r$  کی مقدار  $k \cdot r$  جب طے یا

$$v = k \cdot r \quad (ت - ص)$$

$$k = \frac{r}{s}$$

حسب سابق فوراً حاصل ہوتی ہے۔  
اس حرکت میں سادہ رفاص کی حرکت کی طرح مقدار  $k$  کو محیط کہتے ہیں اور وقت  $\frac{2\pi}{\omega}$  کو جس کے بعد حرکت خود تکرار پاتی ہے دور کہتے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ایک ذرہ  $12 \times 10^{-12}$  میٹر کے دور کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور  $5$  فٹ کا محیط رکھتا ہے۔ اس کی اعظم رفتار معلوم کرو اور یہ اعظم رفتار جس لمحہ واقع ہوتی ہے اس کے ایک ثانیہ بعد ذرہ کا محل اور اس کی رفتار معلوم کرو۔

۲۔ ایک ذرہ جو دور ت کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اپنے اوسط محل سے فاصلہ ۱ پر رقرار و رکھتا ہے۔ اس کا محیط معلوم کرو۔  
 ۳۔ ایک ذرہ ایک خط ۱ ب پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اس پر ایک قوت جاذبہ عمل کرتی ہے جو ۱ ب کے ایک نقطہ ف سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے اور اس لیے ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی اوسط توانائی بالحرکت اس کی اوسط توانائی بالقوت کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اور اس کے اوسط محل سے فاصلوں ۴ اور ۳ فٹ پر اس کی رفتاریں علی الترتیب ۳ اور ۴ فٹ فی ثانیہ ہیں۔ اس کا محیط اور دور معلوم کرو۔

۵۔ ایک ذرہ ایک فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اور خود فریم بھی ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے۔ ان دو حرکتوں کی سمتیں متوازی ہیں اور ان کے دور ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے جس کی سمت اور دور وہی ہیں جو فریم کی حرکت کے ہیں۔

۶۔ طبعی طول ل اور تقیاس لہ کی ایک لچکدار ڈوری سے ایک وزن و بانڈ ہا گیا ہے اور اس کو توازن کی حالت میں انتصاباً لٹکنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اب وزن کو انتصاباً نیچے مزید فاصلہ ف تک کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو آزاد چھوڑ دینے پر وہ محیط ف کی سادہ موسیقی حرکت رکھنے لگا بشرطیکہ اس میں دوری کی غیر متغیر ہوئی حالت کبھی بھی وقوع پذیر نہ ہو۔ حرکت کا دور معلوم کرو۔

## تدویری رقا ص

۲۱۰۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقا ص کی حرکت صرف اس وقت تک سادہ موسیقی حرکت رہتی ہے جب تک کہ حرکت کا



حیطہ چھوٹا رہتا ہے۔ لیکن جاذبہ کے تحت ذرہ کی حرکت کو اس طریقہ سے مقید کرنا ممکن ہے کہ اس کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہو دراں حالیکہ حیطہ خواہ کتنا ہی بڑا ہو۔

وہ منحنی معلوم کرنے کے لیے جس میں ذرہ کی حرکت کو مقید کرنا پڑتا ہے فرض کرو کہ ہم مساوات (۹۴) یعنی

$$\frac{فرت^2}{س} = - ج جب طہ$$

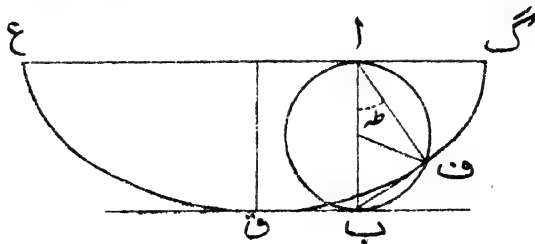
پر عود کرتے ہیں جو ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی مساوات ہے جو کسی منحنی میں حرکت کرنے پر مجبور ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو منحنی کے اس نقطہ پر کمال افقی کے ساتھ بناتا ہے جسکا فاصلہ منحنی پر س ہے۔ یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت

کو تعبیر کرے گی اگر اسراع  $\frac{فرت^2}{س}$ ، - ک<sup>۲</sup> س کے مساوی ہو۔ اس لیے

$$ج جب طہ = ک^۲ س$$

اور اس لیے جب طہ، س کے متناسب ہونا چاہئے۔

۲۱۱۔ اس ربط سے خط تدویر کی ایک خاصیت معلوم ہوتی ہے یعنی اس منحنی کی جس کو ایک دائرہ کے محیط پر کا ایک نقطہ فضاء میں مرسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑھک رہا ہو شکل (۱۳۲) میں فرض کرو کہ ایک خط تدویر پر جو خط ع گ پر ایک دائرہ کے لڑھکنے سے بنا ہے ف کوئی نقطہ ہے۔



شکل (۱۳۲)

جب متحرک دائرہ کے محیط پر کا نقطہ 'ف' پر ہو تو فرض کرو کہ دائرہ کا وہ نقطہ جو خط 'ع گ' کو مس کرتا ہے 'ا' ہے اور فرض کرو کہ 'ا' میں سے گزرنیوالا قطر 'ا ب' ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر دائرہ کے محیط پر کے نقطہ 'ف' کی حرکت خط 'ا ف' پر عمود وار ہے (دیکھو مثال ۱ صفحہ ۱۳)۔ چونکہ 'ا ف' ب قائمہ زاویہ ہے اس لیے یہ حرکت 'ب ف' پر ہونی چاہئے۔ اس لیے 'ب ف' خط تدویر کا تماس ہے۔ اگر 'ع گ' کو افقی فرض کیا جائے تو 'ف' پر کے تماس اور افقی کے درمیان زاویہ طہ زاویہ 'ف ا ب' کے مساوی ہے اور اس لیے 'ف' میں سے گزرنیوالا دائرہ کا نصف قطر انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ طہ بنائے گا۔

(۲۶۷)

فرض کرو کہ دائرہ 'ع گ' پر لڑھکتا ہے تا آنکہ 'ف' پر خط تدویر کا تماس افقی کے ساتھ زاویہ طہ + فرطہ بنائے۔ 'ا ب' پر کے نصف قطر کو انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ (طہ + فرطہ) بنانا چاہئے اور اس لیے دائرہ زاویہ ۲ فرطہ میں سے گردش کر چکا ہوگا۔ 'ا ب' چونکہ 'ف' کی حرکت کو 'ا' کے گرد گردش کی حرکت سمجھا جاسکتا ہے اس لئے راستہ کا وہ چھوٹا عنصر 'ف س' جو 'ف' سے مرسم ہوتا ہے

$$\text{فرس} = \text{ا ف} \times ۲ \text{ فرطہ}$$

سے حاصل ہوگا۔

ا ب = ا ف = (ا ب) جم طہ = د جم طہ جہاں 'د' دائرہ کا قطر ہے۔  
اس طرح

$$\text{فرس} = ۲ د جم طہ فرطہ$$

$$س = ۲ د جب طہ$$

اور تکمل کرنے پر تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے اگر ہم 'س' کو اس نقطہ سے پیمائش کریں جس پر طہ = ۰ یعنی خط تدویر کا زیر ترین نقطہ۔

خط تدویر کی خاصیت ثابت ہو چکی اور ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۹) ایک نقطہ کی کل حرکت میں درست رہتی ہے جبکہ یہ نقطہ ایک خط تدویر

مرسم کرتا ہے جس کی تکوین قطر د کے ایک دائرہ کے اڑھائی سے ہوتی ہے چہاں

$$\frac{c}{r} = 52$$

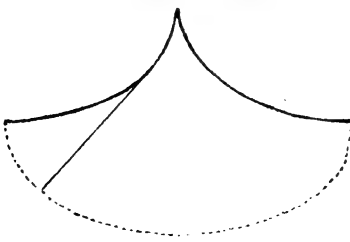
۲۱۲۔ اگر خط تدویر دیا گیا ہو تو سادہ موسیقی حرکت کا تقد

ک،  $\sqrt{\frac{c}{52}}$  کے مساوی ہو گا اور دور  $\frac{\pi^2}{52}$  ہے یعنی

$$\frac{\pi^2}{52} \sqrt{\frac{c}{52}}$$

اس لیے حرکت کا دور وہی ہے جو طول ۵۲ کے سادہ رفاص کا ہوتا ہے

۲۱۳۔ تدویری حرکت کی اہمیت حسب ذیل ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رفاص کی حرکت صرف اس وقت سادہ موسیقی حرکت ہوتی ہے (۲۶۸) جبکہ حیثہ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو صغیر سمجھا جاسکے۔ محدود حیثوں کے لئے حرکت سادہ موسیقی نہیں ہوتی اور اس لیے دور اس سادہ موسیقی حرکت کے دور سے مختلف ہوتا ہے جو حیثہ کے بہت چھوٹا ہونے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دور حیثہ پر منحصر ہوتا ہے، چنانچہ کوئی گھڑی جو صبح ثانیوں کا ضربوں کے ذریعہ اظہار کرتی ہے جبکہ رفاص ایک زاویہ میں سے جھولے تیز یا سست ہوگی جبکہ رفاص کسی مختلف زاویے میں سے جھولنے لگے۔ حیثہ کے تغیرات کسی رفاص کی حرکت کی اتنا، میں ہمیشہ وقوع پذیر ہونے چاہئیں اور انہی وجہ سے گھڑی کی وقت غالی میں بے قاعدگیاں پیدا ہوتی ہیں۔



شکل (۱۳۳)

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ایک ذرہ ایک خط تدویر مرسم کرے تو دور حیثہ پر منحصر نہیں ہوتا اور اس لیے حیثہ کے تغیرات کسی ایسے ذرہ کی وقت غالی کو متاثر نہیں کر سکتے۔

ذرہ کو ایک خط تدویر میں حرکت کرنے کے لیے مقید کرنے کا سادہ ترین طریقہ عملاً یہ ہے کہ اس کو ایک ثابت نقطہ سے ایک دوری کے ذریعہ اس طریقہ پر لٹکایا جاتا ہے کہ ذرہ کی حرکت میں دوری دو انتصابی رنوں پر خود لپکتی اور کھلتی جاتی ہے۔ اگر ان رنوں کے منحنی کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جا تو ذرہ ایک خط تدویر مرتب کرے گا اور یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ان رنوں کے منحنی دو تدویروں کے حصے ہونے چاہئیں جن میں سے ہر ایک اس تدویر کے مساوی ہو جس کو ذرہ مقرر کرتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ تدویری حرکت میں ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی بڑے سے بڑا ہو گا جبکہ وہ اپنے انتصابی اُتار کا نصف طے کر چکے۔

۲۔ ایک ذرہ جاذبہ کے تحت ایک خط تدویر میں اہتزاز کرتا ہے، حرکت کا محیط بادل دور رہے۔ ثابت کرو کہ سکون کے محل سے پیمائش شدہ وقت  $t$  پر اس کی رفتار  $\frac{2\pi b}{t}$  جب  $\frac{2\pi a}{t}$  ہوگی۔

۳۔ کیمت ک کا ایک ذرہ ایک پکٹے خط تدویر پر اس کے قرن سے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر دباؤ  $2k$  جم پڑے جہاں پہ ذرہ کی حرکت کی سمت کا میلان انفرق کے ساتھ ہے۔

## قوت کے ایک مرکز کے گرد ذرہ کی حرکت

### فاصلہ کے متناسب قوت

۲۱۴۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ صرف ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی سمت ایک ثابت نقطہ کی جانب ہے اور جو اس کے فاصلے کے متناسب ہے حرکت کرتا ہے اور کوئی دوسری قوتیں ذرہ پر عمل نہیں کرتیں۔

و کو مبداء، لو اور فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ذرہ کے محل  $f$  کے محدود  
 لا،  $y$ ،  $z$  ہیں۔ فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت  $m \times \omega$  ہے  
 جس کی سمت  $f$  و ہے اور  $m$  ایک مستقل ہے۔ اس قوت کے اجزاء  
 ترکیبی محدودوں کے محوروں کے متوازی

-  $m \cdot \frac{f}{\omega}$  -  $m \cdot \frac{y}{\omega}$  -  $m \cdot \frac{z}{\omega}$   
 ہیں اور اسراع کے اجزاء ترکیبی حسب ذیل

$$\frac{f^2}{\omega^2} \quad \frac{y^2}{\omega^2} \quad \frac{z^2}{\omega^2}$$

ہیں۔ پس ذرہ کی حرکت کی مساواتیں حسب ذیل ہوتی ہیں:

$$(100) \quad \frac{f^2}{\omega^2} = -m \cdot \frac{f}{\omega}$$

$$(101) \quad \frac{y^2}{\omega^2} = -m \cdot \frac{y}{\omega}$$

$$(102) \quad \frac{z^2}{\omega^2} = -m \cdot \frac{z}{\omega}$$

یہ تین مساواتیں ایک ہی نمونے کی ہیں یعنی اس نمونے کی  
 جو سادہ موسیقی حرکت کو تغییر کرتا ہے۔ اس لیے اس نمود کا پائین جو متحرک  
 ذرہ سے محدودوں کے محوروں میں سے کسی ایک پر کھینچا گیا ہو سادہ موسیقی  
 حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ مساوات (100) کا حل

$$f = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

ہے جہاں  $f = \frac{f}{\omega}$  - اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$f = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$f = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

(۲۷۰) جہاں ج اور د نئے مستقل ہیں جو (ج م ف صہ اور ا ج ب ف صہ کی جگہ رکھے گئے ہیں۔ دوسری دو مساواتوں کے حل ایسی کے مشابہ ہیں اور اس لیے مکمل حل حسب ذیل ہے:

$$(۱۰۳) \quad لا = ج \text{ ج م ف ت} + د \text{ ج ب ف ت}$$

$$(۱۰۴) \quad ما = ج \text{ ج م ف ت} + د \text{ ج ب ف ت}$$

$$(۱۰۵) \quad ی = ج \text{ ج م ف ت} + د \text{ ج ب ف ت}$$

ہم ہمیشہ مساواتوں

$$(۱۰۶) \quad ج + ر ج + س ج = ۰$$

$$(۱۰۷) \quad د + ر د + س د = ۰$$

کو حل کر سکتے ہیں اور ر اور س کی ایسی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم مساواتوں (۱۰۴) اور (۱۰۵) کو ر اور س کی ان قیمتوں سے ضرب دیتے ہیں اور متناظر طرفوں کو مساوات (۱۰۳) کی متناظر طرفوں میں جمع کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(لا + ما + س ی) = (ج + ر ج + س ج) \text{ ج م ف ت}$$

$$+ (د + ر د + س د) \text{ ج ب ف ت} = ۰$$

(۱۰۸)

کیونکہ مساواتیں (۱۰۶) اور (۱۰۷) پوری ہوتی ہیں۔ مساوات (۱۰۸) کے یہ معنی ہیں کہ ت کی تمام قیمتوں کے لیے ربط لا + ما + س ی = ۰ درست ہے اور اس لیے ذرہ کی پوری حرکت میں وہ اُس مستوی میں رہتا ہے جس کی یہ مساوات ہے۔

محدودوں کے محور اختیار کی طور پر منتخب ہوئے ہیں۔ ہم ہمیشہ ان محوروں کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ مستوی جس میں پوری حرکت وقوع پذیر ہوتی ہے لا ما کا مستوی ہو۔ تب حرکت حسب ذیل دو مساواتوں سے معلوم ہوگی:

$$لا = ج \text{ ج م ف ت} + د \text{ ج ب ف ت}$$

ما = ج جم ف ت + د جب ف ت  
ان مساواتوں کو جب ف ت اور جم ف ت کے لیے حل کرنے سے

$$\frac{\text{ج لا} - \text{ج ما}}{\text{ج د} - \text{ج د}} = \text{جب ف ت}$$

$$\frac{\text{د لا} - \text{د ما}}{\text{ج د} - \text{ج د}} = \text{جم ف ت}$$

اس لئے مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(241) \quad (\text{ج لا} - \text{ج ما}) + (\text{د لا} - \text{د ما}) = (\text{ج د} - \text{ج د})^2$$

یہ قطع ناقص کی مساوات ہے۔

اس لئے وہ عام ترین حرکت جو ذرہ کے لیے ممکن ہے ایک ہی قطع ناقص کو بار بار مرتسم کرنے پر مشتمل ہوتی ہے۔ اس حرکت کا دور

$\frac{2\pi}{f}$  ہے اور یہ وہ وقت ہے جو جم ف ت اور جب ف ت کو

اپنی قیمتیں دہرانے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔  
۲۱۵۔ محاور لا، ما اب تک غیر متعین ہیں۔ فرض کرو کہ ہم انہیں قطع ناقص کے صدر محاور خیال کرتے ہیں۔

اب اگر ہم فرض کریں کہ وقت کی چائش اس لمحہ سے کی گئی ہے جس پر ذرہ محاور اعظم کے سروں میں سے ایک پر تھا تو ہمیں شکل ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی :-

$$\text{لا} = \text{جم ف ت}$$

$$\text{ما} = \text{جب ف ت}$$

اس طرح ذرہ جس قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے اس کا خارج المکرز

زاویہ ف ت ہے اور اس لیے یہ زاویہ یکساں زاویوں رفتار یا  $\frac{2\pi}{f}$

کے ساتھ بڑھتا ہے۔ حرکت تکرار پاتی ہے جب ف، ف، ۲، ۳ تک بڑھ جاتا ہے

اس لئے تعدد ف یا  $\left[ \frac{1}{\text{س}} \right]$  ہے اور دور  $\Pi ۲$   $\left[ \frac{1}{\text{ک}} \right]$  ہے۔

۲۱۶۔ اس حرکت کی مثال اس رقا ص کی حرکت سے مل سکتی ہے جو ایک انقباضی مستوی میں حرکت کرنے پر مجبور نہ ہو لیکن انقباضی سے اس کے انحراف چھوٹے ہوں۔

فرض کرو کہ رقا ص کا طول  $\Delta$  ہے اور فرض کرو کہ اس کا لنگر اپنے توازن کے محل و سے قریب کے محل ف تک ہٹا ہے اتنا کہ زاویہ ف ج و کو چھوٹا سمجھا جاسکتا ہے۔



اس زاویہ کو طہ سے تعبیر کرو تو لنگر کے وزن کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، (۱) ک ج جم طہ

سمت ج ف میں

(۲) ک ج جب طہ سمت ف و

میں۔ (۱) کی تعدیل دوری کے تناؤ

سے ٹھیک طور پر ہو جاتی ہے۔ پس

شکل (۱۳۴)

(۲) میں اگر طہ چھوٹا ہے تو جب طہ کو طہ کے مساوی اور اس لیے

وف کے مساوی رکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے لنگر پر ایک قوت ک ج و

سمت وف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جاسکتی ہے۔ اس لیے

حرکت اس قسم کی ہے جس کو اوپر بیان کیا گیا ہے، نہ کی قیمت ک ج و

ہے اور اس لیے ف کی قیمت  $\left[ \frac{1}{\text{ج}} \right]$  ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں

کہ اگر کسی لٹکے ہوئے وزن کو اس کے توازن کے محل سے ہٹا کر کسی

(۲۷۲)

طریقہ پر پھینکا جائے تو وہ ہمیشہ اس افقی مستوی میں ایک قطع ناقص

مرسم کرے گا جس میں وہ حرکت کرنے میں آزاد ہے اور وہ نقطہ اس



قطع ناقص کا مرکز ہو گا جو اس نقطہ کے عین نیچے ہے جس سے وزن لٹکا یا گیا۔ انگلستان کے دیہاتی میلوں میں بعض اوقات ایک ایسا انتظام دیکھا جاسکتا ہے جس میں تماشہ گر بڑی ہوشیاری سے اس نتیجہ سے فائدہ اٹھاتا ہے۔ ایک وزن ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہوتا ہے اور فرش پر ٹھیک اس نقطہ کے نیچے جس سے وزن لٹکا ہوا ہے ایک اسکیٹل (لکڑی کی چھوٹی ٹمنج) رکھی ہوتی ہے تماشہ گر تماش بینوں سے کہتا ہے: 'آؤ، داخلہ کی فیس دیکر اندر آؤ اور انعام کیلئے ایک مقابلہ میں شریک ہو جو اس شخص کو دیا جائے گا جو وزن کو اس طریقہ سے پھینکے کہ وہ واپس ہوتے ہوئے اسکیٹل سے ٹکرائے۔ بلاشبہ یہ مسئلہ اتنا ہی ناممکن ہے جتنا ایک ایسے قطع ناقص کو بنانے کا ہے جو خود اپنے مرکز میں سے گذرتا ہو۔

۲۱۷۔ ایک اور طریقہ جس کے ذریعہ متذکرہ بالا حرکت کی مثال ملیسکتی ہے حسب ذیل ہے: طبعی طول ل کی ایک لچکدار ڈوری کے ایک سرے سے ایک چھوٹا ذرہ بندھا ہوتا ہے اور یہ ذرہ ایک چکنی افقی میز پر حرکت کرنے میں آزاد رہتا ہے۔ ڈوری کا دوسرا سر امیر امینز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتا ہے اور ایک ثابت نقطے سے جس کا فاصلہ سوراخ سے ل ہے بندھا ہوتا ہے۔ اگر ذرہ کو سوراخ سے فاصلہ رنگ کھینچا جائے تو ڈوری کا کل طول ل + r ہو گا اور اس لیے اس کا تناؤ  $\frac{r}{L}$  ہو گا جہاں لہ لچک کا مقیاس ہے۔ اس لیے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت یعنی ڈوری کا تناؤ اس فاصلے کے متناسب ہے جو ذرہ کا ایک ثابت نقطہ یعنی سوراخ سے ہے اور اس قوت کی سمت سوراخ کی جانب ہے۔ اس کو چھوڑ دینے پر ذرہ میز پر ایک قطع ناقص میں حرکت کرے گا۔

## مثالیں

۱۔ نقطہ ف ایک قطع ناقص کو ایک تھما ذی قوت کے تحت جس کی

سمت مرکز کی جانب ہے مرسم کر رہا ہے اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطہ ف ہے۔  
ثابت کرو کہ ف اس امدادی دائرہ کے گرد یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔  
۲۔ ایک ذرہ قوت کے ایک مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرسم کرتا ہے  
کشش راست فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز سے  
ذرہ تک جو سمتی نصف قطر کھینچا جائے وہ مساوی اوقات میں مساوی رقبے  
مرسم کرتا ہے۔

۳۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت جو فاصلے کے متناسب ہے ایک قطع  
ناقص مرسم کر رہا ہے، اس پر ناقص کے محور اعظم کی متوازی سمت میں ایک  
دیکھ پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ نئے مدار کا محور اصغر وہی ہے جو پرانے مدار کا تھا  
اور بتاؤ کہ محور اعظم میں پیدا شدہ تبدیلی کس طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔

۴۔ ایک ذرہ قوت کے متعدد مرکزدوں کی کششوں کے زیر عمل ہے جن میں  
سے ہر کشش فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرسم  
کرتا ہے۔

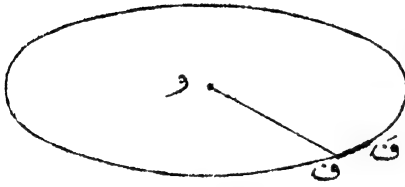
(۲۷۳)

اس حرکت کی تمثیل کے لیے میکائیٹکی نمونہ کس طرح بنایا جاسکتا ہے۔  
۵۔ ایک ذرہ ایک دفاعی قوت کے زیر عمل ہے جو قوت کے مرکز سے  
اس کے فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرسم کرتا ہے۔  
۶۔ مثال مابقی میں ثابت کرو کہ ذرہ اور قوت کے مرکز کو ملائے والا  
سمتی نیم قطر مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرسم کرتا ہے۔

## قوت کے ایک مرکز کے گرد حرکت کا عام نظریہ

۲۱۸۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ ہے جس پر صرف ایک قوت عمل  
کرتی ہے جس کی سمت قوت کے ایک ثابت مرکز کی جانب ہے اور  
اس قوت کی مقدار اس فاصلہ کا کوئی تفاعل ہے جو ذرہ کا ثابت مرکز  
سے ہے۔  
فرض کرو کہ قوت کا مرکز وہ ہے اور کسی لمحہ پر ذرہ کا محل ف ہے

اور اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار کی سمت  $F$  ہے۔ اب مستوی  $W$  میں ذرہ کی رفتار اور نیز اس کا اسراع واقع ہیں، رفتار  $F$  پر اور اور اسراع  $F$  و پر ہے۔ پس کسی چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کی رفتار پھر بھی مستوی  $W$  میں



شکل (۱۳۵)

ہوگی۔ نیز ذرہ بھی اسی مستوی میں ہوگا (فرض کرو نقطہ  $F$  پر) اور اس لیے اسراع بھی جو  $F$  و پر ہے اسی مستوی میں ہوگا۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک اور چھوٹے وقفہ کے

بعد ذرہ کا محل، رفتار، اور اسراع سب کے سب مستوی  $W$  میں ہوں گے اور علیٰ ہذا اس عمل کو جہاں تک چاہیں جاری رکھا جاسکتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ذرہ مستوی  $W$  و  $F$  کو کبھی بھی نہیں چھوڑے گا اور اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

وہ مدار جس کو ایک ذرہ قوت کے ایک ثابت مرکز کے

گردم تقسیم کرتا ہے کلاً ایک مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۱۴ میں اس مسئلہ کی ایک تمثیل دی جا چکی ہے، یہ تمثیل اس مدار سے متعلق ہے جس کو ذرہ ایسی کشش کے تحت گردش کرتا ہے جو مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہے

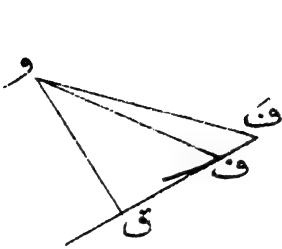
## رفتار کا معیار

(۲۴۲)

۲۱۹ — کسی نقطہ کی رفتار ایک سمتی ہے اور اس سمتی کے خط عمل کو وہ

خط سمجھا جاسکتا ہے جو متحرک نقطہ میں سے اس کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہو۔ ہم رفتار کے معیار کی عین اسی طریقہ پر تعریف کر سکتے ہیں جس طریقہ پر قوت کے معیار کی تعریف کی جا چکی ہے۔ مزید بریں قوت کے

معیاروں کے تمام خواص اس واقعہ سے مستنبط کئے گئے تھے کہ قوتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے اور اس لیے وہی خواص رفتاروں کے معیاروں کے لیے بھی درست ہوں گے کیونکہ رفتاروں کو بھی قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے۔



شکل (۱۳۶)

فرض کرو کہ ف ایک

ذرہ ہے جو کے گرد ایک مدار

مرقسم کر رہا ہے اور فرض کرو کہ و

سے اس خط پر جو ف میں سے

گزر رہا ہے اور ذرہ کی رفتار کی سمت

میں کھینچا گیا ہے عمود و ق

نکالا گیا ہے۔ پس ذرہ کی رفتار کا

معیار و کے گرد و ق x (ذرہ کی رفتار) ہے۔

فرض کرو کہ وقت کے چھوٹے وقفہ فرت کے بعد ذرہ ف پر ہے۔

ف پر اس کی رفتار، ف پر اس کی رفتار اور ف پر اس کے اسراع کے

فرت گنا سے مرکب ہے۔ اس لیے

(ف پر رفتار کا معیار و کے گرد)

= (ف پر رفتار کا معیار و کے گرد)

+ [ (فرت x ف کا اسراع) کا معیار و کے گرد ]

ف پر اسراع کی سمت ف و ہے اور اس لیے اس مساوات

کی آخری رقم صفر ہے اور اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ف اور ف پر کی رفتار

کے معیار و کے گرد مساوی ہیں۔

ہم اس کی توسیع پچھلے مسئلہ کی طرح نقطہ بہ نقطہ کر سکتے ہیں اور بالآخر

حسب ذیل مسئلہ پہنچتے ہیں:

اگر ایک ذرہ و کے گرد ایک مدار مرقسم کر رہا ہو تو ذرہ کی

رفقار کا معیار و کے گرد مستقل ہوتا ہے۔

۲۲۰۔ ہم نے فرض کیا ہے کہ ذرہ ف سے ف تک وقت فرت میں حرکت کرتا ہے اور اس لیے ف پر اس کی رفقار و ہو تو ف ف = و فرت جب ذرہ اپنا مدار مرسوم کرتا ہے تو اس اشناء میں خط و ف مدار کے مستوی میں ایک رقبہ مرسوم کرتا ہے۔ وقت فرت میں مرسوم شدہ رقبہ (۲۷۵) چھوٹے مثلث و ف ف کا رقبہ ہے۔ چنانچہ

وقت فرت میں مرسوم شدہ رقبہ

$$= \text{رقبہ و ف ف}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{وق} \times \text{ف ف}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{وق} \times \text{و فرت}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{فرت} \times \text{رفقار کا معیار و کے گرد}$$

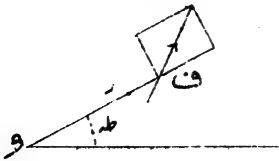
پس فی اکائی وقت مرسوم شدہ رقبہ و کے گرد رفقار کے معیار کا نصف ہے اور پچھلے دفعہ کی رو سے یہ مستقل ہے۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

مساوی رقبہ مساوی وقوتوں میں مرسوم ہوتے ہیں۔

مدار کی تفرقی مساوات

۲۲۱۔ اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ اور توانائی کے بقا کے مسئلہ کو ایک ساتھ

لینے سے ہم اس مدار کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ اس مساوات کو سب سے زیادہ سہولت کے ساتھ قطعی عددوں میں بیان کیا جاسکتا ہے جبکہ قوت کے



شکل (۱۳۷)

مرکز کو مبدا فرض کیا گیا ہو۔

اگر ذرہ کے محدود رفتار ہوں تو رفتار کو دور رفتار کا مرکب خیال کیا جاسکتا ہے (۱) رفتار  $\frac{فر}{فرت}$  سمت وف میں (۲) رفتار  $\frac{فرط}{فرت}$  سمت وف کے علی القوام۔  
اس لیے رفتار

$$و = \left( \frac{فر}{فرت} \right)^۲ + \left( \frac{فرط}{فرت} \right)^۲$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

و کے گرد رفتار کا معیار دوسرے جزو ترکیبی کے معیار کے مساوی ہے کیونکہ پہلے جزو ترکیبی کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس لئے و کے گرد رفتار کا معیار  $و \times \frac{فرط}{فرت}$  ہے اور چونکہ اس کی قیمت مستقل ہے (فرض کرو) اس لیے حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{و}{فرت} = \frac{فرط}{فرت} \quad (۱-۹)$$

اگر ذرہ کی کمیت ک ہو اور اگر فی اکائی کمیت کشش ف (ر) ہو جبکہ ذرہ و سے فاصلہ پر ہے تو ذرہ کی توانائی بالقوہ

(۳۷۶)

ک ف (ر) فر

ہے اور توانائی بالحکمت  $\frac{۱}{۲} ک و^۲$  یا

$$\frac{۱}{۲} ک \left[ \left( \frac{فر}{فرت} \right)^۲ + \left( \frac{فرط}{فرت} \right)^۲ \right]$$

ہے۔ اب چونکہ مجموعی توانائی مستقل ہوتی ہے اس لیے

$$(110) \quad \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 = 2 \quad \text{کیف (ر) فرد} = \epsilon$$

جہاں  $\epsilon$  مستقل ہے۔

مساواتوں (۱۰۹) اور (۱۱۰) سے مدار کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ  $r$  اور  $r_0$  دونوں  $t$  کے تفاعل میں اس لیے

$$\frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0}$$

اور اس لیے مساوات (۱۱۰) کو شکل

$$\left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] = 2 \quad \text{کیف (ر) فرد} = \epsilon$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ اور پھر اس مساوات اور (۱۰۹) سے  $\frac{r}{r_0}$  کو ساتھ کرنے سے مدار کی تفرقی مساوات

$$(111) \quad \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] = 2 \quad \text{کیف (ر) فرد} = \epsilon$$

حاصل ہوتی ہے۔

### معکوس مربع کا قانون

۲۲۲۔ اب فرض کرو کہ کشش، فاصلے کے معکوس مربع کے قانون کے تابع ہے اور اس لیے

$$f(r) = \frac{1}{r^2}$$

جہاں  $m$  مستقل ہے۔ تب

$$(112) \quad \text{کیف (ر) فرد} = -\frac{1}{r}$$

(۲۷۷) اور مساوات (۱۱۱) ہو جاتی ہے

$$e = \frac{r^2}{m} - \frac{r^2}{r} \left[ \left( \frac{r}{r^2} \right) + \left( \frac{r}{r^2} \right) \right]$$

اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{r^2}{r} = \frac{r^2}{r} \left[ \frac{r^2}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right]$$

اور تکمل کرنے سے

$$p = \frac{r^2}{m} - \frac{r^2}{r} \left[ \frac{r^2}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} \right]$$

جہاں  $m$  تکمل کا مستقل ہے۔  
منحصر کرنے پر

$$(113) \quad \left[ \frac{r^2}{m} + e \right] = \frac{r^2}{m} - \frac{r^2}{r} \quad \text{جب } (p - m)$$

اور اگر ہم مساوات

$$\frac{p}{r} = 1 - \frac{p}{r}$$

کے ساتھ اس کا مقابلہ کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۱۱۳) ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ مبدا ہے اور وتر خاص  $L = \frac{r^2}{m}$  اور خروج مرکز

$$z = \left[ 1 + \frac{e}{r} \right] \text{ خط } p = \frac{r^2}{m} \text{ کو مخروطی کے محور اعظم پر منطبق کرنے کے لیے}$$

$m$  کی قیمت کو  $\frac{p}{r}$  کے مساوی رکھنا چاہئے۔  
۲۲۳ — ہم دیکھتے ہیں کہ اگر



ع مثبت ہو تو  $ز < ۱$  اور مدار قطع زائد ہے،  
 ع صفر ہو تو  $ز = ۱$  اور مدار قطع مکانی ہے،  
 ع منفی ہو تو  $ز > ۱$  اور مدار قطع ناقص ہے۔  
 اس لئے مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف ع کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے  
 اور ع کی قیمت پر منحصر نہیں ہوتی۔ یہ معلوم رہے کہ اگر وہ نقطہ معلوم ہو جس  
 ذرہ پھینکا گیا ہے اور نیز پھینکنے وقت ذرہ کی رفتار بھی معلوم ہو تو ع کی قیمت  
 متعین ہو جاتی ہے کیونکہ مساوات (۱۱۰) کی رو سے

$$ع = ۲ - \frac{۲}{ز}$$

(۲۷۸) پس مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف پھینکنے کی رفتار پر منحصر ہوتی ہے  
 اور سمت پر منحصر نہیں ہوتی، مخروطی ایک قطع زائد، قطع مکانی، یا قطع ناقص  
 ہوگا بموجب اس کے کہ

$$۲ < = یا > \frac{۲}{ز}$$

اصلی خروج المرکز، ع اور ع دونوں پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ اگر  
 ز خروج المرکز ہو تو

$$ز = ۱ + \frac{ع}{۲}$$

۲۲۴۔ اگر ذرہ کو ایک دائرہ مرتسم کرنا ہے تو حاصل ہونا چاہئے  
 $ز = ۰$  اور اس لئے

$$۱ + \frac{ع}{۲} = ۰$$

اب  $ع = ۲ - \frac{۲}{ز}$  اور  $ع = ۲$  رکھنے سے (اس لئے ن  
 وہ عمود ہے جو قوت کے مرکز سے پھینکنے کی سمت پر کھینچا گیا ہے)  
 مساوات بالا

$$\frac{m}{f} - \frac{2}{r} = \frac{2}{r} + \frac{2}{w} = 0$$

$$\text{یا } (w - \frac{m}{f}) + m(\frac{1}{f} - \frac{1}{r}) = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

چونکہ 'ف' 'ر' سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے ان دو رقموں میں سے کوئی منفی نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اس مساوات کے پورا ہونے کے لیے دونوں رقمیں معدوم ہونی چاہئیں اور حاصل ہونا چاہئے

$$f = r \text{ اور } w = m$$

پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ ذرہ کو پھینکنے کی سمت اس خط کے علی القوائم ہونی چاہئے جو ذرہ کو قوت کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دوسری مساوات جس کو شکل

$$\frac{w}{r} = \frac{m}{f}$$

میں لکھا جا سکتا ہے اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ تجاذبی قوت کو عین اتنا اسراع پیدا کرنا چاہئے جو نصف قطر کے ایک دائرہ میں حرکت کے لیے مناسب ہے۔

۲۲۵۔ ناقصی مدار کے لیے مدت دوران وہ ہے جو رقبہ  $\pi r^2$  ب مرسم کرنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے جہاں 'ر' 'ب' ناقص کے نیم محور ہیں۔ چونکہ رقبہ شرح  $\frac{1}{4} \pi r^2$  اکائی وقت سے مرسم ہوتا ہے اس لیے مدت دوران 'ت'

(۲۷۹)

$$t = \frac{\pi r^2}{b}$$

ہوگی لیکن نیم وتر فاصل  $l = \frac{r}{b}$  اور نیز  $\frac{2}{w} = \frac{2}{m}$  اس لیے

$$b = \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2}}}$$

$$\text{اس لیے } t = \frac{2\pi b}{\sqrt{a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}} \quad (114)$$

چونکہ ت، خروج المرکز پر منحصر نہیں ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ کسی مدار کی مدت دوران وہی ہے جو اس دائری مدار کی ہے جس کا نصف قطر نیم محور اعظم کے مساوی ہو۔

۲۲۶۔ معکوس مربع کا قانون تجاذب کا قانون ہے، اس لیے وہ قانون جس کی تحقیق میں ہم مصروف تھے وہ ہے جس کے تحت سورج کے گرد ستارے اپنے اپنے مداروں میں اور نیز شہاب اور مدار ستارے حرکت کرتے ہیں۔ ان اسباب کی تشریح یہاں نہیں کی جا سکتی جن کی بنا پر سیاروں سے مرسم شدہ مخروطی سب کے سب چھوٹے خروج المرکز کے قطعات ناقص ہیں۔ و مدار ستاروں کے مداروں میں زیادہ وسعت پائی جاتی ہے۔ یہ اجرام بالعموم نظام شمسی کے باہر بہت دور سے آتے ہیں۔ تقریبی طور پر ہم سمجھ سکتے ہیں کہ وہ لاتناہی چلے آ رہے ہیں اور انہوں نے نسبتاً چھوٹی رفتار سے حرکت کی ابتدا کی ہے۔ اس صورت میں مدار تقریباً مکانی ہوتا ہے۔

## کیپلر کے قوانین

۲۲۷۔ ستاروں کے مداروں کے نظریہ کے انکشاف سے بہت پہلے جس کو نیوٹن نے باقاعدہ محسوب کیا تھا کیپلر نے وہ تین خاص قوانین تجربی طور پر معلوم کئے تھے جن کے تحت سیاروں کی حرکتیں جاری ہیں۔ کیپلر کے یہ تین قوانین حسب ذیل ہیں:

قانون (۱)۔ ہر سیارہ ایک قطع ناقص مرسم کرتا ہے

جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہوتا ہے۔

قانون (۲)۔ وہ رقبے جو سیارہ اور سورج کو ملانے والا نصف قطر سیارہ کے مدار میں مرسم کرتا ہے ان وقتوں کے متناسب ہوتے ہیں جن میں یہ رقبے مرسم ہوتے ہیں۔

قانون (۳)۔ ان مختلف مداروں کے دوری مدتوں کے مربع ان کے محاور اعظم کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ ان میں سے پہلے قانون سے نیوٹن نے ثابت کیا کہ سیاروں اور سورج کے درمیان قوت کا قانون معکوس مربع کا قانون ہونا چاہیے۔ تیسرے قانون سے اسی واقعہ کا اظہار ہوتا ہے جس کو مساوات (۱۱۴) بیان کرتی ہے۔

## دو ذروں کی حرکت ایک دوسرے کے گرد

۲۲۸۔ اجرام کا وہ زوج جس کو دوہرا تارہ کہتے ہیں آسمان میں عام طور پر دیکھا جاسکتا ہے۔ یہ تارہ دو ستاروں پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک دوسرے کے گرد مدار مرسم کرتے ہیں اور ان میں سے کوئی ثابت نہیں ہوتا۔ نوین باب میں ثابت شدہ مسئلوں سے ان دو ستاروں کا مرکز نقل یا توازن رہنا چاہئے یا ایکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرنا چاہئے اور اس صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس کو ثابت سمجھا جاسکتا ہے اگر تمام حرکت کو ایک ایسے حوالے کے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا جائے جو اس نقطہ کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ان دو ستاروں کے محل 'ا'، 'ب' ہیں اور فرض کرو کہ ان کا مرکز نقل 'ث' ہے۔ فرض کرو کہ ستاروں کی کمیتیں 'ک'، 'ک' ہیں

اور فرض کرو کہ  $\theta$  سے  $\theta + d\theta$  کے فاصلے  $AB$  ہیں۔ اب

$$(115) \quad \frac{K}{B} = \frac{K}{A} = \frac{K}{A+B}$$

تجاذب کا پورا قانون 'قانون'  $\frac{K}{r^2}$

میں بیان ہو جاتا ہے جہاں  $K$ ، کمیتیں ہیں اور  $\theta$  کے درمیان فاصلہ  $r$  ہے اور جب ایک مستقل ہے جس کی قیمت تجربہ سے معلوم کی جاسکتی ہے اور  $\theta$  دو کمیتوں کے درمیان تجاذبی قوت  $F$  ہے۔ پس ستارہ  $B$  پر عمل کرنے والی قوت

$$F = \frac{K}{(A+B)^2}$$

(۲۸۱) ہے اور اس کی سمت  $B$  ہے۔ اس قوت کے متعلق ہمیشہ یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ ثابت نقطہ  $\theta$  سے عمل کر رہی ہے کیونکہ اس کا خط عمل ہمیشہ  $B$   $\theta$  رہتا ہے۔ نیز اس قوت کی مقدار ستارہ  $B$  کی فی اکائی کمیت پر

$$\frac{K}{(A+B)^2}$$

ہے یا رشتوں (۱۱۵) کی مدد سے

$$\frac{K}{(A+B)^2}$$

ہے۔ یہ ایک قوت  $\frac{K}{r^2}$  ہے جو  $\theta$  کی جانب عمل کرتی ہے اگر ہم کہیں

$$M = \frac{K}{(A+B)^2}$$

پس ان دو ستاروں میں سے ہر ایک، مشترک مرکز ثقل کے گرد ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے۔ ان مخروطیوں کے مداروں کی مدت دوراں ت اور خاور اعظم کی قیمتوں کا ہیئتیی طور پر مشاہدہ کرنا ممکن ہے۔ ان مقداروں سے ہم مہ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$k^2, k^3$$

$$(k+k^2)$$

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں اور پھر ان سے  $k$  کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس طریقہ پر بعض ستاروں کی قیمتیں معلوم کرنا ممکن ہے۔

## مثالیں

(تجاذبی مستقل جو کو سنتی میٹر گرام ثانیہ اکائیوں میں  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  کے مساوی ہے)  
۱۔ اگر زمین جذب کرے گویا کہ اس کی کیت اس کے مرکز پر مرکوز ہے اور اگر خط استواء پر جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  سنتی میٹر ہے ج کی قیمت  $9 \times 8 \times 10^{-9}$  سنتی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو زمین کی کیت معلوم کرو۔  
۲۔ زمین اور چاند کی قیمتوں کو علی الترتیب  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  اور  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  گرام لیکر اور ان کے درمیان فاصلہ  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  تسلیم کر کے چاند کی مدت دوران معلوم کرو۔

۳۔ سورج کی کیت کو  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  گرام اور سال کو  $365 \times 24 \times 60 \times 60$  یوم لیکر زمین کے مدار کا نیم محور اعظم معلوم کرو جبکہ سورج کو قوت کا ثابت مرکز سمجھا گیا ہو۔  
۴۔ اگر سورج کی کیت زمین کی کیت کا  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  گنا ہو تو معلوم کرو سوال (۳) کے نتیجہ کو کس قدر تبدیل کرنا چاہئے جبکہ سورج کی حرکت کا بھی لحاظ رکھا جائے۔

۵۔ مشتری کی کیت کو سورج کی کیت کا  $\frac{1}{1000}$  اور سورج سے اس کے بڑے سے بڑے فاصلہ کو  $10 \times 666 \times 10^{-9}$  میل لیکر ثابت کر دو کہ مشتری کی کشش کی

وجہ سے سورج ایک قطع ناقص میں تقسیم کرے گا جس کا نیم محور اعظم تقریباً ... ۶۱ میل کے مساوی ہوگا۔ نیز مشتری کے سال کا طول معلوم کرو۔

۶۔ وہ اعظم رفتار جو زمین اپنے مدار میں حاصل کرتی ہے ..... ۳ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے اور اس کی اقل رفتار ..... ۲۹۲۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے۔ زمین کے مدار کا خروج المرکز معلوم کرو۔

## عام مثالیں

۱۔ ایک ذرہ جس کو دوری کے ذریعہ ایک نقطہ سے باندھا گیا ہے ایک متقابل دائرے میں مکمل گردش کرتے کے لیے عین تو اٹائی رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوری کا تناؤ صفر ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر ہوگا لیکن ذرہ کے وزن کا چھ گنا ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے زیر ترین نقطہ پر ہوگا۔

۲۔ ایک ذرہ ایک چلتی دائری قوس کے محذب رخ پر نیچے پھسلے ہوئے جاذبہ کے تحت ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرتا ہے۔ اگر اس کی رفتار وہ ہو جو مرکز کے اوپر ارتفاع  $f$  کی وجہ سے ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ سے اڑ کر نکل جائے گا جبکہ اس کا ارتفاع مرکز کے اوپر  $\frac{f}{2}$  ہو جائے۔

۳۔ اگر زاویہ  $\theta$  جس میں سے ایک سادہ رقا ص انتصابی کی ہر ایک جانب جھولتا ہے چھوٹا ہو مگر صغیر نہ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے تقرب تک اہتزاز کا وقت

$$2\pi \sqrt{\frac{J}{C} \left( 1 + \frac{1}{14} \epsilon^2 \right)}$$

ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ وہ رقا ص جو ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے جبکہ وہ صغیر اہتزاز کر رہا ہو تقریباً ۴۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جائے گا اگر اس کو ایک گھڑی میں لگا دیا جائے جو اس کو انتصابی کی ہر ایک جانب ۵° اہتزاز کرنے پر مجبور کرے۔

۴۔ ایک ٹرین ایک منحنی کے گرد ۶۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے

حرکت کر رہی ہے، اور اس کے ایک ڈبے میں تانوں کا ایک رقا ص دودقیوں میں ۱۲۱ دفعہ ضربوں کا اظہار کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ نخنی کا نصف قطر تقریباً ایک چوتھائی میل ہے۔

۵۔ ایک لچکدار دوری کا طبعی طول ۱ اور لچک کا مقیاس لہ ہے۔ اس کے ایک سرے کو چکے افقی میز کے ایک ثابت نقطہ سے باندھا گیا ہے اور اس کا دوسرا سر کمیت ک کے ایک ذرہ سے بندا ہے جو میز پر ساکن پڑا ہے۔ اگر دوری کے دوسرے سرے سے اس کمیت کو فاصلہ ۲ تک کھینچ کر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ ذرہ اپنے ابتدائی محل پر باقاعدہ وقفوں  $۲(۲+۳)$  کے  $\frac{1}{2}$  کے بعد واپس ہوتا جائے گا۔

۶۔ دو گولے جن کے وزن  $و$  اور  $و$  ہیں ایک تانے سے جس کا طول  $ل$  ہے مربوط ہیں۔  $و$  کو ہاتھ میں پکڑ کر  $و$  کو گول اٹھایا گیا ہے۔ اگر  $و$  کو اس وقت چھوڑ دیا جائے جبکہ  $و$  ارتفاع  $ع$  پر رقا ص سے حرکت کر رہا ہو تو ٹھو پڑیہ حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ہوا میں تانے کا تناؤ

(۲۸۳)

$$\frac{و}{و+و} \frac{و}{ط} \frac{۲}{ج} \text{ پونڈ}$$

ہے۔

۷۔ دو کمیتیں ک اور کم ایک بے وزن کمانی سے مربوط ہیں جس کی طاقت ایسی ہے کہ جب ک کو مضبوط پکڑا جاتا ہے تو ک، ن ارتعاش فی ثانیہ کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کم کو مضبوط پکڑ لیا جائے تو ک، ن ایک ایک

ارتعاش فی ثانیہ کرے گا اور جب دونوں کمیتیں آزاد ہوں تو وہ ن  $\sqrt{\frac{ک+کم}{ک}}$

ارتعاش فی ثانیہ کریں گی۔ ہر صورت میں ارتعاش کمانی کے خط میں واقع ہوتے ہیں۔

۸۔ کمیت ک کا ایک ذرہ کسی شکل کی ایک چکینی نخنی نلی میں حرکت کر کے دو لچکدار دوریوں کے تناؤں کے تحت جو نلی میں ہیں توازن میں ہے، ان دوریوں



طبعی طول  $ل$ ،  $ل$  اور لچک کے مقیاس  $ل$ ،  $ل$  ہیں اور ان کے دو سرے سرے  
نلی کے ثابت نقطوں سے بند ہے ہوے ہیں۔ اگر ذرہ نلی میں اہتزاز کرے چھوٹے  
یا بڑے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

$$\frac{\pi^2}{\frac{L}{J} + \frac{L}{J}} \sqrt{\frac{K}{J}}$$

ہے۔

۹۔ ایک ڈوری ایک چکنے افقی میز کے ایک چھوٹے سوارخ میں سے  
گذرتی ہے اور اس کے سروں سے مساوی ذرے بند ہے ہوے ہیں جن میں سے  
ایک انتصافاً لٹک رہا ہے اور دوسرا میز پر سوارخ سے فاصلہ  $ل$  پر پڑا ہے۔  
اس دو سرے ذرہ کو ڈوری کے عمود وار رفتار  $و$  کے ساتھ اچھا لایا گیا ہے۔  
ثابت کرو کہ لٹکتا ہوا ذرہ ساکن رہے گا اور یہ کہ اگر اس حالت سکون میں خفیف  
طور پر خلل پڑے تو چھوٹے اہتزاز کی مدت  $\frac{\pi^2}{\frac{L}{J} + \frac{L}{J}} \sqrt{\frac{K}{J}}$  ہوگی۔

۱۰۔ ایک ذرہ نصف قطر  $ل$  کی ایک دائری نالی میں ایک کشش  $م$  کے  
تحت جو نقطہ  $ف$  کی جانب ہے حرکت کرتا ہے، نقطہ  $ف$  دائرہ کے مستوی  
میں ہے اور اس کے مرکز سے فاصلہ  $ب$  پر ہے۔ ذرہ کو رفتار  $و$  کے ساتھ  
دائرہ کے اُس نقطہ سے پھینکا گیا ہے جو  $ف$  سے قریب ترین ہے۔ ثابت  
کرو کہ ذرہ مکمل گردش کرے گا اگر  $و$ ،  $\frac{م}{و} \sqrt{\frac{ب}{ل}}$  سے کم نہ ہو۔

۱۱۔ ایک چکنے قطع ناقص کے نیم محور  $ل$  اور  $ب$  ہیں، اس کو اس طور پر  
رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصافاً بی ہے۔ ایک ذرہ کو ناقص کی قوس کے  
مقعہ رُخ پر ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو مرکز کے اوپر ارتفاع  $ف$  کی باعث  
پیدا ہو سکتی ہے۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ذرہ قوس کو چھوڑ دے گا اور نیز ثابت  
کرو کہ وہ ناقص کے مرکز میں سے گزرے گا اگر

$$ف = \frac{۸ + ۱}{۳۶۱۶}$$

۱۲۔ ایک ذرہ نصف قطر ۱ کے ایک دائرہ میں کشش مہ رنی اکائی کیت کے تحت حرکت کرنے کے لیے مقید ہے، کشش دائرہ کے اندر ایک نقطہ کی جانب ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے۔ اگر ذرہ کو اس نقطہ سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر رکھ کر مغیر رفتار سے متحرک کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ کے دوسرے رُبع پر سے وقت

(۲۸۴)

$$\left[ \frac{1}{مہ ف} \right] \text{ لوک } (۱ + ۲۶)$$

میں گذر جائے گا۔

۱۳۔ ایک ذرہ ایک ناقص کو قوت کے ایک مرکز کے گرد جو ماسکے پر ہے مَرْتَم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ محور اصغر کے سرے پر کی رفتار کسی قطر کے سروں پر کی رفتاروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۱۴۔ ایک دُمدار تارہ ایک قطع مکانی کو مَرْتَم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایکی رفتار جو اس کے مدار کے محور پر عمود ہے سورج سے سمتی نیم قطر کے بال عکس متناسب ہے۔

۱۵۔ کمیت ک کا ایک دُمدار تارہ جو سورج کے گرد ایک قطع مکانی مَرْتَم کر رہا ہے مساوی کمیت ک کے ایک ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں کمیتیں باہم حرکت کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مرکز ثقل سورج کے گرد ایک دائرہ مَرْتَم کرے گا جس کا مرکز سورج ہوگا۔

۱۶۔ یہ مان کر کہ ایک مَرْمی جاذبہ کے تغیرات کی رعایت رکھنے کے بعد زمین کے مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مَرْتَم کرتا ہے جس کا ایک ماسکے زمین کے مرکز پر ہے ثابت کرو کہ نقطہ رمیدگی میں سے گذرنے والے ایک افقی مستوی پر معلومہ رفتار د کے لیے بڑے سے بڑا ٹپ

$$\frac{۲۴}{۲۴} \text{ و } \frac{۲۴}{۲۴}$$

ہے جہاں س ' زمین کے مرکز سے نقطہ رمیدگی کا فاصلہ ہے۔  
۱۷۔ جب زمین اپنے مدار کے محور اعظم کے سر پر پہنچتی ہے تو ایک چھوٹا شہاب جس کی کمیت سورج کی کمیت کا  $\frac{1}{100}$  حصہ ہے اچانک سورج میں گر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سال کا طول بقدر اپنے پہلے طول کے  $\frac{1}{100}$  ویں حصے کے گھٹ جائے گا۔

۱۸۔ ایک سیارہ سٹا پر جو سورج مں کے گرد حرکت کر رہا ہے ایک چھوٹا شہاب گرتا ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار بقدر اپنی پہلی رفتار کے  $\frac{1}{100}$  ویں حصہ کے گھٹ جاتی ہے اگرچہ اس کی سمت نہیں بدلتی۔ ن کو چھوٹا سمجھ کر ثابت کرو کہ سیارہ کے مدار کا خروج المکز بقدر  $2\pi$  (ز + جم طہ) کے گھٹ جائے گا جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو مں سٹا اور مدار کے محور اعظم کے درمیان ہے۔

نیز ثابت کرو کہ نیا محور اعظم پرانے محوروں کے ساتھ زاویہ  $2\pi$  جب طہ بنائے گا۔

۱۹۔ ایک ذرہ ماسکے کے گرد ایک قطع ناقص کو مرسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی اور کم سے کم زاویائی رفتاریں محور اعظم کے سروں پر واقع ہوتی ہیں اور نیز یہ کہ اگر یہ زاویائی رفتاریں عہ اور یہ ہوں تو واسطہ زاویائی رفتار

$$\frac{2\pi (عہ + عہ)}{عہ + عہ}$$

ہے۔

۲۰۔ ایک مدار تارہ ایک قطع مکانی کو سورج کے گرد مرسم کرتا ہے اور (۲۸۴) اس کا سورج سے قریب ترین فاصلہ زمین کے مدار کے نصف قطر کا ایک ثلث ہے جہاں زمین کے مدار کو دائری فرض کیا گیا ہے۔ زمین کے مدار کے اندر کتنے دنوں تک مدار تارہ رہے گا؟

۲۱۔ اگر ایک ذرہ پر کشش ایسی بدے جیسے قوت کے مرکز و سے فاصلے کے مربع کے بالعکس تو ثابت کرو کہ دو سمتیں ہیں جن میں کسی ذرہ کو ایک دے ہوئے نقطہ و سے اس طور پر پھینکا جاسکتا ہے کہ اس کے مدار کا محور اعظم معلومہ

محور اعظم ہو۔ اگر  $وف = ج$  اور اگر  $عم$  وہ زاوے ہوں جو پھینکنے کی سمتیں  
وف کے ساتھ بناتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$مم عم عم = ج - \frac{ج}{ا}$$

جہاں  $ا$  نیم محور اعظم ہے۔

۲۲۔ ایک ذرہ کو ایک نقطہ  $ف$  سے ایک قوت کے تحت جو ایک ثابت  
نقطہ  $س$  کی جانب ہے جس کا فاصلہ  $ف$  سے  $س$  ہے اس طور پر پھینکا گیا ہے کہ  
ذرہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جو  $س$  میں سے گزرتا ہے۔ ابتدائی رفتار وہ ہے  
اور رفتار کا معیار  $س$  کے گرد  $د$  ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ وقت

$$\frac{ص}{ص^۲} (۲ و ص^۲ \pm ص^۲ و ص^۲ - ص^۲)$$

میں ایک نیم دائرہ مرتسم کرے گا۔

۲۳۔ کمیت  $گ$  کا ایک کُندہ جس کے بالائی اور زیرین رخ چکنے افقی  
مستوی ہیں متوازی مستوی میں ایک نالی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور کمیت  
ک کا ایک ذرہ اس کے بالائی رخ میں ایک ثابت نقطہ پر ایک پلکار دوری  
سے بند ہوا ہے جس کا طبعی طول  $ا$  اور مقیاس  $ل$  ہے۔ اگر یہ نظام سکون سے  
حرکت میں آئے جبکہ ذرہ اس کے بالائی رخ پر ہو اور دوری نالی کے متوازی اپنے طبعی  
طول کا  $۱ + ن$  گنا تہی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ کُندہ جیلہ

$$\frac{(۱ + ن) ا ک}{گ + ک}$$

اور دور

$$\sqrt{\left(\frac{۲}{ن} + ۲\right)} \frac{ا ک ک}{ل (گ + ک)}$$

کے اہتزاز کرے گا۔

# گیارہواں باب

## اُستوار اجسام کی حرکت

(۲۸۶)

۲۲۹۔ اس باب میں اُستوار اجسام کی حرکت سے بحث کی جائے گی جبکہ حرکت ایسی ہو کہ اجسام ذرے متصور نہ ہو سکیں۔  
 دفعہ ۶۶ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ اُستوار اجسام کی عام سے عام ممکن حرکت حرکت انتقال اور گردش حرکت سے مرکب ہوتی ہے۔ کسی جسم کی قوتوں کے زیر عمل کسی اُستوار جسم کی عام حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر گردش حرکت کے خواص کا پہلے سے زیادہ تفصیل کے ساتھ امتحان کرنا مناسب ہوگا۔

### زاویائی رفتار

۲۳۰۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۶۶) کہ کسی اُستوار جسم کی ہر حرکت کے لئے جس میں ایک نقطہ ف ثابت رہے گردش کا ایک محور ہوتا ہے جو ف میں سے گزرنے والا ایک خط ہے جس کا ہر نقطہ ثابت رہتا ہے۔ اگر اُستوار جسم مسلسل حرکت کر رہا ہو تو ہم اس کی حرکت کی تحلیل حسب ذیل طریقہ پر کر سکتے ہیں۔ ہم اُستوار جسم کا ایک متعین نقطہ ف منتخب کرتے ہیں اور حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیتے ہیں جس میں

نقطہ ف مبداء ہوتا ہے اور جو (فریم) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ہمیشہ اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتا ہے۔ اس فریم کے لحاظ سے کسی دو لمحات کے درمیان جسم کی حرکت 'ف' کے گرد گردش کی حرکت ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ وقفہ فرت کی اثناء میں جسم کی گردش 'گردش' کے محور

ف ق کے گرد زاویہ فرطہ ہے۔ تب شرح فرطہ کی انتہا کو جبکہ فرت (۲۸۷)

لا انتہا چھوٹا بنا دیا گیا ہو جسم کی زاویائی رفتار کہتے ہیں۔ اس زاویائی رفتار سے اس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم فی اکائی وقت گھومتا ہے۔ اس لیے کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم کی حرکت کا پورا علم حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل امور معلوم ہونے چاہئیں :

(۱) حوالے کے فریم کے لیے منتخب شدہ نقطہ ف کی رفتار کی سمت اور مقدار

(ب) ف میں سے گزرنے والے گردش کے محور کی سمت

(ج) گردش کے محور کے گرد زاویائی رفتار کی مقدار۔

۲۳۱ — زاویائی رفتار کے ساتھ دو چیزیں وابستہ ہوتی ہیں :

سمت — گردش کا محور — اور مقدار — اس لیے اس کو ایک خط سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ وہ ایک سمتی ہے یعنی یہ کہ

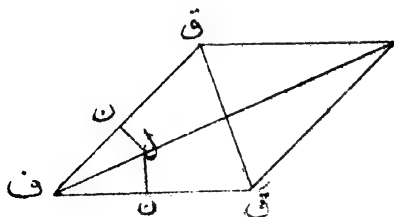
زاویائی رفتاروں کو قانون متوازی الاضلاع کی وجہ مرکب کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم 'ف' کے

گرد گردش کرتا ہے جو (۱)

ایک محور ف ق کے

گرد زاویائی رفتار سے کی



شکل (۱۳۸)

ایک گردش اور (ب) ایک دوسرے محور  $ف ق$  کے گرد زاویائی رفتار سے کی ایک گردش سے مرکب ہے۔ فرض کرو کہ طول  $ف ق$  اور  $ف ق$ ، سہ اور سہ کے متناسب لیے گئے ہیں اور اس لیے خطوط  $ف ق$  اور  $ف ق$ ، اُسی پیمانہ پر زاویائی رفتاروں کی سمتوں اور مقداروں کو تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع  $ف ق م ر ق$  کی تکمیل کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اس کے وتر  $ف م$  پر کوئی نقطہ  $ل$  ہے۔ فرض کرو کہ  $ف ق$  اور  $ف ق$  پر  $ل$  سے عمود  $ل ن$  اور  $ل م$  کھینچے گئے ہیں پہلی زاویائی رفتار کی وجہ سے استوار جسم وقت  $ف ر ت$  میں  $ف ق$  کے گرد زاویہ سہ  $ف ر ت$  میں سے گھومتا ہے۔ اس گردش کا اثر یہ ہوگا کہ جسم کا وہ ذرہ جو ابتدائی پر منطبق تھا مستوی  $ف ل ن$  کے علی القوائم فاصلہ  $ل ن$   $\times$  سہ  $ف ر ت$  میں سے حرکت کرے گا۔ اسی طرح  $ف ق$  کے گرد گردش کا یہ اثر ہوگا کہ وہی ذرہ مستوی کے علی القوائم فاصلہ  $ل ن$   $\times$  سہ  $\times$   $ف ر ت$  میں سے حرکت کرے گا لیکن اُس سمت میں جو پہلی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اس لیے ذرہ کا کل ہٹاؤ

(۲۸۸)

$$ل ن سہ ف ر ت - ل ن سہ ف ر ت \quad (۱۱۶)$$

ہے۔

اب چونکہ  $ل$ ، متوازی الاضلاع کے وتر پر ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث  $ف ل ق$  کا رقبہ، مثلث  $ف ل ق$  کے رقبہ کے مساوی ہے اور اس لیے

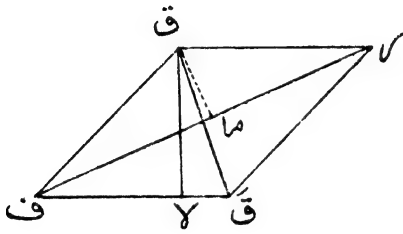
$$ل ن \times ف ق = ل ن \times ف ق$$

نیز چونکہ  $ف ق : ف ق = سہ : سہ$  اس لیے یہ مساوات شکل

$$ل ن \times سہ = ل ن \times سہ$$

میں لکھی جاسکتی ہے اور اس کا مقابلہ مساوات (۱۱۶) کے ساتھ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ  $ل$  کا ہٹاؤ معدوم ہوتا ہے۔

اس لیے مفروضہ دو زاویائی رفتاروں کا حاصل ایک ایسی حرکت ہے کہ نقطے ف اور ل دونوں ساکن رہتے ہیں۔ اس لیے یہ حرکت وہ زاویائی رفتار ہے جس کی گردش کا محور متوازی الاضلاع کا وتر ف س ہے اس کے بعد زاویائی رفتار کی مقدار معلوم کرنی چاہئے۔ فرض کرو کہ یہ مقدار ط سے تعبیر ہوتی ہے۔ ق سے ف ق اور ف س پر عمود ق لا، ق ما کھینچو۔



شکل (۱۳۹)

ذره ق کا ہٹاؤ وقت فرت میں ق ما طاً فرت ہوگا اور یہ ہٹاؤ مستوی کے علی القوائیم ہوگا۔ لیکن اس ہٹاؤ کو ان ہٹاؤں کے مرکب کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے جو

زاویائی رفتاروں سہ، سہ سے پیدا ہوتے ہیں۔ اول الذکر رفتار سے پیدا شدہ ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ ق گردش کے محور پر ہے، او ثانی الذکر سے پیدا شدہ ہٹاؤ ق لا سہ فرت ہے۔ اس لیے

$$(۱۱۷) \quad \text{ق ما} \times \text{طا فرت} = \text{ق لا} \times \text{سہ فرت}$$

$$\text{لیکن} \quad \text{ق ما} \times \text{ف س} = \text{ق لا} \times \text{ف ق}$$

کیونکہ ہر ایک متوازی الاضلاع کے رقبہ کے مساوی ہے، اس لیے اس کو ربط (۱۱۷) کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\text{طا}}{\text{ف س}} = \frac{\text{سہ}}{\text{ف ق}}$$

اس طرح اگر سہ کو ف ق سے تعبیر کیا گیا ہے تو طا اسی پیمانہ پر ف س سے تعبیر ہوگا۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ ایک متوازی الاضلاع ف ق س ق کے اضلاع



ف ق ف ق سے تعبیر شدہ دو زاویائی رفتاروں کا حامل ایک زاویائی رفتار ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر ف سے تعبیر ہوتی ہے۔

پس زاویائی رفتار ایک سمتی ہے اور اس کے وہی خواص ہیں جو تمام سمتیوں کے لیے ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۲۳۲۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گردش کے ایک محور کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں زاویائی رفتار طا ہو تو طا کی بجائے تین زاویائی رفتاریں سم، سم، سم محدودوں کے محوروں کے گرد لی جا سکتی ہیں ایسی کہ

$$(۱۱۸) \quad \text{سم} = \text{ل} \text{ طا، سم} = \text{م} \text{ طا، سم} = \text{ن} \text{ طا}$$

مربع لیکر جمع کرنے سے

$$(۱۱۹) \quad \text{طا}^۲ = \text{سم}^۲ + \text{سم}^۲ + \text{سم}^۲$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ کسی استوار جسم کی حرکت معلوم ہو جاتی ہے

اگر

(۱) نقطہ ف کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط

(ب) زاویائی رفتار کے اجزائے ترکیبی سم، سم، سم

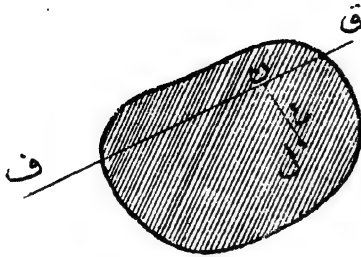
اور

معلوم ہوں۔

## گردش کی توانائی بالحرکت

۲۳۳۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ایک استوار جسم گردش کے ایک محور ف ق کے گرد زاویائی رفتار طا کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور اس کی کمیت ک ہے۔ فرض کرو کہ ف ق پر عمود ل ن کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ع ہے۔



اب ذرہ کی رفتار عطا  
ہے اور اس کی توانائی بالحرکت  
ک ع<sup>۲</sup> طا<sup>۲</sup> ہے۔  
جمع کرنے پر پورے  
جسم کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} (2kE) \text{ طا}^2$$

مائل ہوتی ہے۔

شکل (۱۲۰)

مقدار  $2kE$

(۲۹۰)

کو محور ف ق کے گرد جمود کا معیار کہتے ہیں۔  
اگر ہم مقدار گ داخل کریں ایسی کہ

$$g = \frac{2kE}{2k}$$

یعنی گ<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> کی وہ اوسط قیمت ہے جو جسم کے تمام ذروں پر اوسطاً  
پائی گئی ہے تو گ کو محور ف ق کے گرد گھماؤ کا نصف قطر کہتے ہیں۔  
اب توانائی بالحرکت کو شکل

$$\frac{1}{2} (2kE) \text{ طا}^2 = \frac{1}{2} (k) \text{ گ}^2 \text{ طا}^2$$

میں لکھا جاسکتا ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت وہی ہے گویا کہ جسم کی  
کل کمیت ایک نقطہ جس کا فاصلہ گردش کے محور سے گ ہے مقرر ہے۔

## استوار جسم کی توانائی بالحرکت

۲۳۴ — نقطہ ف اختیاری ہے اور اس لیے فرض کرو کہ یہ وہ نقطہ  
ہے جو جسم کا مرکز ثقل ہے۔ اب جسم کی عام سے عام حرکت (۱) ایک  
حرکت انتقال اور (۲) گردش کی ایک حرکت سے مرکب ہو سکتی ہے۔

حرکت (۱) مرکز ثقل کی حرکت انتقال کے مثل ہے اور حرکت (۲) مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک محور گرد گردش حرکت ہے۔  
 فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار  $و$  ہے، مرکز ثقل میں سے گزرنے والے گردش کے محور سے گرد زاویائی رفتار  $\omega$  اور گھماؤ کا نصف قطر  $گ$  ہے۔  
 فرض کرو کہ جسم کی کل کمیت  $ک = گ$ ۔  
 دفعہ ۱۸۶ کے مسئلہ کی رو سے جسم کی کل توانائی بالحرکت دو اجزاء کا مجموعہ ہے:

(۱) کمیت  $گ$  کے ایک واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو جسم کے مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہو،  
 (ب) مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت۔

جزو (۱) کی قیمت  $\frac{1}{2} گ و^2$  ہے اور جزو (ب) کی  $\frac{1}{2} گ \omega^2 ط^2$  پس مجموعی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2} گ (و^2 + گ^2 ط^2)$  (۱۲۰)

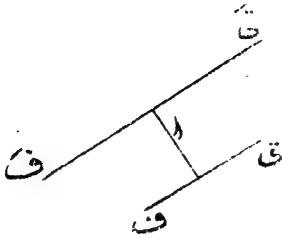
ہے۔ یہ جملہ خود بڑی اہمیت رکھتا ہے لیکن یہ اس وجہ سے بھی دلچسپ ہے کہ اس کی مدد سے حسب ذیل مسئلہ ثابت کیا جاسکتا ہے۔

۲۳۵۔ مسئلہ۔ فرض کرو کہ مرکز ثقل میں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر  $گ$  ہے اور فرض کرو کہ اس گھماؤ کے محور سے فاصلہ  $ل$  پر کے ایک متوازی محور کے گرد گھماؤ کا محور  $گ$  ہے تو

$گ^2 = گ^2 + ل^2$

فرض کرو کہ مرکز ثقل میں سے گزرنے والا کوئی محور  $ق$  ہے اور فرض کرو کہ اس محور سے فاصلہ  $ل$  پر کوئی متوازی محور  $ق'$  ہے۔

فرض کرو کہ  $ق ق$  کے گرد استوار جسم گردش کی حرکت رکھتا ہے اور ایسی زاویائی رفتار ط ہے۔



شکل (۱۴۱)

اب  $ق ق$  کی رفتار  $ا$  ط ہے اور حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب خیال کیا جاسکتا ہے (۱) رفتار  $ا$  ط کی حرکت انتقال اور (۲) محور  $ق ق$  کے گرد

گردش ط کی حرکت۔ ضابطہ (۱۲۰) کی رو سے توانائی بالحرکت ہے

نیز وہ  $\frac{1}{2} ک گ ط + \frac{1}{2} ک ط گ$  کے مساوی بھی ہے جہاں  $گ ق$  کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے

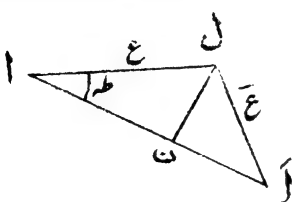
$$\frac{1}{2} ک گ ط = \frac{1}{2} ک (ا ط + گ ط)$$

اور  $\frac{1}{2} ک ط ا$  سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۳۶۔ متبادل ثبوت۔ اس مسئلہ کو ہندسی طور پر بھی

ثابت کیا جاسکتا ہے :

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ  $ل$  ہے اور فرض کرو کہ شکل (۱۴۲) کا مستوی



شکل (۱۴۲)

وہ مستوی ہے جو  $ل$  میں سے گزرتا ہے اور گردش کے دو محوروں کے علی القوائم ہے اور یہ محور مستوی کو علی الترتیب نقطوں  $ا$ ،  $ب$  پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ  $ل = ا$ ،  $ع = ب$ ،  $ل = ا$  اور فرض کرو کہ  $ل = ب$

۱۱) پرعمود کھینچا گیا ہے۔ تب گ گ<sup>۱</sup> = ح ک ع<sup>۲</sup> اور نیز

ک گ = ح ک ع

$$= \sum_k (e_k + 1 - \alpha_k - \beta_k) \times \alpha_k \times \beta_k$$
$$= \text{گ گ} + \text{ک} \times (\text{ا} - \text{آ}) + (\text{ح} \times \text{ن})$$

اب ان خط ۱۱ پر اس خط کا ظل ہے جو ل سے مرکز ثقل تک

کھینچا گیا ہے۔ اس لیے  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  اور اس لیے

$$k \cdot k = k + k + k + \dots + k$$

$$گ^۲ = \frac{ح ک ع'}{ح ک} = \frac{ک (بہ فرلا) لا'}{ک (بہ فرلا)} = \frac{۳}{۱} = \frac{۳}{۱} = \frac{۳}{۱}$$

اس لیے گھاؤ کا نصف قطر  $\frac{۱}{۳}$  ہے۔

مرکز ثقل کے گرد جس کا فاصلہ ۱ سے ۱ ہے گھاؤ کا نصف قطر

$$گ^۲ = \frac{۳}{۱} = ۱ - ۱ = \frac{۲}{۳}$$

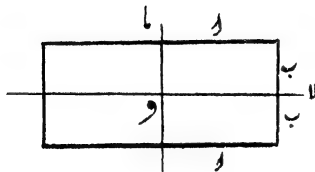
سے حاصل ہوگا اور اس لیے مرکز ثقل کے گرد گھاؤ کا نصف قطر  $\frac{۱}{۳}$  ہے۔

۲۳۹۔ مستطیلی پترا۔ فرض کرو کہ پترے کے کنارے ۱، ۲، ۳، ۴

ہیں اور ہم اس محور کے گرد گھاؤ کا نصف قطر معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کے مستوی پر عمود ہے۔ شکل (۱۳۴) کے مطابق محور ۱ اور فرض کرو کہ فی اکائی رقبہ کمیت ۱ ہے۔ تب

$$گ^۲ = \frac{ح ک ع'}{ح ک} = \frac{ک (بہ فرلا فرما) (لا' + ما')}{۱ + ۲ + ۳ + ۴}$$

(۲۹۳) تکمیل پورے پترے پر لینا چاہئے اور اس لیے حدود لا = ۱ سے لا = ۱ - ۱ = ۰  
۱ = ب سے ما = ب تک ہیں۔



شکل (۱۳۴)

$$گ^۲ = \frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴}{۳}$$

ب = ۰۔ لینے پر پترا ایک

پتلا ڈنڈا ہو جاتا ہے اور نتیجہ وہی

حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا۔

۲۴۰۔ متجانش ہوس ناقص نما۔ فرض کرو کہ ناقص نما کے نیم

محور 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں اور فرض کر دو کہ ہم محور اعظم کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرتے ہیں۔ ناقص نما کے صدر محوروں کو محدودوں کے محور لینے سے اور ناقص نما کی کثافت کو غہ سے تعبیر کرنے پر حاصل ہونا ہے

$$\frac{\text{میں میں (غہ فلا فرما فری) (ما + ی)} }{\text{میں میں غہ فلا فرما فری}} = \frac{\text{ک ع}}{\text{ک}} = \text{گ}$$

جہاں تکمیل ناقص نما کے پورے حجم پر لیا گیا ہے۔ تکملات کی تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\frac{ب^۲ + ج^۲}{۵} = گ^۲$$

## مثالیں

۱۔ ایک ڈنڈا ۱۲ انچ لمبا ہے۔ اُس نقطہ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک سرے سے ۴ انچ ہے۔

۲۔ ایک دائری قرص کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو:

(۱) اس محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کے

مستوی بر عمود ہو

(ب) ایک قطر کے گرد۔

۳۔ ثابت کرو کہ نصف قطر  $r$  کے ایک گروہ کا گھماؤ کا نصف قطر کسی قطر کے

گرد  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  ہے اور کسی مماس کے گرد  $\sqrt{\frac{4}{5}}$  ہے۔

۴۔ ایک مکعب کا گھاؤ کا نصف قطر ایک کنارے کے گرد معلوم کرو۔

۵۔ ایک مربع پتے کا گھاؤ کا نصف قطر ایک وتر کے گرد معلوم کرو۔





ایک سکہ ایک مائل مستوی پر لڑھکتا ہے۔ کسی فاصلے کے بعد اس کی رفتار اور نیز اس کا اسراع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سیکے کو ایک یحساں دائری قرص سمجھا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر  $r$  ہے۔ جب اس کی رفتار مستوی کے نیچے  $v$  ہوتی ہے تو اس کی زاویائی رفتار  $\frac{v}{r}$  ہوگی۔ گردش کا محور سکہ کے مستوی پر عمود ہے۔

اس کے تشاکل کے نیم محور  $r$  ہوں گے جبکہ اس کو پتہ سمجھا جائے۔ مرکز میں سے گزرنے والے گردش کے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر راوتہ کے قاعدے کی بموجب

$$g^2 = \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{4r^2 + 1}{1}$$

ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} k [v^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2] = \frac{3}{4} k v^2$$

ہے۔ مستوی کے نیچے فاصلہ  $s$  تک لڑھکنے کے بعد سکہ کا مرکز ثقل فاصلہ  $s$  جب  $E$  تک گر چکتا ہے اور اس لیے توانائی کے بقا کے اصول سے

$$k \cdot \frac{3}{4} v^2 = \frac{3}{4} k v^2$$

اور اس لیے رفتار مساوات

$$v^2 = \frac{4}{3} s$$

سے حاصل ہوگی۔

ضابطہ (۴۸) سے مقابلہ کیا جائے یعنی  $v^2 = 2 s$   $E$  سے  $(E = \text{اسراع})$

جہاں حرکت یکساں اسراع کے تحت ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ سکہ مستوی کے نیچے  
یکساں اسراع  $\frac{1}{2}g$  جب  $g$  کے ساتھ لڑھکتا ہے۔

## مثالیں

(۲۹۵)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک حلقہ کا اسراع جو میلان  $\theta$  کی ایک پہاڑی پر سے  
نیچے لڑھک رہا ہے  $\frac{1}{2}g \sin \theta$  جب  $\theta$  ہے۔

۲۔ لو کو موٹے پہیوں کے ایک جوڑے کا اسراع معلوم کرو جو ۵۰ میں اڑھائی  
نیچے دوڑ رہے ہیں، ہر پہیہ میں ایک سا موٹائی کی ایک کور اور آٹے لگے  
ہوئے ہیں، کور کا وزن آڑوں کے وزن کا ڈگنا ہے اور محور کا وزن ایک پہیہ کے  
وزن کا نصف ہے۔ (محور کی موٹائی نظر انداز کرو)۔

۳۔ دو سیکل سوار جن کی سیکلیں ایک دوسرے کے ٹھیک مشابہ ہیں ایک  
پہاڑی کے نیچے اس کی چوٹی سے مساوی رفتاروں کے ساتھ حرکت کی ابتدا کر کے  
اترتے ہیں۔ رگڑ کی قوتوں اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ زیادہ  
بھاری سوار پہاڑی کے دامن میں پہلے پہنچے گا۔

۴۔ ایٹوڈ مشین کی چرخی کمیت  $k$  کی ایک ایکساں قرص ہے۔  
اگر کمیتیں  $k_1, k_2, k_3$  دوری کے سروں سے لٹکائی جائیں تو ثابت کرو کہ کم اسراع  
 $k_1 - k_2 - k_3$

$$k_1 + k_2 + k_3$$

ہے۔

۵۔ دو گڑے جن میں سے ایک کھوکھلا خول ہے اور دوسرا متجانس  
ٹھوس پہاڑی کی چوٹی سے ایک ساتھ حالت سکون سے نکل کر باہم پہاڑی کے  
نیچے لڑھکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ راستے کے کسی حصہ پر ان کے اوقات ۵ : ۳۱۶  
کی نسبت میں ہوں گے۔

۶۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں کی کمیتوں کو کو رپر جمع شدہ فرض کیا جائے  
تو ثابت کرو کہ گاڑی کی توانائی جبکہ وہ رفتار  $v$  کے ساتھ حرکت کر رہی ہو  $\frac{1}{2}mv^2$  کی

ہے جہاں ک پوری گاڑی اور پہیوں کے وزنوں کا مجموعہ ہے۔  
 ۷۔ یکساں تار کے ایک سیدھے ٹکڑے کو ایک سرے پر انصافاً استاد کیا گیا اور گرنے چھوڑ دیا گیا۔ وہ کس رفتار سے زمین سے ٹکرائے گا۔  
 ۸۔ سگار کی شکل کا ایک متجانس ٹھوس کرہ نا (نیم محور) اور ب (اس کی نوک کے بل ایک افقی مستوی پر استادہ کیا گیا اور لڑھکنے کے لیے چھوڑ دیا گیا۔ اسکی زاوئی رفتار معلوم کرو جبکہ اس کے محور اصغر کا مرکز مستوی کے ساتھ تماس میں ہو اور اس لمحہ پر مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو۔

## معیار حرکت کا معیار

۲۴۲۔ فرض کرو کہ کیت ک کے کسی ذرہ کے محدود لا، ما، ہی ہیں۔ فرض کرو کہ کل حاصل قوت کے جو ذرہ پر عمل کرتی ہے اجزائے ترکیبی لا، ما، ہی ہیں۔ تب حرکت کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

$$ک = \frac{فر٢}{لا} = لا$$

$$ک = \frac{فر٢}{ما} = ما$$

$$ک = \frac{فر٢}{ہی} = ہی$$

ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا معیار محور لا کے گرد ما، ہی، ما ہے (۲۹۶) اور اوپر کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ما، ہی، ما = ک \left( \frac{فر٢}{ہی} - \frac{فر٢}{ما} \right) \quad (۱۲۱)$$

ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی  $\frac{فر٢}{لا}$ ،  $\frac{فر٢}{ما}$ ،  $\frac{فر٢}{ہی}$  ہیں اور اس لئے

اس رفتار کا معیار محور لا کے گرد حسب تعریف دفعہ (۲۱۹)

$$\text{ما} = \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} - \frac{\text{ی}}{\text{وقت}} \text{ فرما}$$

ہے۔ ذرہ کا معیار حرکت اس کی رفتار کا ک گنا ہے اور اس لیے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد، رفتار کے معیار کا ک گنا ہے اور اس لیے

$$\text{ک} = \left( \text{ما} = \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} - \frac{\text{ی}}{\text{وقت}} \text{ فرما} \right)$$

ہے۔ تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے :

$$\text{وقت} = \left[ \text{ک} = \left( \text{ما} = \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} - \frac{\text{ی}}{\text{وقت}} \right) \right]$$

$$= \left[ \left( \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} \right) - \left( \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} \right) \right] = \left[ \frac{\text{فرما}}{\text{وقت}} + \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} \right]$$

$$= \text{ک} = \left( \text{ما} = \frac{\text{فری}}{\text{وقت}} - \frac{\text{ی}}{\text{وقت}} \right)$$

(۱۲۲)

= ماے - ی ما

مساوات (۱۲۱) سے -

پس ہم نے ثابت کر دیا کہ

کسی محور کے گرد ایک ذرہ کے معیار حرکت کے معیار کی تبدیلی کی شرح، اسی محور کے گرد اس معیار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا ہے۔

۲۴۳ — مساوات (۱۲۲) 'اجسام کے کسی نظام کے ہر ذرہ کے لیے درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم تمام ذروں کے لیے ایسی مساواتیں معلوم

کرتے ہیں اور ان کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرت} [\text{حک} (\text{ما فرتی} - \text{ی فرتا})] = \text{ح} (\text{ماے} - \text{ی ما})$$

(۱۲۳)

اس مساوات کی بائیں جانب وہ جملہ ہے جو جسم پر یا اجسام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اندرونی قوتیں مساوی اور مخالف قوتوں کے جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور (۲۹۷) اس لیے اس کا جملہ بالائیں کوئی حصہ نہیں ہے۔

جملہ  $\text{حک} (\text{ما فرتی} - \text{ی فرتا})$  کو جو جداگانہ ذرات کے

معیار حرکت کے معیاروں کا مجموعہ ہے نظام کے معیار حرکت کا معیار کہتے ہیں۔

اس طرح مساوات (۱۲۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی محور کے گرد کسی نظام کے معیار حرکت کے معیار میں تبدیلی کی شرح، اس محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۲۲۔ اس مسئلہ سے متعدد اہم نتیجے نکلتے ہیں :

۱۔ اگر اجسام کے کسی نظام پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو ہر محور کے گرد معیار حرکت کا معیار مستقل رہتا ہے۔  
اس سے وہ اصول بیان ہوتا ہے جس کو زاوی معیار حرکت کا بقا کہتے ہیں۔  
اس کی ایک مثال سورج سے ہیا ہوتی ہے جس کے متعلق علایہ فرض

کیا جاسکتا ہے کہ اس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں۔ بالعموم یہ فرض کیا جاتا ہے کہ سورج جہم میں شکر رہا ہے، اگر ایسا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے محور کے گرد اس کی گردش کی رفتار مسلسل بڑھتی چلائے تاکہ اس کا معیار حرکت کا معیار مستقل رہ سکے۔

۲۔ اگر ایک نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں ایک دے ہوئے خط کے متوازی ہوں یا اس خط کو قطع کریں تو نظام کا معیار حرکت کا معیار اس خط کے گرد مستقل رہنا چاہئے۔

ایک لٹو پر صرف کیل پر کا تعامل اور جاذبہ عمل کرتے ہیں۔ ثانی الذکر کا معیار لٹو کے کیل میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد معدوم ہوتا ہے اور اول الذکر کا معیار تقریبی طور پر معدوم فرض کیا جاسکتا ہے اس لئے لٹو کے کیل میں سے گزرنے والے خط کے گرد معیار حرکت کا معیار مستقل رہے گا، تقریبی طور پر۔

۳۔ اگر ایک استوار جسم ایک ثابت محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہو اور اگر کسی لمحہ پر اس کی زاویائی رفتار سے ہو تو

$$k^2 = \frac{I}{m} \quad \text{خبر}$$

جہاں  $k^2$ ، ثابت محور کے گرد جمود کا معیار ہے اور  $I$  اس محور کے گرد تمام بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ہے۔

اس کی تصدیق کے لیے صرف یہ دیکھنا ضروری ہے کہ کیت ک کا ایک ذرہ جو محور سے فاصلہ  $f$  پر ہے معیار حرکت  $k^2 f$  سے رکھتا ہے اور اس لیے پورے نظام کے معیار حرکت کا معیار  $\sum k^2 f^2 = k^2$  سے

ہوگا اور چونکہ گ اور گ<sup>۲</sup> وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتے اس لیے زاویہ معیاً حرکت کی تبدیلی کی شرح گ گ<sup>۲</sup> فرسہ فرت ہوگی۔

### رقاص کا اہتزاز

۲۴۵۔ پچھلے مسئلہ کا ایک اہم اطلاق یہ ہے کہ کسی قسم کے رقص کے اہتزاز کا وقت معلوم کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ وہ نصاب ہے جس کے گرد رقص گردش کرتا ہے، فرض کرو کہ اس کا مرکز ثقل د ہے اور د = دھ اور فرض کرو کہ خط د ث انتصابی کے ساتھ کسی لمحہ پر زاویہ طہ بناتا ہے اور اس لیے رقص کی زاویہ رفتار اس کے محور کے گرد سہ = فرطہ ہے۔

فرض کرو کہ پورے رقص کی کمیت گ ہے اور گردش کا نصف قطر اس کے محور کے گرد گ ہے۔

اب حرکت کی مساوات ہے

$$گ گ^۲ = \frac{فرسہ}{فرت} = ل$$

جس میں سہ = فرطہ، ل کی قیمت

و میں سے گزرنے والے محور کے گرد

وزن کے معیار کے مساوی ہے اور اس لئے گ ج ہ جب طہ کے مساوی ہے۔

اس لئے حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے

$$گ گ^۲ = \frac{فرسہ}{فرت} = گ ج ہ جب طہ$$



شکل (۱۴۶)

یا  $\frac{گ^۲}{\frac{فر۲}{ت^۲}} = ج جب ط$   
 طول ل کے سادہ رقا ص کے لیے حرکت کی مساوات

(۲۹۹)

ل  $\frac{فر۲}{ت^۲} = ج جب ط$   
 ہے اور اس لیے مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت وہی ہے جو طول  
 $ل = \frac{گ^۲}{\frac{فر۲}{ت^۲}}$  کے سادہ رقا ص کی ہوتی ہے۔

مثلاً چھوٹے اہتر اذوں کا مکمل دور

$$\frac{ل}{ج} \sqrt{\pi^۲} = \frac{ل}{ج} \sqrt{\pi^۲}$$

۴۔

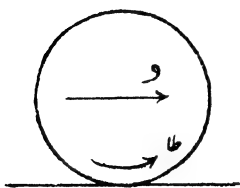
## توضیحی مثال

ایک انگوٹھی ایک میز پر انتصاباً استادہ ہے اور اس کے  
 ایک نقطہ پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ اس طریقہ پر ڈالا گیا  
 ہے کہ جس نقطہ پر انگوٹھی میز کو

مس کرتی ہے اس کے میز پر  
 پھسلنے سے توازن ٹوٹتا ہے۔

انگوٹھی کی وقوع پذیر حرکت معلوم

کرو۔



شکل (۱۴۷)



مثال (۲) صفحہ ۱۵۸ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ متذکرہ معدر طریقہ پر دباؤ ڈالنا ممکن ہے۔  
 فرض کرو کہ انگوٹھی جب اُٹھتی ہو جھوڑتی ہے تو یہ مشاہدہ کیا گیا کہ انگوٹھی رفتار  
 و کے ساتھ آگے حرکت کرتی ہے اور گردش طے کے ساتھ اُس سمت کے مخالف  
 گھومتی ہے جس میں وہ گھومتی اگر بغیر پھسلے وہ ٹوٹھکتی۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر رفتار اور  
 گردش کی قیمتیں و اور سہ ہیں جن کی پیمائش علی الترتیب و اور طے کی سمتوں میں  
 کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ انگوٹھی کا نصف قطر ۱ اور کیت ک ہے۔ اس پر عمل کرنیوالی  
 قوتیں حسب ذیل ہیں:

- (۱) اس کا وزن ک ج ،  
 (ب) میز کے ساتھ اس کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی جو ک ج کے  
 مساوی ہے کیونکہ انگوٹھی کا مرکز ثقل کوئی انتصابی اسراع نہیں  
 رکھتا،  
 (ج) انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ پر فر کی تعامل جو ک ج مہ کے  
 مساوی ہے جب تک کہ پھسلن واقع ہوتی ہے۔  
 دفعہ (۱۸۰) کے مسئلہ کی رو سے

$$ک \frac{فر}{زنت} = - ک ج مہ \quad (۱)$$

ہم ایک اور مساوات دفعہ ۲۴۳ کے مسئلہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔  
 فرض کرو کہ لمحہ ت پر انگوٹھی کا جو محور ہے اس کو ہم محور لیتے ہیں۔ اس لمحہ پر  
 جمود کا معیار ک ۱ ہے۔ معیار حرکت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ہم کل  
 حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب سمجھتے ہیں: (۱) مرکز ثقل کی حرکت انتقال  
 (رفتار و) اور (۲) مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد گردش  
 کی حرکت (رفتار سہ)۔ اول الذکر کا کوئی اثر معیار حرکت کے معیار پر نہیں ہے  
 اور اس لیے معیار حرکت کا کل معیار

ک ۱<sup>۲</sup> سے

ہے۔ چھوٹے وقفے فرت کے ختم پر انگوٹھی فاصلہ و فرت تک آگے حرکت کر چکی ہوگی اور اس لیے اب ہم ایک ایسے محور کے گرد جمود کے معیار پر غور کر رہے ہیں جو انگوٹھی کے مرکز ثقل سے فاصلہ و فرت پر ہے اور اس لیے حسب دفعہ ۲۳۵ وقفہ فرت کے بعد جمود کا معیار

ک [ ۱<sup>۲</sup> + (و فرت) ]

ہے۔ لیکن ہم دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار (فرت) کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور جمود کے معیار کو مستقل اور ک ۱<sup>۲</sup> کے مساوی سمجھ سکتے ہیں۔ اس لیے معیار حرکت کے معیار کے اضافہ کی شرح ک ۱<sup>۲</sup> فرسہ ہے۔

بیرونی قوتوں کا معیار اُس محور کے گرد اور اُسی سمت میں  
ک ج مہ ۱

ہے اور اس لیے مساوات

$$(ب) \quad ک ۱^۲ \frac{فرسہ}{فرت} = - ک ج مہ ۱$$

$$(ج) \quad یا \quad ۱ \frac{فرسہ}{فرت} = - مہ ج$$

حاصل ہوتی ہے اور مساوات (۱)

$$(د) \quad فرد \frac{فرسہ}{فرت} = - مہ ج$$

میں تبدیل ہوتی ہے۔

ان رشتوں سے و اور مہ کے گھٹاؤ کی شرحیں حاصل ہوتی ہیں جب تک پھسلن واقع ہو رہی ہو۔ مریکا پھسلن رک جاتی ہے جوں ہی د + مہ ۱ = کیونکہ

و + سہ ۱، انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ کی آگے دار رفتار ہے۔ مساواتوں (ج) اور (د) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرز}{وزن} = (و + سہ ۱) = ۲ - سہ ج$$

اور ابتداً و + سہ ۱ کی قیمت و + طا ۱ ہے۔ اس لیے و + ۱ کو صفر میں تحویل ہونے کے لیے وقت

$$و + طا ۱$$

$$۲ - سہ ج$$

مطلوب ہے۔ اس وقفہ کے بعد پھسلن رک جاتی ہے۔ اس لمحہ پر انگوٹھی کی رفتار و حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے:

$$و = و - سہ ج \left( \frac{و + طا ۱}{۲ - سہ ج} \right)$$

$$= \frac{۱}{۲} (و - طا ۱)$$

اس لیے حرکت آگے دار یا پیچھے دار ہوگی بموجب اس کے کہ ابتدائی رفتار و < یا > طا ۱۔ پھسلن ایک دفعہ رک جانے کے بعد اس کو پھر شروع کرنے کے لئے کوئی قوت نہیں ہے اور اس لیے انگوٹھی صرف یکساں رفتار و کے ساتھ لڑھکی جائے گی۔ اگر و < طا ۱ تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت سے دور لڑھکی جائے گی لیکن اگر و > طا ۱ تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت پر واپس آئے گی۔

## مثالیں

(۳۰۱)

- ۱۔ ایک دروازہ کے قبضوں کا خط انصافی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور دروازہ اپنے توازن کے محل کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی حرکت وہی ہے جو ایک خاص سادہ رقاص کی ہے، اس رقاص کا طول معلوم کرو۔
- ۲۔ ایک نشانہ دہات کی ایک مربع تختی سے بنا ہے جس کا کنارہ ۱ اور

کمیت گ ہے۔ اس کے بلند ترین کنارہ پر قبضہ لگا ہوا ہے اور یہ کنارہ افقی ہے۔ نشانہ کی مسکون کی حالت میں اس پر ایک گولی کی ضرب پڑتی ہے جس کی کمیت ک ہے اور جو رفتار و کے ساتھ حرکت کرتی ہوئی نشانہ کے ایک ایسے نقطہ لگتی ہے جو قبضوں کے خط کے نیچے گہرائی گ پر ہے۔ نشانہ کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔

۳۔ ایک تجانس کرہ کو بغیر گردش کے ایک کھردرے مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے، مستوی کا میلان ع ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جس کی انشاء میں کرہ مستوی پر چڑھتا ہے وہی ہے جو ہوتا اگر مستوی چکنا ہوتا، نیز ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں کرہ پھسلتا ہے اس وقت کے ساتھ جس میں وہ لڑھکتا ہے نسبت ۲ مس ع : ۱ سہ رکھتا ہے۔

۴۔ نصف قطر ۱ کا ایک کرہ، نصف قطرب کے ایک کرہ کی پیالے کی مقعر سطح پر کے ایک نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ اس کو اچانک آزاد چھوڑ کر سطح پر نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ ان دو کرہوں کے مرکزوں کو ملنا خط اسی طریقہ پر چھوٹتا ہے جس طرح طول ۵ (ب۔ ۱) کا ایک سادہ رقا ص۔ ۵۔ نصف قطر ۱ کے ایک کرہ کو نصف قطرب کے ایک کرہ کی کھردری محدب سطح کے بلند ترین نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ پھر اس کو آزاد چھوڑ کر اس کو کرہ کی سطح کے نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ کرے جدا ہوں گے جبکہ ان کے مرکزوں کو ملانے والا خط انصافی کے ساتھ زاویہ  $\frac{1}{2}\pi$  بنائے۔ صورت ب = ۰ کا امتحان کرو۔

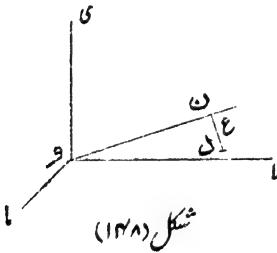
۶۔ ایک دائری حلقہ ایک چکنے افقی مستوی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے، اس پر ایک چھوٹی انگوٹھی جس کی کمیت حلقہ کی کمیت کا  $\frac{1}{n}$  واں حصہ ہے پھسلتی ہے اور ان دونوں کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ابتداً حلقہ ساکن تھا اور انگوٹھی حلقہ کے گرد زاویہ رفتار سہ کے ساتھ حرکت کر رہی تھی ثابت کرو کہ انگوٹھی وقت  $\frac{n+1}{n}$  کے بعد حلقہ کے لحاظ سے ساکن ہو جائے گی۔

## جمود کے معیاروں کی عام نظریہ

### جمود کے سر

۲۲۶ — فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور کے گرد گردش کر رہا ہے اور گردش کے محور کی سمتی جیوب ال تمام کسی تین ثابت محوروں کے حوالے سے ل، م، ن ہیں۔ فرض کرو کہ گردش کے محور پر کوئی نقطہ و مبدا لیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ل، کیت کم کا کوئی ذرہ ہے جس کا فاصلہ گردش کے محور سے ع ہے۔ فرض کرو کہ ل کے محدود لا، ما، ی ہیں اور ل ن (= ع) ل سے گردش کے محور پر عمود ہے۔

(۳۰۲)



چونکہ  
 $ول^۲ = لا^۲ + ما^۲ + ی^۲$   
 اور  $ون^۲ = (ل + لا + م + ن ی)^۲$   
 ایسے  $ع^۲ = ول^۲ - ون^۲$

$$= لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ - (ل + لا + م + ن ی)^۲$$

$$= لا^۲ (م + ن)^۲ + ما^۲ (ن + ل)^۲ + ی^۲ (ل + م)^۲$$

$$- ۲م ن لا - ۲ن ل ما - ۲ل م لا$$

$$= ل (ما^۲ + ی^۲) + م (د ی^۲ + لا^۲) + ن (لا^۲ + ما^۲)$$

$$- ۲م ن لا - ۲ن ل ما - ۲ل م لا$$

پس جمود کا معیار م، مساوات

$$م = ح ک ع^۲$$

$$= \text{ل} \text{ح} \text{ک} (ا + ی) + \text{م} \text{ح} \text{ک} (ی + لا) + \text{ن} \text{ح} \text{ک} (لا + ا) =$$

$$- \text{م} \text{ن} \text{ح} \text{ک} \text{م} \text{ای} - \text{ن} \text{ل} \text{ح} \text{ک} \text{ی} \text{لا} - \text{ل} \text{م} \text{ح} \text{ک} \text{لا} \text{ا}$$

$$= \text{ل} (ا + م + ب + ن + ج - \text{م} \text{ن} - \text{د} - \text{ن} \text{ل} - \text{ع} - \text{ل} \text{م} - \text{ف})$$

(۱۲۴) - - - - -

سے حاصل ہوگا جہاں

$$1 = \text{ل} \text{ح} \text{ک} (ا + ی) \text{ وغیرہ}$$

$$- \text{د} = \text{ل} \text{ح} \text{ک} \text{م} \text{ای} \text{ وغیرہ}$$

یہ معلوم ہوگا کہ مقداریں ۱، 'ب'، 'ج' علی الترتیب محوروں لا، 'ا'، 'ی'

کے گرد جمود کے معیار ہیں۔ مقداروں 'د'، 'ع'، 'ف' کو جمود کے

حاصل ضرب کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۴) میں 'ل'، 'م'، 'ن' کو مختلف قیمتیں دینے سے وہیں سے گزرنے والے کسی خط کے گرد جمود کا معیار معلوم ہو سکتا ہے جب کہ چہ سروں ۱، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع'، 'ف' کی قیمتیں معلوم ہو جائیں۔

جمود کا ناقص نما

۲۴۶ - مساوات

۱) لا + ب + ا + ج + ی - ۲ - مای - ۲ - ع ی لا - ۲ - ف لا = گ  
جہاں گ کوئی مشتقل ہے ایک مخروطی نا کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ وہ دوسرے  
درجہ کی مساوات ہے۔ اگر سمتی جیوب التمام 'ل'، 'م'، 'ن' کا سمتی نیم قطر  
رہو تو

ر (ا ل + ب م + ج ن - ۲ د م - ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م) = ک  
یا مساوات (۱۲۴) سے

$$\frac{ک}{ر} = ۲ \quad (۱۲۵)$$

(۳۰۳) چونکہ ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے م مثبت ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سستی نیم قطر کی تمام سمتوں کے لیے ر مثبت ہے۔ اس لیے محروطی نما، ایک ناقص نما ہے۔  
اس ناقص نما کو نقطہ و کا جمود کا ناقص نما کہتے ہیں۔  
مساوات (۱۲۵) کو لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{ک}{ر} = م$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ و میں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد جمود کا معیار، جمود کے ناقص نما کے متوازی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

### جمود کے صدر محاور

۲۴۸ — ناقص نما کی اس طبعی خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ناقص نما خود وہی رہتا ہے خواہ محدودوں کے محور کوئی بھی منتخب کئے جائیں۔ ناقص نما کے تین صدر محور ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ ان محوروں کی سمتوں کو نقطہ و پر جمود کے صدر محاور کہا جاتا ہے۔

اگر نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کو محدودوں کے محور لیا جائے تو ناقص نما کی مساوات میں مای، ی لا، لا م کے سرعائب ہونے چاہئیں اس لیے

د = ع = ف = ۰  
پس و پر جمود کے صدر محوروں کو محدودوں کے محور لینے سے مساوات

(۱۲۴) شکل ذیل اختیار کرتی ہے:

م = ل<sup>۱</sup> + م<sup>۲</sup> + ب<sup>۳</sup> + ن<sup>۴</sup> ج  
زاویہ رفتار طا کی گردش کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{4} م طا = \frac{1}{4} (ل^۱ + م^۲ + ب^۳ + ن^۴) طا$$

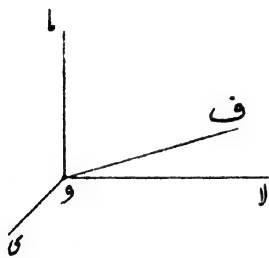
$$= \frac{1}{4} (ل^۱ س^۱ + ب^۲ س^۲ + ج^۳ س^۳) \quad (۱۲۶)$$

ہے جہاں طا کے اجزائے ترکیبی س<sup>۱</sup>، س<sup>۲</sup>، س<sup>۳</sup> ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۲)۔

## اُستوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں

(۳۰۴)

۲۴۹۔ فرض کرو کہ اُستوار جسم کا کوئی نقطہ و ہے اور فرض کرو کہ ولا، و م، وی محوروں کا ایک جٹ ہے جو حرکت کرتا ہے اس طریقہ کہ نقطہ و اُستوار جسم میں اپنا محل قائم رکھتا ہے اور محاور اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں۔



شکل (۱۲۹)

فرض کرو کہ و کی رفتار کے

اجزائے ترکیبی ان محوروں پر

ع، د، ط ہیں۔ ان محوروں

کے لحاظ سے اُستوار جسم کی حرکت

کسی محور و ف کے گرد جو و

میں سے گزرے گردش کی

حرکت ہوگی۔

فرض کرو کہ یہ گردش تین محوروں کے گرد گردشوں س<sup>۱</sup>، س<sup>۲</sup>، س<sup>۳</sup> سے مرکب ہے۔

فرض کرو کہ ان محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کے کسی نقطہ کے





۔ ' - سہ لای - سہ لا ما

ہیں - اسی طرح گردشوں سہا، سہی سے جو رفتاریں حاصل ہوتی ہیں ان کے اجزائے ترکیبی

سہ لای - ' - سہ لا

اور - سہی ما - سہی لا -

ہیں -

ان رفتاروں کو مرکب کرنے سے حاصل رفتار کے اجزائے ترکیبی متذکرہ محوروں کے لحاظ سے حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \text{سہ لای} - \text{سہی ما}$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} = \text{سہی لا} - \text{سہ لای}$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} = \text{سہ لا} - \text{سہ ما}$$

اس طرح

$$\text{ما فری} - \text{ی فر ما} = \frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} (\text{ما} + \text{ی}) - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} (\text{سہ لا} - \text{سہ لای})$$

اور ت کے لحاظ سے اس مساوات کو تفرق کرنے پر مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے ایک حصہ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے :

$$\frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} \text{ک} (\text{ما فری} - \text{ی فر ما})$$

$$= \frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} \text{ک} (\text{ما} + \text{ی}) - \frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} \text{ک} \text{لا ما فری} - \frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} \text{ک لای فری}$$

$$- \frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} \text{ک مای} (\text{سہ لا} - \text{سہی}) + \frac{\text{فری}}{\text{فر ت}} \text{ک} (\text{ما} - \text{ی}) \text{سہ سہی}$$

$$- \text{حک ی لاسہ سہ} + \text{حک لا ماسہ سہ}$$

$$= \text{ا} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ف} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ع} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$$

$$- \text{د} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ب} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ج} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{سہ سہ سہ}$$

$$+ \text{ف سہ سہ سہ}$$

۲۵۱۔ فرض کرو کہ استوار جسم کے مرکز ثقل کے محدد 'لا'، 'ما'، 'ی' ہیں (۳۰۶)

اور اس کی کل کمیت گ ہے۔ اب

حک لا = گ 'لا' وغیرہ  
اس لیے مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے بقیہ حصہ کی قیمت حسب ذیل ہے:

$$\text{فرت} \text{ حک} (\text{ماط} - \text{یو}) = \text{فرت} (\text{گ ماط} - \text{گ یو})$$

$$= \text{گ} \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} (\text{ماط} - \text{یو})$$

پس مساوات (۱۲۷) حسب ذیل شکل اختیار کرتی ہے:

$$\text{گ} \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} (\text{ماط} - \text{یو}) + \text{ا} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ف} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$$

$$- \text{ع} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{د} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ب} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{ج} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - \text{سہ سہ سہ}$$

$$- \text{ع سہ سہ سہ} + \text{ف سہ سہ سہ} = \text{ل} \quad (۱۲۸)$$

اگر محوروں پر کل اجزائے ترکیبی 'لا'، 'ما'، 'ی' سے



تفرق کرنا اور اس سے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ وغیرہ}$$

اخذ کرنا درست نہیں ہے۔ تاہم یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ آخری نتیجہ زیر بحث لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ و میں سے گزرنے والا کوئی خط وق سے تعبیر ہوتا ہے، فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے لحاظ سے اس خط کی سمتی جیوب التمام جم ع، جم بہ، جم جہ ہیں اور فرض کرو کہ وق کے گرد زاویٰ زقار کا جزو ترکیبی طاق ہے۔ اگر ایک محور وف کے گرد جسکی سمتی جیوب التمام محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے ل، م، ن ہیں حاصل زاویٰ زقار کی مقدار طاق ہو تو

$$\text{طاق} = \text{طا جم ف وق}$$

$$= \text{طا (ل جم ع + م جم بہ + ن جم جہ)}$$

خط وق خواہ کوئی ہو یہ مساوات ہمیشہ درست ہوگی، اس لیے ہم اس کو وقت کے لحاظ سے تفرق کر سکتے ہیں اور اس طرح حاصل کرتے ہیں

$$\frac{\text{فرطاق}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ جم ع} + \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ جم بہ} + \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ جم جہ}$$

$$- \text{سم جب ع فرع} - \text{سم جب بہ فرت} - \text{سم جب جہ فرجہ}$$

(۱۳۰).....

اب فرض کرو کہ خط وق، ولا پر منطبق ہوتا ہے تو طاق = سم۔

زیر بحث لمحہ بہ = جم =  $\frac{\pi}{4}$  ع = ۰۔ نیز فرت وہ شرح ہے جس سے

ولا اور محور اکا درمیانی زاویہ بڑھتا ہے اور صریحاً یہ سم ہے۔

$$\text{اسی طرح فرجہ} = - \text{سم} \text{ اور فرع} = ۰۔$$

(۳۸)

ان تمام اندراجات کو عمل میں لانے سے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر محوروں کے یہ دو جٹ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں مساوات (۱۳۰) شکل

$$\frac{\text{فرسہ ل}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} - \text{سم} \times \text{سم} + \text{سم} \times \text{سم}$$

$$\frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} =$$

اختیار کرتی ہے۔ پس زیر بحث لمحہ پر رشتہ

$$\text{سم ل} = \text{سم} \text{، وغیرہ}$$

$$\text{اور نیز} \quad \frac{\text{فرسہ ل}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} \text{ وغیرہ}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ مبداء یا توازن ایک ثابت نقطہ ہے یا جسم کا مرکز ثقل۔

پہلی صورت میں

$$۶ = ۵ = ۴ = ۳ = ۲ = ۱ \text{ ہمیشہ}$$

دوسری صورت میں

$$۱ = ۲ = ۳ = ۴ = ۵ = ۶ \text{ ہمیشہ}$$

نیز فرض کرو کہ حوالے کے محور، مجموعہ کے صدر محور منتخب کئے گئے ہیں جو مبداء میں سے گزرتے ہیں تو

$$۵ = ۴ = ۳ = ۲ = ۱$$

یہ تمام اندراجات مساوات (۱۲۸) اور اس کے مشابہ دو مساواتوں میں کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساواتیں شکل

$$۱ \text{ } \frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} - (\text{ج} - \text{سم}) \text{ سم} = \text{ل} \quad (۱۳۱)$$

$$\text{ب } \frac{\text{فرسہ ب}}{\text{فرت}} - (\text{ج} - ۱) \text{ سم} = \text{م} \quad (۱۳۲)$$

ج  $\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} - (ا - ب) \text{ سم سم} = \text{ن}$  (۱۳۳)

اعتیار کرتی ہیں۔ ان مساواتوں کو یو لکر کی مساواتیں کہا جاتا ہے۔

## سیارہ کی گردش

(۳۰۹)

۲۵۳۔ ان مساواتوں کے استعمال کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک استوار جسم کی حرکت کا امتحان کرتے ہیں جو ایک محور کے گرد متشاکل ہے اور ایسی قوتوں کے زیر عمل ہے جو سب کی سب مرکز ثقل میں سے گذرتی ہیں۔ یہ شرطیں تقریبی طور پر ان شرطوں کو تعبیر کرتی ہیں جو حاصل ہوتی ہیں جب کہ ایک سیارہ اپنے مدار میں حرکت کرتا ہے یا ایک ستارہ فضا میں حرکت کرتا ہے۔  
فرض کرو کہ ہم مرکز ثقل کو مبدا اور تشاکل کے محور کو محور ا لیتے ہیں۔  
فرض کرو کہ جمود کے معیار 'ا'، 'ب'، 'ب' ہیں۔ تب حرکت کی مساواتیں ہیں:

$$ا \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = ۰ \quad (۱۳۴)$$

$$ب \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = (ب - ا) \text{ سم سم} \quad (۱۳۵)$$

$$ب \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = - (ب - ا) \text{ سم سم} \quad (۱۳۶)$$

پہلی مساوات سے سم کا مستقل ہونا فوراً معلوم ہو جاتا ہے۔  
فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے۔ اب اگر ہم لکھیں

$$\text{گ} = \frac{ب - ا}{ب} \text{ طا}$$

توسعاتیں (۱۳۵) اور (۱۳۶) ہو جاتی ہیں

$$(۱۳۷) \quad \text{فرسہ} = \frac{۲}{\text{وزن}} = \text{گ سہ}$$

$$(۱۳۸) \quad \text{فرسہ} = \frac{۳}{\text{وزن}} = \text{گ سہ}$$

$$\text{اس طرح} \quad \text{فرسہ} = \frac{۲}{\text{وزن}} = \text{گ} \quad \text{فرسہ} = \frac{۳}{\text{وزن}} = \text{گ سہ}$$

اور اس کا حل ہے

$$\text{سہ} = ۶ \text{ جم (گ ت + صہ)}$$

اور مساوات (۱۳۷) سے اب حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ} = ۶ \text{ جب (گ ت + صہ)}$$

اس لیے لمحہ ت پر زاویہ رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\text{طا} = ۶ \text{ جم (گ ت + صہ)} - ۶ \text{ جب (گ ت + صہ)}$$

(۳۱۰) ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کا محور ایک مخروط مرسم کرتا ہے اور اس کا دور

$$\frac{\pi^2}{g} \text{ یا } \frac{\pi^2}{\text{طا}} \text{ ب - ہے}$$

اگر ب ' سے بہت قریب ہو تو دور بہت بڑا ہو سکتا ہے اور

اس لیے حرکت بہت سست ہوگی۔ یہ زمین کی صورت میں واقع ہوتا ہے گردش کے محور کی حرکت وہ منظر پیدا کرتی ہے جس کو عرض بلد کا تغیر کہتے ہیں

$$\text{اور اس کا دور تقریباً } ۴۲۸ \text{ یوم ہے۔ چونکہ دور } \frac{\pi^2}{\text{طا}} \text{ تقریباً ایک یوم کو}$$

تعبیر کرتا ہے اس لیے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زمین کے لیے  $\frac{\pi^2}{\text{ب}}$  کا

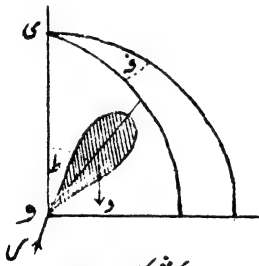
$$\text{رتبہ } \frac{1}{۴۲۸} \text{ ہے۔}$$



اس مقدار کی صحیح قیمت ۳۲۸.۰۰ ہے، یہ تناقص زمین کی نامکمل استوائیت کا نتیجہ ہے۔

## لٹو کی حرکت

۲۵۴ — اس باب کے طریقوں کی دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک گھومتے ہوئے لٹو کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ ہم فرض کریں گے کہ لٹو ایک گردش جیسے جو ایک کیل پر گھوم رہا ہے جس کی نوک ایک نقطہ ہے اور کیل اور اس سطح کے درمیان تماس جس پر وہ ٹکا ہوا ہے پھسلنے کو روکنے کے لیے کافی



شکل (۱۵۰)

کھڑا ہے۔ پس نقطہ تماس ایک ثابت نقطہ ہے۔ فرض کرو کہ ہم فضا میں ثابت محور ولا، و ما، وی لیتے ہیں جن میں محوری انتصابی ہے اور نیز فرض کرو کہ جسم میں ثابت محور ۱، ۲، ۳ ہیں جو و میں سے

گذرنے والے جمود کے صدر محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ محور ۱، لٹو کا تشاکل کا محور ہے اور فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد جمود کے معیار ۱، ۲، ۳ ہیں۔

یولر کی مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہو جاتی ہے

$$1 = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرزت}} =$$

کیونکہ ب = ج اور ل = ۰۔ اس طرح سے مستقل ہے، فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ لٹو کا محور اس اکائی کرہ کو جو و کے گرد کھینچا گیا ہے ایک

نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے قطبی محدد (ا، طہ) فہ ہیں جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو انتصابی اور لٹو کے محور کے درمیان ہے۔

لٹو کی توانائی بالحرکت بموجب دفعہ (۲۴۸)

(۳۱۱)

$$\frac{1}{p} [ (ا طہ + ب) (سہ^۲ + سہ^۲) ]$$

ہے اور توانائی بالقوہ گ ج ھ جم طہ ہے جہاں ھ وہ فاصلہ ہے جو لٹو کے مرکز ثقل اور و کے درمیان ہے۔ اس طرح توانائی کی مساوات

$$(ا طہ + ب) (سہ^۲ + سہ^۲) + ۲ گ ج ھ جم طہ = ع (۱۳۹)$$

جہاں ع ایک مستقل ہے۔ اس کو ایک مختلف شکل میں رکھا جاسکتا ہے۔ کیونکہ سہ^۲ + سہ^۲، لٹو کے محور کی زاوی رقتار کا مربع ہے اور اس لیے اکائی کرہ پر کے نقطہ ا، طہ، فہ کی حقیقی رقتار کا مربع ہے اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$سہ^۲ + سہ^۲ = \left( \frac{فرطہ}{فرت} \right)^۲ + جب^۲ طہ \left( \frac{فرطہ}{فرت} \right)^۲$$

توانائی کی مساوات اب شکل

$$ا طہ + ب [ (ا طہ + ب) \left( \frac{فرطہ}{فرت} \right)^۲ + جب^۲ طہ \left( \frac{فرطہ}{فرت} \right)^۲ ]$$

$$+ ۲ گ ج ھ جم طہ = ع (۱۴۰)$$

اختیار کرتی ہے۔

ہم ایک تیسری مساوات اس واقعہ سے حاصل کر سکتے ہیں کہ انتصابی محور و کی کے گرد زاوی معیار حرکت مستقل ہے۔ اس زاوی معیار حرکت کو (ا) معیار حرکت جو محور ا کے گرد گردش طاقی وجہ سے ہے، اور (ب) معیار حرکت جو لٹو کے محور کی حرکت کی وجہ سے ہے

کا مرکب خیال کیا جاسکتا ہے۔  
محور  $a$  کے گرد گردش  $a$  کو پھر گردشوں  $a$  جب  $a$  ط  $a$ ،  $a$  جم  $a$  میں  
تخلیل کیا جاسکتا ہے جو علی الترتیب افقی اور انتصابی کے گرد ہیں، ان  
گردشوں سے معیار حرکتوں کے معیار افقی اور انتصابی کے گرد  
 $a$  ط  $a$  جب  $a$ ،  $a$  ط  $a$  جم  $a$  حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے معیار حرکت  
کا معیار جو حصہ (۱) سے شامل ہوتا ہے  $a$  ط  $a$  جم  $a$  ہے۔  
لہٰذا محور کی حرکت کو دو گردشوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے:

(۱) زاوی رفقار جب  $a$  ط  $a$  فرت  $a$  کی گردش جو اس محور کے

گرد ہے جو انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\frac{\pi}{2}$  - ط بناتا ہے،

(۲) زاوی رفقار فرت  $a$  ط  $a$  کی گردش جو ایک افقی محور کے گرد ہے۔ (۳۱۲)

اول الذکر (۱) کو انتصابی کے گرد گردش جب  $a$  ط  $a$  فرت  $a$  اور ایک افقی

محور کے گرد گردش جب  $a$  ط  $a$  جم  $a$  فرت  $a$  میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔  
اس لیے حرکت کے حصہ (ب) سے انتصابی کے گرد جو معیار حرکت کا  
معیار شامل ہوتا ہے وہ

ب جب  $a$  ط  $a$  فرت  $a$

ہے اور چونکہ انتصابی کے گرد معیار حرکت کا معیار ایک مستقل قیمت  
رکھتا ہے اس لیے فرض کرو کہ یہ مستقل  $g$  ہے تو

$a$  ط  $a$  جم  $a$  + ب جب  $a$  ط  $a$  فرت  $a$  =  $g$  (۳۱۱)

اگر ہم فرت  $a$  کو اس مساوات اور مساوات (۳۰) سے ساقط

کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$ب جب ط [ا ط + ب (فرط) + ۲ گ ج ۳ جم ط - ع]$$

(۱۴۲)

+ (گ - ا ط + جم ط) = ۰  
اس مساوات سے ط کی قیمت کے تغیرات حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے  
انتصابی کے ساتھ لٹو کے محور کے میلان میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں ان کو  
ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

$$ط کی اعظم اور اقل قیمتیں ' فرط = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں$$

اور اس لیے قیمتیں مساوات

$$ب (۱ - جم ط) [ا ط + ۲ گ ج ۳ جم ط - ع]$$

$$+ (گ - ا ط + جم ط) = ۰ \quad (۱۴۳)$$

کی اصلیں ہیں۔

فرض کرو کہ اس مساوات کی دائیں جانب کو ہم ف (جم ط) سے  
تعبیر کرتے ہیں۔ اب چونکہ ف، تیسرے درجہ کا ایک تفاعل ہے اس لیے  
جم ط کی تین اصلیں ہوں گی۔ فرض کرو کہ لٹو کو زاویہ ط = ط پر چلا یا گیا  
ہے اور فرط کی قیمت (فرط) کے مساوی ہے۔ تب مساوات  
(۱۴۲) سے

$$ب جب ط [ا ط + ب (فرط) + ۲ گ ج ۳ جم ط - ع]$$

$$+ (گ - ا ط + جم ط) = ۰$$

$$اور اس لیے ف (جم ط) = ب جب ط [ا ط + ۲ گ ج ۳ جم ط - ع]$$

+ (گ - ا) ط ج ط = - ب ا ج ب ط (فرط ۲)

اس لیے ف (ج ط) منفی ہے۔ ہم آسانی سے مساوات (۱۴۳) سے معلوم (۳۱۳) کرتے ہیں کہ

ف (۱) = (گ - ا) ط

اس لیے ف (۱) مثبت ہے۔

ف (-۱) = (گ + ا) ط

اس لیے ف (-۱) مثبت ہے اور

ف (∞) = - ۲ گ ج ب (∞ +)

ج منفی ہے۔ اس طرح ہم دیکھ چکے ہیں کہ

جب ج ط = ∞ + تو ف (ج ط) منفی ہے

جب ج ط = ۱ تو ف (ج ط) مثبت ہے

جب ج ط = ج ط تو ف (ج ط) منفی ہے

جب ج ط = -۱ تو ف (ج ط) مثبت ہے۔

اس لیے کبھی ف (ج ط) = - کی تین اصلیں حسب ذیل طریقہ پر واقع ہوتی ہیں:

ایک اصل ط = ط ج ج ط = ۱ اور ج ط = ج ط کے درمیان

ایک اصل ط = ط ج ج ط = ج ط اور ج ط = -۱ کے درمیان

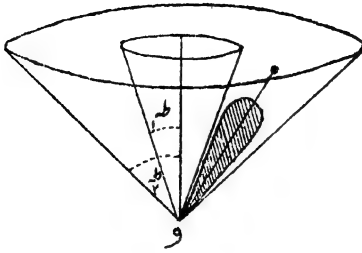
ایک اصل وہ ہے جس کے لیے ج ط عدد اکائی سے بڑا ہے

اور اس لیے ط کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی۔

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ نقطے جن پر فرط معدوم ہو سکتا ہے

صرف ط = ط اور ط = ط ہیں۔ ان نقطوں پر فرط معدوم ہوتا ہے

اور چونکہ ان میں سے کسی نقطہ پر مساوی اصلیں نہیں ہیں اس لیے



شکل (۱۵۱)

فرت  $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$  ان نقطوں پر پہنچ کر

علامت تبدیل کرتا ہے اور اس لیے طہ، صرف قیمتوں طہ، اور طہ کے درمیان تبدیل ہو سکتا ہے۔ پس لٹو کا محور دو محور و طوں

طہ = طہ، اور طہ = طہ کے

درمیان بہتر از کرتا ہے۔

(۳۱۴)

۲۵۵ — فرض کرو کہ ہم وہ کم سے کم زاویٰ معیار حرکت معلوم کرنا چاہتے ہیں جو لٹو کا ہونا چاہئے تاکہ وہ بغیر گریڑنے کے گھومتا رہے۔ اس کے لیے ہم مان سکتے ہیں کہ لٹو گریڑے گا اگر کبھی طہ، ایک خاص حد طہ سے تجاوز کرے خواہ اس کا گریڑنا کیل کے پھسلنے سے یا اس کا پہلو زمین کو مس کرنے سے وقوع پذیر ہوا ہو۔ وہ شرط کہ لٹو گریڑے یہ ہے کہ طہ کو طہ سے کم ہونا چاہئے اور اس لیے ف (جم طہ) کو مثبت ہونا چاہئے۔ اسلئے ع، گ، اور ط کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ

ب جب طہ (طہ + ۲ ک ج جم طہ - ع) + (گ - طہ جم طہ)

مثبت ہو۔ فرض کرو کہ لٹو کو انتصابی کے ساتھ میلان طہ پر ابتدا گھمایا گیا ہے اور لٹو اپنے محور کے گرد گردش طہ کے سوا کوئی اور حرکت نہیں رکھتا۔ اب

مساداتوں (۱۴۰) اور (۱۴۱) سے

$$\begin{aligned} \text{ع} &= \text{طہ} + ۲ \text{ ک ج جم طہ} \\ \text{گ} &= \text{طہ جم طہ} \end{aligned}$$

اس طرح

$$\text{ف (جم طہ)} = \text{ب جب طہ} (\text{طہ} + ۲ \text{ ک ج جم طہ} - \text{ع})$$

۴۔ (گ)۔ (طا جم طہ ۳)

$$= ب جب طہ ۲ \times گ ج ۴ (جم طہ - جم طہ) + (طا) (جم طہ - جم طہ)$$

$$= (جم طہ - جم طہ) [گ ج ۴ ب جب طہ + (طا) (جم طہ - جم طہ)]$$

(۱۳۴)۔ چونکہ لٹو کو ایک ایسے محل میں ضرور جلا یا گیا ہے جس میں وہ گھوم سکتا ہے اس لیے جم طہ۔ جم طہ کی قیمت ضرور منفی ہے۔ اس لیے ف (جم طہ) کے مثبت ہونے کے لیے

$$(طا) (جم طہ - جم طہ) - گ ج ۴ ب جب طہ (۱۳۵)$$

کو مثبت ہونا چاہئے یا

$$(۱۳۶) \quad \frac{گ ج ۴ ب جب طہ ۳}{(جم طہ - جم طہ ۳)} < طا$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (ا) بہت چھوٹا ہے تو طا کی وہ قیمت جو لٹو کو گرنے سے بچانے کیلئے مطلوب ہے بہت بڑی ہے۔ اس لیے چھوٹی عمودی ترازش کے لٹو کو گھمانا بہت مشکل ہے مثلاً سیسے کی پینسل یا نوک دار تار کو۔

اگر ہم اس زاویہ کا انتخاب کر سکیں جس پر لٹو گھومنا شروع کرتا ہے تو گویا جم طہ اختیار ہی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ طا کی مطلوبہ قیمت کم سے کم ہوگی جبکہ جم طہ اعظم ہو یعنی جبکہ لٹو کو انتصا با گھمایا گیا ہو۔ (اس صورت (۳۱۵) میں لٹو گھومے گا اگر

$$\frac{گ ج ۴ ب جب طہ ۳}{(۱ - جم طہ ۳)} < طا$$

$$\frac{گ ج ۴ ب (۱ + جم طہ ۳)}{۱} < طا \quad \text{یا اگر}$$

۲۵۶ - بالعموم اگر لٹو انتصا با گھومنے کی ابتدا کرے اور اس کے محور کے گرد خالص گردش کے سوا کوئی اور رفتار نہ ہو تو مساوات (۱۴۴) میں جم طہ = ۱ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ف (جم طہ) = (۱ - جم طہ) [۱ طہ - ۲ ک ج ھ ب (۱ + جم طہ)]$$

مساوات ف (جم طہ) = کی اصلیں ہیں

$$جم طہ = ۱ + ۱ + ۱ - \frac{۱ طہ}{۲ ک ج ھ ب} - ۱$$

فرض کرو کہ ہم لکھتے ہیں

$$\frac{۲ ک ج ھ ب}{۱ طہ} = طہ$$

تو جب طہ = طہ تو اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$جم طہ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

اور جب طہ کے طہ تو تیسری اصل اکائی سے بڑی ہے اور جب طہ طہ تو تیسری اصل اکائی سے کم ہے فرض کرو جم طہ = جم طہ جہاں طہ ایک حقیقی زاویہ ہے جو مساوات

$$جم طہ = \frac{۱ طہ}{۲ ک ج ھ ب} - ۱ = ۱ - \frac{۲ (طہ - طہ)}{طہ} (۱۴۴)$$

سے حاصل ہوتا ہے -

پس جب تک طہ کے طہ انتہا زات منطبق حدود طہ = . اور طہ = . کے درمیان مقید رہتے ہیں اور اس لئے لٹو انتصا بی رہتا ہے لیکن جوں ہی طہ > طہ انتہا زات حدود طہ = . اور طہ = طہ کے درمیان ہونے لگتے ہیں فرض کرو کہ ہم لٹو کو زاونی رفتار طہ سے جو طہ سے بڑی ہے چلاتے ہیں اس لیے پہلے پہل اس کا محور انتصا بی ہے اور لٹو کی حرکت صرف اس کے محور کے گرد گردش کی حرکت ہے - اب طہ کی حقیقی اصلیں . ہیں



اور اس لیے اهتزازات کی کوئی سعت نہیں ہے اور لٹوکا محور ٹھیک انتصابی رہتا ہے (۳۱۶)  
 اس کو انگریزی عام زبان میں کہتے ہیں کہ لٹو "Asleep" ہے اور اردو میں اسکو لٹو کی نیند کہا جاتا ہے  
 اگر مفروضہ شرطیں بدرجہ اتم پوری ہوتیں تو یہ حرکت دائم جاری رہتی  
 لیکن فطرت میں ایسی کامل شرطیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ کیل اور اس سطح  
 کے درمیان جس پر لٹو گھومتا ہے تماس کا علاقہ ٹھیک ایک نقطہ نہیں ہوتا  
 بلکہ ایک چھوٹا دائرہ یا قطع ناقص ہوتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ تماس  
 پر تھوڑا سا بچکاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے۔ کیل کو سخت فولاد کا بنانے اور لٹو کو  
 ایک سخت سطح پر رکھانے سے یہ علاقہ چھوٹا بنایا جاسکتا ہے لیکن وہ پھر بھی  
 محدود ابعاد کا ہوگا۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ کیلے پر کے تعاملات سب کے  
 سب محور سے نہیں ملتے۔ لٹو کی گردش میں مزاحمت پیدا کرنے والا ایک  
 فرک کی چھوٹا جفت ہوتا ہے اور طاقت بدستج کھٹتا ہے۔

جب طاقتنا گھٹ جاتا ہے کہ وہ طاقت سے کم ہوتا ہے تو اهتزاز  
 کی سعتیں طہ = . اور طہ = ظہ ہوتی ہیں۔ لٹو اب نیند میں نہیں ہوتا بلکہ  
 زاویہ طہ میں سے لڑکھڑانے لگتا ہے۔ جیسے طاقتنا جاری رکھتا ہے  
 ظہ مسلسل بڑھتا ہے جو مساوات (۱۴۷) سے ظاہر ہے اور بالآخر  
 ظہ اتنی بڑی قیمت تک پہنچ جاتا ہے کہ لٹو زمین پر لڑکھڑانے لگتا ہے اور ایسے  
 گر کر پڑتا ہے۔

۲۵۷۔ ایک بہت ہی سادہ قسم کے لٹو کی صورت میں یہ نتیجے جو شکل اختیار  
 کرتے ہیں ان کا امتحان کرنا دلچسپی کا موجب ہوگا۔ فرض کرو کہ کمیت کے اور

نصف قطر کی ایک ایکساں فرض

ہے اور اس کے مرکز میں سے ایک

پن گذار کر لٹو بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ

پن کا وہ طول جو قرص میں سے اس کی

نچلی جانب نکلا ہوا ہے ۲ ہے

اور فرض کرو کہ قرص کی کمیت کے



شکل (۱۵۳)

مقابلہ میں پن کی کمیت قابل نظر انداز ہے۔۔۔ وہی ہے جو دفعات ماسبق کے مسائل  
تخلیلی میں فرض کیا گیا تھا۔ (اور ب کی قیمتیں ہیں

$$1 = \frac{1}{2} \text{ ک } 1, \text{ ب } = \frac{1}{2} \text{ ک } 1$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{2} \text{ ک ج } 2 = \frac{1}{2} \text{ ک ج } 2 = \frac{1}{2} \text{ ج } 2$$

جب لٹو فاصل رفتار طبا پر جس پر لڑکھڑانے کی ابتدا ہوتی ہے گھومتے  
لگتا ہے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار طبا 1 ہے یعنی ج 2۔ اس طرح لڑکھڑانا  
شروع ہوتا ہے جبکہ کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار ج 2 میں گھٹ جاتی ہے،  
یہ رفتار ایسی ہے جو صرف قرص کے ارتفاع پر منحصر ہے اور اس کے نصف قطر پر  
منحصر نہیں ہے۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ قرص جتنا نیچے ہوگا اتنا سست وہ بغیر  
لڑکھڑانے گھومے گا۔ اگر ہم  $2 = 1$  لیں تو معلوم ہوگا کہ لڑکھڑانا شروع ہوتا  
ہے جبکہ کور کی رفتار تقریباً 2 فٹ فی ثانیہ ہے۔

کور زمین کو مس کرے گی جبکہ لڑکھڑانے کی سمت مس ظہ =  $\frac{2}{1}$  سے

(۳۱۴)

حاصل ہوا اور اس کے بعد لٹو زمین پر لڑکھڑے گا۔ اگر ہم حسب سابق  $1 = 2$  اور

$$2 = 1 \text{ لیں تو مس ظہ} = \frac{1}{3} \text{ اور اس لیے جم ظہ} = \frac{3}{10} \text{ اور } \frac{1}{10} \text{ طبا} - \frac{1}{10} \text{ طبا}$$

$= 1.6$  تقریباً۔ اس طرح طبا =  $\frac{19}{10}$  طبا تقریباً۔ پس ایسا لٹوینس میں

رہے گا تا آنکہ اس کی کور کی رفتار 2 فٹ فی ثانیہ تک گھٹ جائے۔ اس کے

بعد وہ لڑکھڑائے گا اور جوں ہی اس کی کور کی رفتار تقریباً 5 فٹ فی ثانیہ  
فی ثانیہ تک گھٹ جائے گی وہ زمین پر لڑکھڑنے لگیگا۔

معمولی چھوٹے لٹو کے لیے جس کی شکل ناشپاتی جیسی ہوتی ہے ہم

$$2 = 1 \text{ تقریبی طور پر لے سکتے ہیں اور نقطہ تماس میں سے گزرنے والے}$$

محوروں کے گرد گھماؤ کے نصف قطروں کو  $\frac{3}{4}$  اور 2 لے سکتے ہیں۔ اس لیے

انچوں میں

$$1 = \frac{9}{14} \text{ ک } ، \text{ ب } = \frac{7}{14} \text{ ک}$$

$$\text{طا} = \frac{2}{7} \text{ ک ج ب} = \frac{20.278}{24} \text{ ج}$$

ج = ۳۸۶ فی ثانیہ فی ثانیہ لینے سے طا = ۱.۷۰ گرد شیش فی ثانیہ۔ اگر لو کو ایک دوری سے گھمایا گیا ہو جس کا سرالٹو کے گرد نصف قطر ایک انچ کے دائروں میں لیٹا گیا ہے تو دوری کو لو کے لحاظ سے تقریباً ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے گھینپنا چاہئے تاکہ مطلوبہ زاویٰ رفتار پیدا ہو۔

## عام مثالیں

۱۔ ایک اُڑپہیہ کے محور کا معیار ہر ہے، اس کے محور کے گرد جس کا نصف قطر ہ ہے ایک دوری لیٹی ہوئی ہے۔ وزن و کے مساوی تناؤ ایک ثانیہ تک دوری پر عائد کیا گیا ہے۔ ایک ثانیہ کے ختم پر اُڑپہیہ کی زاویٰ رفتار کیا ہوگی؟

۲۔ ایک بجری بیڑہ جس کا مجموعی ہٹاؤ ۲۰۰۰۰ ٹن ہے خط اُسٹوا پر مشرق سے مغرب کی جانب حرکت کرتا ہے اور فی گھنٹہ طول بلد کے ۲۰ دقیقے طے کرتا ہے۔ زمین کو کمیت ۶ x ۱۰<sup>۲۱</sup> ٹن کا ایک متجانب کرہ سمجھ کر زمین کی زاویٰ رفتار میں تبدیلی معلوم کرو جو بیڑے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تقریباً ۱۶ x ۱۰<sup>۱۳</sup> ثنائے کا اضافہ ہوتا ہے۔

۳۔ زمین کی کمیت ۶ x ۱۰<sup>۲۱</sup> ٹن ہے اور برف ٹیلے اور پگھلا ہوا برف وزنی ۱۰ اٹن قطب شمالی سے عرض بلد ۵۴° کی جانب حرکت کرتے ہیں۔ دن طول میں تبدیلی معلوم کرو۔

۴۔ کمیت ک کی ایک ٹرین شمالاً ۶۰ میل فی گھنٹہ سے دوڑتی ہے۔ ثابت کرو کہ مشرقی پٹری اور پہیہ کی کوروں کے درمیان زمین کی گردش کی وجہ سے

ایک دباؤ ہونا چاہئے، اس دباؤ کی مقدار معلوم کرو۔  
 ۵۔ زمین پر شہابیوں کے گرنے سے جو تمام سمتوں سے زمین پر پہنچتے ہیں  
 غبار کی ایک پتلی نہ جمتی ہے جس کی موٹائی ۵ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے  
 طول میں تبدیلی تقریباً  $\frac{5}{13}$  غنہ فی یوم ہوگی جہاں زمین کا نصف قطر فٹوں میں  
 ۱ ہے اور زمین اور شہابی غبار کی کثافتیں علی الترتیب ۵ اور غنہ ہیں۔  
 ۶۔ دو کمیتیں گ اور ک جو چرخ اور محور سے لٹکائی گئی ہیں متوازن  
 نہیں ہیں، چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ۱ اور ۲ ہیں۔ ثابت کرو کہ  
 ک کا اسراع

$$g = \frac{k}{b} \quad \text{ج}$$

ہے جہاں ۵، مشین کے جمود کا معیار اس کے محور کے گرد ہے۔  
 ۷۔ ایک ہلکی، کامل ملائم، نا امتداد پذیر دوری ایک ایسا اسطوائے  
 کی مرکزی تراش کے گرد لپٹی ہوئی ہے۔ دوری کا ایک سر ایک ثابت نقطہ  
 سے بند ہے اور اسطوائے کو گرنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ اسراع  
 ج کے ساتھ گرے گا۔

۸۔ طول ۱۲ کے دو مساوی ایساں ڈنڈے ایک سرے پر ڈھیلے  
 جوڑے گئے ہیں اور ان کو نصف قطر  $\frac{1}{3}$  کے ایک ثابت کرہ پر متشابہلاً

رکھ کر ایک افقی محل میں اس طرح اٹھایا گیا ہے کہ قبضہ کرہ کو مس کرتا ہے۔  
 تب ان کو اترنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب وہ اولاً ساکن ہوتے ہیں  
 وہ افقی سے زاویہ  $\frac{1}{3}$  پر مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ ہر نقطہ تا اس پر کرہ پر دباؤ  
 ایک ڈنڈے کے وزن کا ایک ربع ہے اور نیز یہ کہ قبضہ پر کوئی فساد نہیں ہے۔  
 ۹۔ ایک ڈنڈے کا ایک سر ایک چمکنے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے  
 اور دوسرا سر ایک چمکنے انتصابی دیوار پر ڈنڈا افق سے زاویہ  $\frac{1}{3}$  پر مائل ہے۔

اگر اس کو پسٹلے چھوڑ دیا گیا تو ثابت کرو کہ وہ دیوار سے جدا ہو گا جبکہ افق کے ساتھ اس کا میلان جب  $(\frac{2}{3})$  (جب عد) ہو جائے۔

۱۰۔ اگر سورج بتدریج اس طریقہ پر سکڑے کہ ترکیب اور شکل میں ہمیشہ اپنے مشابہ رہے تو ثابت کرو کہ جب ہر نصف قطر اپنے طول کا  $\frac{1}{2}$  حصہ سکڑ چکے جہاں ن جڑا ہے تو زاویہ رفتار اپنی پہلی قیمت سے  $(1 + \frac{2}{3})$  گنا بڑھ جائے گی۔ گردش کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک چمکدار پٹے کا طبعی طول  $2\pi r$ ، کمیت ک، اور مقیاس لہ ہے۔ یہ پٹہ افقی مستوی میں نصف قطر کے ایک کھوڑے پہیہ پر ساکن ہے۔ پٹہ کو پہیہ کے محیط کے مقابل پکڑ کر پہیہ کو زاویہ رفتار ط کے ساتھ گھمایا گیا۔ اگر پٹہ کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وسیع ہو گا اور جب اس کا نیم قطر  $r$  ہو گا تو اس کی زاویہ رفتار  $\frac{1}{r}$  ہو گی اور اس کی نیم قطری رفتار

$$\left[ \frac{1}{r} \left( \frac{2}{r} - 1 \right) - \frac{2\pi r}{k} \left( \frac{2}{r} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ہو گی۔

۱۲۔ ایک ایسا شلتی قرص (ب ج کو اس طرح سہارا گیا ہے کہ وہ اپنے مستوی میں کے گرد اہتزاز کر سکتا ہے، اس کا مستوی انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مائل سادہ رقا ص کا طول

$$\frac{1}{4} \frac{3(b^2 + c^2) - r^2}{2(b^2 + c^2) - r^2}$$

ہے۔

۱۳۔ کمیت ک کے شیشے کے ایک مکعب میں نصف قطر کا ایک کروی جوف بنایا گیا ہے اور اس جوف کے اندر کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ پھر مکعب کو ایک چمکنے افقی مستوی پر رفتار  $v$  کے ساتھ ہینکا لیا ہے۔

اگر ذرہ کرہ کے گرد ٹھیک ایک چکر لگائے اور اثناء حرکت میں کرہ کو مس کرتا رہے تو ثابت کرو کہ

$$و = ۵ ج + ۴ ج ک$$

۱۴۔ ناقابل قدر کمیت کے ایک ذندے کے یروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی ذرے لگائے گئے ہیں اور ایک سرے پر کے ذرہ پر ذندے کے علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ذروں کی ابتدائی رفتاریں نسبت ۱:۲:۵

میں ہوں گی۔  
۱۵۔ کمیت گ اور نصف قطر کا ایک کھردرا افقی اسطوانہ اپنے محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے۔ اس کے گرد ایک دوری پیٹی لگی ہے جس کے آزاد سرے پر کمیت ک اور طول ل کی ایک زنجیر لگی ہوئی ہے۔ زنجیر کو ایک کٹھا کر کے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر وہ زاویہ ہو جس میں سے اسطوانہ زنجیر کے پوری طرح تن جانے سے وقت ت پیشتر گھوم چکا ہے تو ثابت کرو کہ

$$ک ل ط = \frac{ک}{ل} (۱ ج ت - ل ط)$$

۱۶۔ ایک ایسا چپٹی دائری تھالی کو ایک کھردرے افقی ستوی پر پھینکا گیا ہے اور کسی عنصر پر جو رفتار و سے حرکت کر رہا ہو رگزم و (عنصر کی کمیت) ہے جس کی سمت و کی سمت کے خلاف ہے۔ تھالی کے مرکز کا راستہ معلوم کرو۔

## بارہواں باب

(۳۲۰)

### تعمیم شدہ محدود

۲۵۸۔ اب تک ہم نے مادی اجسام کے علم الحیئل (حرکیات اور سکونیات) پر اس مفروضہ کے ساتھ بحث کی ہے کہ یہ اجسام لا تعداد چھوٹے ذروں پر مشتمل ہیں جو استوار جسم کی صورت میں اپنے اپنے محل پر مضبوطی کے ساتھ جکڑے ہوئے ہیں اور ان کے ذریعہ جسم کے ایک حصہ سے دوسرے حصہ تک قوت کو منتقل کیا جاسکتا ہے۔

۲۵۹۔ استوار اجسام کی صورت میں بھی مادہ کی ساخت کے متعلق یہ قیاس بالکل مطابق نتائج پیدا نہ کر سکا۔ مثلاً دو غیر کامل چکدار اجسام کے درمیان ٹکرائے کے بعد یا دو غیر کامل چکنے اجسام کے درمیان پھسلنے کے بعد یہ معلوم ہوا ہے کہ توانائی کی کچھ مقدار نظروں سے غائب ہو جاتی ہے چنانچہ ہمیں یہ فرض کرنا پڑا تھا کہ یہ توانائی جسم کے انتہائی ذروں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکتوں کے پیدا کرنے میں کام آتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں ٹکرایا پھسلنے واقع ہونے کے بعد استوار اجسام کے متعلق یہ فرض نہیں کیا جاسکتا کہ وہ ان شرطوں کو پورا کرتے ہیں جن کا ادعا کیا گیا ہے۔ ان جسموں کی صورت میں جو صریحاً استوار نہیں ہیں حال اس سے زیادہ بہتر ہے۔ یہاں وہ قیاسات جو ہم نے استوار اجسام کے مطالعہ میں قائم کئے تھے کوئی مدد نہیں پہنچاتے اور ان کی بجائے دیگر قیاسات

بغیر آگے بڑھنا بہت دشوار ہے۔

۲۶۰۔ اس منزل پر آگے بڑھنے کے دو طریقے ہیں۔ ہم ان نئے قیاسات کو جو احسن معلوم ہوں اختیار کر سکتے ہیں اور اس طریقہ پر زیر بحث مادہ کی ساخت کی تصویر کھینچ سکتے ہیں۔ لیکن یہ یقینی نہیں کہ اس طریقہ سے جو نتائج حاصل ہوں گے وہ صحیح ہوں گے کیونکہ کبھی بھی ہمیں اس کا یقین نہیں ہو سکتا کہ مادہ کی انتہائی ساخت کی نوعیت کے متعلق ہمارے قیاسات صحیح ہیں۔ بریں ہم مادہ کی ساخت کے متعلق ان شرطی قیاسات کے ادخال سے یہ دیکھنا کہ کیا نتائج حاصل ہوتے ہیں خالی از قدر وقیمت نہیں ہے۔ اگر یہ نتیجے ان مظاہر کے مطابق ہیں جو فطرت میں زیر مشاہدہ آتے ہیں تو ہمارے شرطی قیاسات کا صداقت سے قریب ہونا درست ہو سکتا ہے۔ لیکن اس کے برخلاف اگر حاصل شدہ نتیجے ان مظاہر کے مطابق نہ ہوں تو ان قیاسات میں جن سے یہ نتیجے حاصل ہوتے ہیں یا تو ترمیم کرنی ہوگی یا انہیں ترک کرنا ہوگا۔

مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے ریاضی طبعیات کی مختلف شاخیں برآمد ہوں گی۔ مثلاً ریاضی طبعیات کی ایسی شاخوں میں سے "پلکڈارٹھوس اجسام کا نظریہ" اور گیسوں کا حرکی نظریہ "پیش کئے جاسکتے ہیں۔ قبل الذکر کی بنیاد ان شرطی قیاسات پر ہے جو ان ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں جن سے ٹھوس اجسام کی ترکیب ہوتی ہے۔ اور بعد الذکر نظریہ کی بنیاد ان شرطی قیاسات پر ہے جو گیس کے ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں۔ مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے جو نتائج برآمد ہوتے ہیں ان کا تذکرہ اور تفہیم صریحاً اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

۲۶۱۔ لیکن آگے بڑھنے کا ایک متبادل طریقہ ہے۔ ہم نے نیوٹن کے حرکت کے قوانین کو وہ مواد سمجھا ہے جو تجربی سائنس نے نظری سائنس کے لیے ہیا کیا ہے تاکہ نظری سائنس میں اس سے کام لیا جاسکے۔ ان



قوانین کی صداقت جبکہ انہیں مادی کائنات کے انتہائی ذروں پر استعمال کیا جائے کسی طرح یقینی نہیں ہے کیونکہ ہم ان انتہائی ذروں کو حاصل نہیں کر سکتے کہ ان پر تجربہ کیا جائے۔ تاہم فرض کرو کہ ہم اس کا امتحان کرتے ہیں کہ آیا علم الحیئل میں صرف اس دعوے کے ساتھ (اور یہ بلاشبہ غیر یقینی ہے) کہ نیوٹن کے قوانین انتہائی ذروں پر اطلاق پذیر ہیں کوئی ترقی ہو سکتی ہے۔ اگر ہم اس سمت میں کوئی ترقی کر سکیں تو حاصل شدہ نتیجہ بلاشبہ علم الحیئل کی تمام دیگر توسیعات پر اطلاق پذیر ہوں گے خواہ ہم انتہائی ذروں کی نوعیت اور ترتیب کے متعلق کوئی مزید دعوے داخل کریں یا نہ کریں۔

۲۶۲۔ وہ مقام جہاں سے ہم مادہ کو دیکھ رہے ہیں شاید ایک تمثیل سے واضح کیا جاسکتا ہے، اس تمثیل کو سب سے پہلے کلرک میا کسویل نے بیان کیا تھا۔ فرض کرو کہ ایک پیچیدہ مشین ایک بند کمرہ میں رکھی ہوئی ہے اور اس مشین اور بیرونی دنیا کے درمیان صرف متعدد رسیوں کے ذریعہ تعلق قائم ہے جو فرش کے سوراخوں میں سے نیچے کے کمرہ میں لٹک رہی ہیں۔ اگر کوئی شخص پیچھے کے کمرہ میں داخل ہو تو اسے مشین کے معائنہ کرنے کا کوئی موقع نہیں ہے لیکن وہ مختلف رسیوں کو کھینچ کر مشین کو کچھ حد تک استعمال کر سکتا ہے۔ اگر ایک رسی کھینچنے پر اس کو معلوم ہو کہ دوسری رسیاں حرکت میں آتی ہیں تو وہ سمجھ سکتا ہے کہ یہ رسیاں اوپر کسی نہ کسی میکا نیت کے ذریعہ مربوط ہونی چاہئیں لیکن وہ اس میکا نیت کی ٹھیک نوعیت دریافت کرنے سے قاصر رہے گا۔

اس مخفی میکا نیت کے متعلق یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ کائنات کی میکا نیت کے ان حصوں کو تعبیر کرتی ہے جو ہماری نظر سے پوشیدہ ہیں اور رسیوں سے وہ حصے تعبیر ہوتے ہیں جن کو ہم چلا سکتے ہیں۔ فطرت میں بعض اعمال ہیں جن کو ہم انجام دے سکتے ہیں، یہ گویا ہماری تمثیل میں رسیوں کے کھینچنے کا جواب ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان اعمال سے بعض نتائج پیدا ہوتے ہیں جو دوسری رسیوں کی حرکت کا جواب ہیں۔ لیکن وہ میکا نیت

جس کی وجہ سے وہ سبب یہ اثر پیدا کرتا ہے بالکل نامعلوم رہتا ہے مثلاً اگر ہم ایک برقی دور کی چابی کو دبائیں تو یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ دور رکھے ہوئے ایک برقی روپیہ کی سوئی حرکت کرتی ہے لیکن وہ حیل اعمال جو دور کے تاروں میں سے اور برقی روپیہ کو گھیرے ہوئے ایئر میں سے اس عمل کو منتقل کرتے ہیں نامعلوم رہتے ہیں۔

۲۶۳ — اب فرض کرو کہ وہ شخص جو نیچے کے کمرہ میں داخل ہوا ہے رسیوں کو اپنے حسب مرضی استعمال کرنے میں آزاد ہے اور یہ کہ وہ رسیوں کے درمیان تعلق کو دریافت کرنا چاہتا ہے۔ وہ اس قیاس پر ابتداء کر سکتا ہے کہ اوپر کے کمرہ کی مشین کی میکا نیت میں (فرض کرو) بیرم چرخیاں اور دندانے دار پیسے شامل ہیں اور وہ بطور خود اس طریقہ کا اندازہ لگا سکتا ہے جس میں رسیوں کو حرکت کرنا چاہئے اگر اس کے قیاسات صحیح ہیں۔ یہ عمل اس کے مائل ہوگا جس کو ہم دفعہ ۲۶۲ میں بیان کر چکے ہیں لیکن ہم اس کی تقلید یہاں نہیں کریں گے۔

اس کے برخلاف اوپر کی میکا نیت کی نوعیت کے متعلق کسی قیاس ادائی کے بغیر نیچے کے شخص کو یہ معلوم ہوگا کہ اگر رسیاں کسی نہ کسی میکا نیت کے ذریعہ مربوط ہیں تو ان کی حرکت چند خاص قوانین کے تابع ہے مثلاً یہ کہنا کہ ہر ذرہ نیوٹن کے حرکت کے قانون کی پابندی کرتا ہے۔

اس کی تفہیم کے لیے فرض کرو کہ ہم سادہ ترین صورت لیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ صرف دو رسیاں ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی ۱ کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو دوسری رسی جب ہمیشہ دواچہ چڑھتی ہے۔ میکا نیت ایک بیرم، چرخوں کا ایک نظام، یا دندانے دار پیسہ ہو سکتی ہے۔ لیکن خواہ وہ ان میں سے کوئی ہو یا ان سے بالکل مختلف کوئی اور انتظام ہو یہ معلوم ہوگا کہ رسی ۱ کی نیچے دار حرکت کو رسی ۲ پر ایک ایسی قوت لگا کر مقید کیا جاسکتا ہے جو ۱ پر عمل کرنے والی قوت کے نصف کے مساوی ہے۔ یہ حقیقت موہوم کام کے اصول سے منتج ہوتی ہے اور اس کو اس قیاس سے

کوئی تعلق نہیں ہے جو مخفی میکانیت کی نوعیت کے متعلق قائم کیا گیا ہو۔  
اب ہمارے سامنے حسب ذیل سوال ہے: کیا ہم مخفی میکانیت کے  
کسی علم کے بغیر یہ دریافت کر سکتے ہیں کہ رسیوں کی کیا حرکت پیدا ہوگی  
اگر ان کو کسی معلومہ طریقہ پر حرکت میں لایا جائے۔ اس کا جواب یہ ہے  
کہ ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں توانائی کی وہ مقدار معلوم ہو جو کسی  
قسم کی حرکت میں شامل ہوتی ہے یعنی بشرطیکہ ہمیں ہر حرکت کی توانائی بالحرکت  
اور نیز ہر شکل (محل) کی توانائی بالقوہ معلوم ہو۔  
اسی طرح اگر ہم تمثیلات سے حقیقوں پر آئیں تو کائنات کی انتہائی  
میکانیت کے متعلق کسی علم کے بغیر ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی ابتدائی  
شرطوں سے کیا حرکت پیدا ہوگی بشرطیکہ کائنات کے اس حصہ کی تمام  
تشکیلات کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ معلوم ہو جس سے ہم بحث  
کر رہے ہیں۔

## ہیلمن کا اصول

۲۶۴ — فرض کرو کہ ایک مادی نظام کے کسی واحد ذرہ کے محدود کسی آن  
لا، 'ما'، 'ی' ہیں اور اس کی کمیت 'ک' ہے اور فرض کرو کہ اس پر جو قوتیں  
عمل کرتی ہیں اُس کے حاصل کے اجزائے ترکیبی 'لا'، 'ما'، 'ی' سے ہیں۔  
فرض کرو کہ اس ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی 'ع'، 'و'، 'ط' ہیں، اسلئے

$$ع = \frac{فرق}{وقت} \text{ وغیرہ}$$

اب اگر اس ذرہ کی حرکت توانین نیوٹن کے نتائج ہے تو حاصل ہونا چاہئے

$$ک = \frac{فرق}{وقت} = لا$$

$$(۱۴۹) \quad ک = \frac{فردا}{فرت} = ما$$

$$(۱۵۰) \quad ک = \frac{فرطی}{فرت} = مے$$

(۲۲۲)

فرض کرو کہ ہم اس حرکت کا مقابلہ قدرے مختلف حرکت سے جو قوانین نیوٹن کے تابع نہیں ہے کرتے ہیں۔ اس دوسری حرکت میں فرض کرو کہ ک کے محدد اُمس آن جس پر یہ محدود حقیقی حرکت میں لا، ما، ی ہیں لا، با، کی سے تعبیر کئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اس لمحہ پر رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط، ہیں، اس لیے

$$ع = \frac{فرلا}{فرت} \text{ وغیرہ}$$

فرض کرو کہ یہ مومہ حرکت حقیقی حرکت سے استقدر خفیف فرق رکھتی ہے کہ لا، لا، ع، ع، جیسی کوئی مقدار جو صرف اس فرق کے ایک حصہ کو تعبیر کرتی ہے ایک چھوٹی مقدار سمجھی جاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم لا، لا کو مف لا سے تعبیر کرتے ہیں اور ایسی ہی ترقیم دوسرے فرقوں کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

مساد اتوں (۱۴۸)، (۱۴۹)، (۱۵۰) کو جو ہر لمحہ پر درست ہیں مف لا، مف ما، مف ی سے ضرب دوا اور جمع کرو تو

$$ک = \frac{فرع}{فرت} مف لا + ک = \frac{فردا}{فرت} مف ما + ک = \frac{فرطی}{فرت} مف ی$$

$$= لا مف لا + ما مف ما + مے مف ی (۱۵۱)$$

$$اب \quad \frac{فرع}{فرت} مف لا = \frac{فرع}{فرت} (ع مف لا) - ع \frac{فرع}{فرت} (مف لا)$$

$$= \frac{فرع}{فرت} (ع مف لا) - ع \frac{فرع}{فرت} (لا - لا)$$

$$= \frac{\text{فرز}}{\text{فرز}} (ع\text{ مف لا}) - ع (ع - ع) =$$

$$= \frac{\text{فرز}}{\text{فرز}} (ع\text{ مف لا}) - ع\text{ مف ع}$$

اس لئے

$$ک\text{ فر ع مف لا} + ک\text{ فر و مف با} + ک\text{ فر ط مف ی}$$

$$= ک\text{ [فرز (ع مف لا + و مف با + ط مف ی)]}$$

$$- (ع\text{ مف ع} + و\text{ مف و} + ط\text{ مف ط}) =$$

$$= لا\text{ مف لا} + ما\text{ مف با} + ع\text{ مف ی} (۱۵۲)$$

موجب مساوات (۱۵۱)

(۳۲۵) اس قسم کی مساوات نظام کے ہر ذرہ کے لیے اور حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ نیز وہ درست ہے خواہ اہمی ہوئی حرکت کچھ ہی ہو۔ اس مساوات کو تمام ذروں کے لیے جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ح\text{ ک [فرز (ع مف لا + و مف با + ط مف ی)]}$$

$$- (ع\text{ مف ع} + و\text{ مف و} + ط\text{ مف ط}) =$$

$$= ح (لا\text{ مف لا} + ما\text{ مف با} + ع\text{ مف ی})$$

(۱۵۳) . . . .

اب فرض کرو کہ حرکت کی توانائی یا حرکت سے تعبیر ہوتی ہے تو

$$ت = \frac{۱}{۲} ح\text{ ک (ع}^۲ + و^۲ + ط^۲)$$

$$تب\text{ مف ت} = \frac{۱}{۲} ح\text{ ک (ع}^۲ - و^۲ + و^۲ - ط^۲ + ط^۲ - ط^۲)$$

لیکن  $\frac{۲}{۶} - \frac{۲}{۶} = \frac{۲}{۶} + (\frac{۲}{۶} - \frac{۲}{۶}) = \frac{۲}{۶} = \frac{۲}{۶}$  مف ۶

اگر ہم دوسرے رتبہ (مف ۶) کی چھوٹی مقدار کو نظر انداز کر دیں۔ اس لیے

مف ۲ = ح ک (۶ مف ۶ + ۶ مف ۶ + ۶ مف ۶)

۲۶۵۔ فی الحال مان لو کہ توتوں کا نظام بقائی ہے اور فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے اور خفیف طور پر ہٹی ہوئی تشکیل میں خیالی نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے۔ تب بموجب دفعہ ۱۱۸

مف ک = ک - ک  
= (وہ کام جو نظام کو حقیقی تشکیل سے ہٹی ہوئی تشکیل تک حرکت دینے میں انجام پایا)

= - ح (لا مف لا + ۶ مف لا + ۶ مف لا)

(۱۵۴)

مساوات (۱۵۳) میں ان جملوں کی بجائے جو مف ت اور مف ک کے مساوی معلوم کئے گئے ہیں اندراج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات حسب ذیل سادہ شکل میں تحویل ہوتی ہے:

ح ک (۶ مف لا + ۶ مف لا + ۶ مف لا) - مف ت = - مف ک

یا  $\frac{۲}{۶} ح ک (۶ مف لا + ۶ مف لا + ۶ مف لا) = مف ت - ک$

یہ مساوات حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم اس کا تکمل حرکت کے کسی دو لمحوں ت = ت اور ت = ت کے درمیان کرتے ہیں

(۲۳۶)

[ ح ک (۶ مف لا + ۶ مف لا + ۶ مف لا) ]

ث = مف (ت-ک) فرت (۱۵۵)

ہم ہی ہوئی حرکت اب تک کسی قید کے تحت نہیں رہی الا انکہ اس کے  
 اور حقیقی حرکت کے درمیان فرق ہمیشہ خفیف ہونا چاہئے۔ اب ہم ایک  
 اور قید عائد کرتے ہیں کہ اوقات ت اور ت پر ہونی ہوئی حرکت میں تشکیل  
 ان تشکیلات پر منطبق ہوتی ہیں جو حقیقی حرکت میں حاصل ہوتی ہیں۔ پس  
 ہم ہی ہوئی حرکت اب وہ ہے جس میں خیالی نظام وقت ت = ت پر  
 اسی تشکیل میں حرکت کی ابتدا کرتا ہے جس میں حقیقی نظام وقت ت = ت  
 پر کرتا ہے، اس کے بعد خیالی نظام وقت ت سے ت تک اس راستہ  
 سے جس پر حقیقی نظام حرکت کرتا ہے ذرا ہٹا ہوا حرکت کرتا ہے (کیونکہ  
 حقیقی نظام قوانین نیوٹن کے تحت حرکت کرتا ہے اور خیالی نظام کی حرکت  
 اس کے تحت نہیں ہے) اور بالآخر وقت ت پر اسی محل میں آجاتا ہے  
 جس میں حقیقی نظام آتا ہے۔  
 خیالی نظام پر اس شرط کے عائد کرنے سے اوقات ت اور ت  
 پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

مف لا = مف ما = مف ی = .  
اور اسی وضع کے رشتے دوسرے ذروں کے لئے۔ پس

[حک، ع، مف لا، و، مف با، ط، مف ی] = ۰

اور مساوات (۱۵۵) ہو جاتی ہے

مرف (ت-ک) فرت = .

یہ ایک ایسی مساوات ہے جو صرف نظام کی توانائی یا حرکت اور توانائی بالقوہ کی مقداروں پر منحصر ہے اور نظام کی میکانیت پر منحصر نہیں ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس واحد مساوات سے نظام کے تمام معلومہ

حصوں کی حرکت معلوم کی جاسکتی ہے جوں ہی ت اور ک معلوم ہو جائیں اور اس کے لئے غیر معلومہ حصوں کی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں ہے۔  
 ۲۶۶۔ اس کو ثابت کرنے سے پیشتر ہم مساوات (۱۵۶) کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ فرض کرو کہ ہم ت۔ گ کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲۶۷)

اب

$$\begin{aligned} \text{گ}^{\text{ت}} \text{مف} (\text{ت} - \text{گ}) \text{فرت} &= \text{گ}^{\text{ت}} \text{مف} \text{ل فرت} \\ \text{گ}^{\text{ت}} (\text{ل} - \text{ل}) \text{فرت} &= \\ \text{گ}^{\text{ت}} \text{ل فرت} - \text{گ}^{\text{ت}} \text{ل فرت} &= \\ \text{مف} (\text{گ}^{\text{ت}} \text{ل فرت}) &= \end{aligned}$$

اگر ہم

کو س سے تعبیر کریں تو یہ مساوات مف س = . ہو جاتی ہے یا  
 س = س

اس طرح دوسری اور اعلیٰ تر ترتیبوں کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کیا جائے تو حقیقی حرکت کے لئے تفاعل س کی قیمت وہی ہے جو کسی خفیف طور پر مختلف حرکت کے لیے متناظر تفاعل س کی ہے جبکہ یہ مختلف حرکت وہی لمحوں پر وہی تشکیلات سے حرکت کی ابتدا اور اختتام کرے۔ دوسرے الفاظ میں تفاعل س اعظم ہوتا ہے یا اقل جبکہ تشکیلات کا سلسلہ وہی ہو جو فطرت میں فی الواقع وقوع پذیر ہوتا ہے۔



## اقل ترین عمل کا اصول

۲۶۷۔ حقیقی حرکت کی اثناء میں کل توانائی حسب مسئلہ دفعہ (۱۴۳) مستقل رہے گی، فرض کرو کہ کل توانائی  $E$  سے تعبیر ہوتی ہے تو ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$T + K = E, \quad T - K = L$$

تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلہ میں یہ کہنا صحیح نہیں ہے کہ اثناء حرکت میں کل توانائی مستقل رہتی ہے لیکن تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلوں کی لامتناہی تعداد میں سے پھر بھی لامتناہی تعداد بچ رہے گی جن کے لئے مذکورہ بالا شرطیں مع اس شرط کے کہ ہر لمحہ پر کل توانائی  $E$  ہونی چاہئے پوری ہونگی۔ ایسے کسی سلسلے کے لیے حاصل ہوگا،

$$T + K = E, \quad T - K = L$$

$$L = T - E, \quad L = T - E$$

پس اس لئے

$$S = K^2 L \text{ فرت}$$

$$= K^2 (T - E) \text{ فرت}$$

$$= K^2 T \text{ فرت} - (T - E) \text{ فرت}$$

پس اگر  $S$  اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$K^2 T \text{ فرت}$$

اعظم ہے یا اقل۔ اس مسئلہ کو حرکت کا عمل کہتے ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ تشکیلات کے تمام ممکن سلسلوں میں جو نظام کو ایک تشکیل سے دوسری تشکیل تک معلومہ وقت میں اس طریقہ پر لاتے ہیں کہ کل توانائی ہمیشہ ایک مخصوص مستقل کے مساوی ہوتی ہے وہ سلسلہ جو ایک نظری نظام سے مرتب ہو سکتا ہے وہ ہے جس پر عمل اعظم ہے یا اقل۔ اب چونکہ عمل بالعموم اقل ہوتا ہے اس لیے اس اصول کو اقل ترین عمل کا اصول کہتے ہیں۔

اس اصول کو اولامو فرٹینئر (Maupertius) نے بیان کیا تھا لیکن اس نے اس کو اس استدلال ریاضی سے ماخوذ نہیں کیا تھا بلکہ اس کو اس امر کا یقین تھا کہ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کائنات کی تبدیلیاں اس طرح وقوع پذیر ہونی چاہئیں کہ عمل اقل ہو۔ (Essai de Cosmologie, 1751)۔

## غیر بقائی قوتیں

۲۶۸۔ اگر قوتیں بقائی نہ ہوں تو ہم مساوات (۱۵۴) میں

$$\Sigma (\lambda \text{ مف لا} + \mu \text{ مف ما} + \nu \text{ مف می})$$

کی بجائے۔ مف گ نہیں رکھ سکتے اور اس لیے مساوات (۱۵۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوگی:

$$\Sigma [\text{مف ت} + (\lambda \text{ مف لا} + \mu \text{ مف ما})]$$

$$+ \nu \text{ مف می}] = 0. \quad (۱۵۷)$$

## لگرانج کی مساواتیں

۲۶۹۔ اگر نظام کے ہر ذرہ کے محدود لا، ما، می وغیرہ معلوم ہوں تو

ہم نہ صرف نظام کی تشکیل معلوم کر سکتے ہیں بلکہ وہ میکانیت بھی جس کے ذریعہ نظام کے مختلف اجزاء مربوط ہیں۔ تاہم یہ ہو سکتا ہے کہ مقداروں کی کمتر تعداد معلوم ہونے پر بھی نظام کی تشکیل متعین ہو سکے حالانکہ مقداروں کی اس تعداد سے میکانیت کا کوئی علم حاصل نہ ہوتا ہو۔

مثلاً ہماری پچھلی مثال میں ہم نے تصور کیا تھا کہ ایک نامعلوم مشین سے دو رسیاں لگتی ہیں اور رسیاں ایسے طریقہ پر مربوط ہیں کہ ایک رسی میں ایک انچ کی حرکت دوسری رسی میں ہمیشہ دو انچ کی حرکت پیدا کرتی ہے۔ اس صورت میں تشکیل پوری طرح معلوم ہو جاتی ہے جبکہ وہ واحد محدود معلوم ہو جائے جو پہلی رسی کے سرے کے محل کی پیمائش کرتا ہے۔ لیکن اس محدود کے معلوم ہونے سے رسیوں کو ملانے والی مکانیت کا علم حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

نیز ہم دفعہ ۶۵ میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی استوار جسم کا محل کافی مقداروں (چھ) کی قیمتوں سے متعین ہو جاتا ہے، یہ مقداریں جسم کے تین ناہم خط دروں کے محل فضاء میں معلوم کرنے کے لیے مطلوب ہوتے ہیں۔ لیکن ان مقداروں کے علم سے ان دروں کی ترتیب کے متعلق کوئی علم حاصل نہیں ہوتا جن سے جسم بنا ہے۔ فرض کرو کہ مقداروں  $\phi$ ،  $\psi$ ،  $\dots$ ،  $\tau$  کا ایک جٹ ایسا ہے کہ ان کی قیمت معلوم ہو تو اجسام کے ایک نظام کی تشکیل پوری طرح متعین ہو جاتی ہے۔ تب ان مقداروں  $\phi$ ،  $\psi$ ،  $\dots$ ،  $\tau$  کو نظام کے تعمیم شدہ محدود کہا جاتا ہے۔

۲۷۰۔ فرض کرو کہ نظام کے کسی ذرہ کے محدود  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\nu$  ہیں۔ تب  $\phi$ ،  $\psi$ ،  $\dots$ ،  $\tau$  کی قیمتوں سے  $\lambda$  پوری طرح معلوم ہوتا ہے اور اس لئے وہ ان مقداروں کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

(۱۵۸)

$\lambda = f(\phi, \psi, \dots, \tau)$  (طن)

اگر نظام متحرک ہے تو مساوات (۱۵۸) کی تمام مقداریں وقت کے تفاعل ہیں۔ پس وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ف فرطہ}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ف فرطہ}}{\text{جف طہ}} + \dots + \frac{\text{جف ف فرطہ}}{\text{جف طہ}}$$

(۳۳۰) اختصار کی خاطر فرض کرو کہ ہم  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ،  $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ، ... کو لا، طہ، ... سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب محصلہ بالامساوات کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{جف ف طہ}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ف طہ}}{\text{جف طہ}} + \dots + \frac{\text{جف ف طہ}}{\text{جف طہ}} \quad (۱۵۹)$$

اس لئے لا ایک خطی تفاعل ہے طہ، طہ، طہ، ...، طہ کا جن کے سر طہ، طہ، ...، طہ کے تفاعل ہیں۔  
توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{۱}{۲} \text{ک} (\text{لا} + \text{ما} + \text{نی})$$

طہ، طہ، طہ، ...، طہ کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس کے سر طہ، طہ، ...، طہ کے تفاعل ہیں۔  
توانائی بالقوہ ک صرف نظام کی تشکیل پر منحصر ہوتی ہے اور اسلئے ک ایک تفاعل ہے صرف طہ، طہ، ...، طہ کا۔  
اس طرح تفاعل ل یا ت۔ ک  
طہ، طہ، ...، طہ، طہ، ...، طہ  
کا ایک تفاعل ہے فرض کرو

$$\text{ل} = \text{ف} (\text{طہ، طہ، ...، طہ، طہ، ...، طہ}) \quad (۱۶۰)$$

ہی ہوئی حرکت میں متناظر تفاعل ل

ط<sub>۱</sub> + مف ط<sub>۱</sub>، ط<sub>۲</sub> + مف ط<sub>۲</sub>، ..... وغیرہ

کا وہی تفاعل ہے اور اس لیے

ل = ذ (ط<sub>۱</sub> + مف ط<sub>۱</sub>، ط<sub>۲</sub> + مف ط<sub>۲</sub>، ..... ط<sub>ن</sub> + مف ط<sub>ن</sub>، ط<sub>۱</sub> + مف ط<sub>۱</sub>)

ٹیلر کے مسئلہ سے ہم ل کو شکل

ل = ذ (ط<sub>۱</sub>، ط<sub>۲</sub>، .....، ط<sub>ن</sub>، ط<sub>۱</sub>، .....)

+ مف ط<sub>۱</sub> جف ط<sub>۱</sub> جف ط<sub>۱</sub> + مف ط<sub>۲</sub> جف ط<sub>۲</sub> جف ط<sub>۲</sub> + ..... + مف ط<sub>ن</sub> جف ط<sub>ن</sub> جف ط<sub>ن</sub>

+ مف ط<sub>۱</sub> جف ط<sub>۱</sub> جف ط<sub>۱</sub> + ..... + مف ط<sub>ن</sub> جف ط<sub>ن</sub> جف ط<sub>ن</sub>

میں پھیلا سکتے ہیں اور اس لیے مساوات (۱۶۰) سے حاصل ہوتا ہے

ل = ل + ح<sub>۱</sub> مف ط<sub>۱</sub> جف ل + ح<sub>۲</sub> مف ط<sub>۲</sub> جف ل + ..... + ح<sub>ن</sub> مف ط<sub>ن</sub> جف ل (۱۶۱)

مساوات (۱۵۶)

(۳۳۱)

گ<sub>۱</sub> مف (ت - گ) فرت = .

گ<sub>۱</sub> (ل - ل) فرت = .

کو شکل

میں لکھا جاسکتا ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی بجائے

گ<sub>۱</sub> (ح<sub>۱</sub> مف ط<sub>۱</sub> جف ل + ح<sub>۲</sub> مف ط<sub>۲</sub> جف ل + ..... + ح<sub>ن</sub> مف ط<sub>ن</sub> جف ل) فرت = .

(۱۶۲)

کو رکھا جاسکتا ہے -  
لیکن

مف طم = طم - فرت (طم + مف طم) - فرت طم = فرت (مف طم)  
 اس لئے  $\frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - 1$   
 اور تکمیل بالمحص سے یہ ہو جاتا ہے

[جفل مف طم] -  $\frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - 1$  (۱۶۳)  
 چونکہ ہٹی ہوئی تشکیل بموجب فرض حقیقی تشکیل پر منطبق ہوتی ہے اس لیے  
 اوقات ت اور ت پر مف طم = - اس طرح پھیلاؤ (۱۶۳) میں  
 پہلی رقم معدوم ہوتی ہے اور حاصل ہوتا ہے  
 $\frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - 1$   
 اب مساوات (۱۶۲) شکل

$\frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - 1$  (۱۶۴)  
 اختیار کرتی ہے -

حدود ت اور ت بالکلیہ ہمارے اختیار میں ہیں مساوات درست  
 رہے گی خواہ ت اور ت کو ہم کوئی قیمتیں دیں - دوسرے الفاظ میں  
 مجموعے تفرقیوں کی ایک تعداد کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے خواہ مجموعہ میں  
 ایسے کتنے ہی تفرقی شامل ہوں - اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ مجموعہ  
 کی ہر رقم معدوم ہونی چاہئے، اس لیے ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہونا چاہئے

(۳۳۲)

$\frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \frac{\text{مف طم}}{\text{فرت}} - 1$  (۱۶۵)  
 ۲۷۱ - اس موقع پر ہمیں دو متبادلات پر غور کرنا ہوگا - یہ ہو سکتا ہے کہ

مف طہ، مف طہ، ... مف طہ کی خواہم کوئی قیمتیں مقرر کریں نئی تشکیل جس کا تشخص محدودوں

طہ، مف طہ، مف طہ، ... طہ، مف طہ

کے ذریعہ ہوتا ہے ایک ممکن تشکیل ہو یعنی یہ تشکیل ایسی ہوگی کہ نظام اس کو اختیار کر سکتا ہے اور اس کی یکسانیت سے جو فیود عائد ہوتے ہیں ان میں خلل نہیں پڑتا۔ اس صورت میں ہم کہتے ہیں کہ نظام "آزادی کے ن درجے" رکھتا ہے۔

اگر نظام آزادی کے ن درجے رکھے تو مساوات (۱۶۵) مف طہ، مف طہ، ... مف طہ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ مثلاً وہ درست ہے اگر ہم لیں

مف طہ = صہ، مف طہ = مف طہ = ... = مف طہ = صہ۔ جہاں صہ کوئی چھوٹی مقدار ہے۔ اس صورت میں ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$\text{صہ} = \left[ \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} - \frac{\text{فر}}{\text{زت}} \right] \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) = 0$$

$$\text{اور اس لیے} \quad \frac{\text{فر}}{\text{زت}} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} = 0$$

محدودوں طہ، طہ، ... طہ میں سے ہر ایک کے لیے اس کے

مشابہ مساوات درست رہے گی۔ ان مساواتوں کو لگراج کی مساواتیں

کہتے ہیں۔ ن نامعلوم مقداروں طہ، طہ، ... طہ اور وقت کے لحاظ سے ان کے تفرقی سروں کے درمیان ایسی ن مساواتیں ہوں گی۔ اس لیے ہم ان سے وہ طریقہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں طہ، طہ، ... طہ وقت کے ساتھ بدلتے ہیں۔ ان مساواتوں کو استعمال کرنے میں ہمیں صرف تفاعل ل کے جاننے کی ضرورت ہے اور اس لیے نظام کی

صرف توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو جاننا ضروری ہے، نظام کی اندرونی میکائینیت کے علم کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اس طرح دفعہ (۲۶۳) کا مجوزہ مسئلہ حل ہو چکا اگر ہم لگرائنج کی مساواتیں حل کر سکیں۔

## توضیحی مثال

(۳۳۳)

عام رقااص۔ فرض کرو کہ ہم لگرائنج کی مساواتوں کو ایک سادہ مثال پر استعمال کرتے ہیں چنانچہ عام رقااص کی حرکت کے مسئلہ پر غور کرو۔ ایک اسٹنوا جیم حرکت کرنے میں اس طور پر مقید ہے کہ ایک نقطہ وثابت رہتا ہے اور خط و ث جو و کو مرکز نقل سے ملاتا ہے ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ و ث کا میلان سمت انتصابی سے ط ہے، تب نظام کا محل بالکلیہ مقرر ہو جاتا ہے جوں ہی طہ کی قیمت معلوم ہو۔ دفعہ (۲۶۵) کی ترقیم میں توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ حسب ذیل ہیں:

$$ت = \frac{1}{2} k^2 \dot{\phi}^2, \quad م = k^2 \dot{\psi}^2 \quad (۱-جم طہ)$$

جہاں م توانائی بالقوہ ہے اور  
ک کل گیت۔ اس لیے

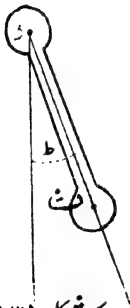
$$ل = \frac{1}{2} k^2 \dot{\phi}^2 - k^2 \dot{\psi}^2 \quad (۱-جم طہ)$$

اس طرح جفل = ک گ طہ اور  
جف طہ

لگرائنج کی مساوات

$$فرت = \left( \frac{جفل}{جف طہ} \right) = \frac{جفل}{جف طہ}$$

ہو جاتی ہے ک گ = فرت طہ = ک ج م جب طہ



شکل (۱۵۳)



یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۲۴۵ میں حاصل ہوئی تھی اور اس سے حرکت معلوم کی جاسکتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لگرائج کے طریقہ سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اُس طریقہ پر منحصر نہیں ہے جو رفاص کو لٹکانے کا ہے، صرف یہ شرط ہے کہ وہ مذکورہ بالا طریقہ پر حرکت کرنے پر مجبور ہو۔ مثلاً نتیجہ درست رہتا ہے اگر وہ کوئی ٹیکنیسیں ہی نہ ہو اور ڈریلوں کے ذریعہ قیود عائد کئے جائیں۔

۲۷۲۔ اب ہم دوسرے متبادل پر غور کریں گے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ اگر ہم مف طہ، مف طہ، ...، مف طہ کی اختیاری قیمتیں مقرر کریں تو حاصل شدہ نئی تشکیل ہر صورت میں ممکن تشکیل نہ ہو۔ یہ ہو سکتا ہے کہ بعض خاص رشتے ہوں جو پورے ہونے چاہئیں تاکہ میکائینٹ کی باعث جو قیود ہیں ان میں کوئی خلل نہ پڑے۔

مثلاً اُس تشکیل میں جو قبل ازیں استعمال ہو چکی ہے فرض کرو کہ ایک کمرہ کی چھت سے دو درسیاں لٹک رہی ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو اوپر کی میکائینٹ دوسری رسی کو دو انچ اوپر چڑھنے پر مجبور کرتی ہے۔ فرض کرو کہ چھت کے نیچے رسیوں کے طول طہ، طہ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب ایسا ہٹاؤ جس میں مف طہ =  $\frac{1}{2}$  انچ اور مف طہ =  $\frac{1}{2}$  انچ ممکن ہٹاؤ نہیں ہے کیونکہ اوپر کی میکائینٹ ایسے ہٹاؤ کی اجازت نہیں دیتی۔ مف طہ، مف طہ میں ہمیشہ ربط

$$\text{مف طہ}_1 + \frac{1}{2} \text{ مف طہ}_2 = 0$$

ہونا چاہئے۔

عام صورت میں فرض کرو کہ میکائینٹ کی باعث چند قیود عائد ہوتے ہیں (۳۳۴) ان قیود کی شکل

$$1 \text{ مف طہ}_1 + 1 \text{ مف طہ}_2 + \dots + 1 \text{ مف طہ}_n = 0 \quad (162)$$

$$1 \text{ مف طہ}_1 + 2 \text{ مف طہ}_2 + \dots + 1 \text{ مف طہ}_n = 0 \quad (164)$$

وغیرہ ہے۔ تب مساوات (۱۶۵)

۳ [ فر (جفل) - جفل ] جفل = (۱۶۸)   
 صرف اسوقت درست ہے جبکہ مفل، مفل، مفل... مفل، مفل، مفل...   
 (۱۶۶) (۱۶۷) کو پورا کریں۔

(۱۶۵) لیکن ممکن ہوتا ہے کہ یہ مفط، مفط، مفط.... مفطین  
ایسے ہوں گے کہ یہ رشتے (۱۶۶) (۱۶۷) سب کے سب درست  
ہوں گے۔ فرض کرو کہ ہم لہ، مہ، .... اور اکائی سے ضرب دیتے ہیں  
اور جمع کرتے ہیں جہاں لہ، مہ، ... بتا حال غیر معین مقداریں ہیں ہم ان کو  
غیر معین ضارب کہہ سکتے ہیں۔ اب مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\left[ \text{فرت} \left( \frac{\text{جفال}}{\text{جفظم}} \right) - \frac{\text{جفال}}{\text{جفظم}} + \text{له} + \text{مه} + \text{ب} + \dots \right] \text{مفظم}$$

$$+ \left[ \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه}} - \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه}} \right) \right] + \left[ \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه}} + \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه}} + \dots \right] \text{جف طه}$$

$$+ \dots + \left[ \frac{\text{فرت}}{(\text{جف طهه})} - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طهه}} + \text{له له} \right]$$

$$+ \dots + b_n] = \text{مفطم} = (169)$$

مقداریں مف طہ، مف طہ، ... مف طن اختیار نہیں ہیں لیکن اگر نمونہ (۱۶۶) کے رشتے تعداد میں م ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مقدار مف طہ، مف طہ، مف طہ، ... مف طن میں سے تمام الا م کے اختیاری ہیں اور ان مقداروں میں سے (ن-م) مقداروں کو اختیاری قیمتیں دیکر باقی م مقداروں کو مساواتوں (۱۶۴)، (۱۶۵)، ... کے حل سے معلوم کرنا چاہئے۔ اس طریقہ پر حاصل شدہ تشکیل یا ضرور ممکن تشکیل ہونی چاہئے فرض کرو کہ ہم

مف طه مف طه مف طه ... مف طه

(۳۳۵)

کو اختیار ی قیمتیں دیتے ہیں اور پھر مساواتوں (۱۶۶) (۱۶۷) سے ..... سے  
مف طم<sub>۱</sub> مف طم<sub>۲</sub> ..... مف طم<sub>م</sub> کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔ نیز ہم م  
غیر معین ضابطوں لہ 'امہ' ..... کا انتخاب کرتے ہیں اس طور پر کہ وہ م  
مساواتوں

$$\text{فرت} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} + \text{لہ لہ} + \text{مہ بہ} + \dots = 0$$

(۱۶۰)

$$\text{فرت} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} + \text{لہ لہ} + \text{مہ بہ} + \dots = 0$$

(۱۶۱)

کو پورا کرتے ہیں جہاں لاصقہ اتام ہیں۔ تب مساوات (۱۶۹) ہو جاتی ہے

$$\left[ \text{فرت} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} + \text{لہ لہ} + \text{مہ بہ} + \dots \right]_{\text{م}}^{\text{ن}} = 0$$

چونکہ مف طم<sub>۱</sub> مف طم<sub>۲</sub> ..... مف طم<sub>ن</sub> سب کے سب  
اختیاری ہیں اس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$\text{مف طم}_1 = \text{مہ} = \text{مف طم}_2 = \text{مف طم}_3 = \dots = \text{مف طم}_n = 0$$

اور حاصل کر سکتے ہیں

$$\text{فرت} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} + \text{لہ لہ} + \text{مہ بہ} + \dots = 0$$

اسی طرح ہم م + ا سے ن تک تمام لاقحوں کے لیے وہی مساوات حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ مساوات لاقحوں ا تام کے لیے درست فرض کیجا چکی ہے (مقابلہ کرو مساواتوں (۱۷۰) ... (۱۷۱) [ - پس مساواتوں کا حسب ذیل مکمل نظام حاصل ہوتا ہے :

$$\text{فرت} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ} + \text{ا} + \text{مہ} + \text{ب} + \dots = ۰ \right.$$

$$\dots \dots \dots \text{فرت} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ} + \text{ا} + \text{مہ} + \text{ب} + \dots = ۰ \right.$$

جس میں لاقحے اتان ہیں - ان ن مساواتوں سے م غیر معین ضاربوں لہ' مہ' ... کو سا قی کیا جائے تو ن - م مساواتیں باقی رہتی ہیں جن سے محدودوں کی تبدیلیاں معلوم کی جا سکتی ہیں -

## توضیحی مثالیں

(۳۳۶)

۱- نصف قطر ا کا ایک تنجاس کرہ، نصف قطرب کے ایک ثابت کرہ کی بیرونی سطح پر بغیر پچلے لڑھکتا ہے - حرکت معلوم کرو -

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر مرکزوں کا خط سمت انتضائی سے زاویہ کہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ متحرک کرہ کی زاویہ رفتار طہ ہے - متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار

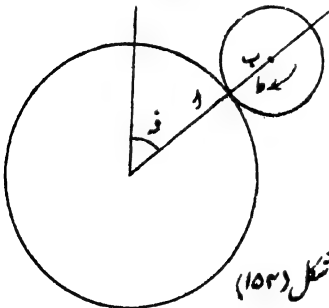
(۱ + ب) کہ ہے اور اس لیے

$$\text{ت} = \frac{۱}{۲} \text{ا} \text{ک} [ (۱ + ب) \text{ا} \text{کہ} + \frac{۲}{۵} \text{ا} \text{طہ} ]$$

اور توانائی بالقوہ ہے

$$\text{مہ} = \text{ک ج} (۱ + ب) \text{جہم کہ}$$

$$\text{اس لیے ل} = \text{ت} - \text{مہ}$$



شکل (۱۵۳)

$$= \frac{1}{4} \text{ اک } (1 + \text{ب}) \text{ ک } \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \text{ ک } \frac{1}{5} \text{ ط } - \text{ک ج } (1 + \text{ب}) \text{ جم } (1)$$

طہ اور کہ میں تغیرات اختیاری نہیں ہیں اور ہم انہیں جو چاہیں قیمتیں نہیں دیکتے کیونکہ تحسین کر کے مرکز کی رفتار (1 + ب) ک نہ ہے اور نیز 1 طہ ہونی چاہئے کیونکہ کرہ زاویائی رفتار طہ سے بغیر چلے اڑھک رہا ہے۔  
اس لیے

$$(1 + \text{ب}) \text{ ک } = 1 \text{ طہ} \quad (\text{ب})$$

یہ رشتہ ہر ممکن حرکت کے ہر لمحہ پر درست رہتا ہے اور اس لیے وقت کے لحاظ سے مکمل کرنے پر حاصل ہونا چاہئے

$$1 \text{ طہ} = (1 + \text{ب}) \text{ ک } + \text{مستقل}$$

اور اس لیے ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ محدودوں طہ، کہ کی تبدیلیاں رشتہ 1 مف طہ = (1 + ب) مف کہ کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اس طرح لگرائنج کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} + 1 = 0$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف کرہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف کرہ}} - 1 = 0$$

لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$(1 + \text{ب}) \left[ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right] + 1 \left[ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف کرہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف کرہ}} \right] = 0$$

مساوات (1) سے اندراج کرنے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$(1 + \text{ب}) \left[ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left( \frac{1}{5} \text{ ک } \frac{1}{5} \text{ طہ} \right) \right] + 1 \left[ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left( \frac{1}{5} \text{ ک } \frac{1}{5} \text{ کرہ} \right) \right] = 0$$

$$- \text{ک ج } (1 + \text{ب}) \text{ جب کہ } = 0$$

(۳۳۷)

۱ ط کی بجائے (۱ + ب) کہ رکھنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۵}{۶} ک ۱ (۱ + ب) = \frac{۵}{۶} ک ۱ (۱ + ب) = ک ۱ (۱ + ب) جب کہ$$

$$یا (۱ + ب) = \frac{۵}{۶} ک ۱ (۱ + ب) = ک ۱ (۱ + ب) جب کہ$$

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متحرک کرہ کا مرکز اس اسراع کے  $\frac{۵}{۶}$  اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے جو ایک پلٹنے ذرہ کا ہوگا اگر یہ ذرہ نصف قطر ۱ + ب کے ایک کرہ پر نیچے پھسلے۔

یہی نتیجہ طہ کو مساواتوں (۱) اور (ب) سے ساقط کرنے اور پھر کہ کو ایک واحد لگراج کا محدود سمجھنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

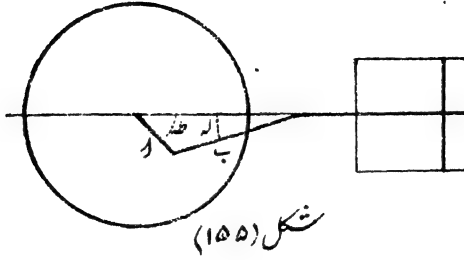
۲۔ ایک اڑپہیہ ایک فشار سے جو ایک افقی اسطوانے میں حرکت کرتا ہے ایک کرنیک اور ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہے۔ جب انجن میں بھاپ نہیں ہوتی تو اڑپہیہ اپنے توازن کے محل میں ساکن رہتا ہے۔ اس کی حرکت جبکہ وہ ہٹا ہوا ہو معلوم کرو۔ فرض کرو کہ کرنیک اور ڈنڈے کے طول ۱، ب ہیں اور طہ کہ وہ زاوے ہیں جو وہ اڑپہیہ کے کسی محل میں سمت افقی سے بناتے ہیں۔

تب انجن کا محل پوری طرح معلوم ہوتا ہے جبکہ طہ اور کہ معلوم ہوں۔ طہ اور کہ کی قیمتوں سے انجن کا محل معلوم ہوتا ہے لیکن اگر ہم طہ اور کہ کو اختیاری قیمتیں دیں تو انجن کا ممکن محل حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

اڑپہیہ، محور اور کرنیک کی گردش کی رفتار طہ ہے اور اس لیے اس حرکت کی توانائی بالحرکت  $\frac{۱}{۲} ع طہ^۲$  ہے جہاں ع، اڑپہیہ کے محور کے گرد انجن کے اس حصہ کا جمود کا معیار ہے۔ اگر ہم ڈنڈے کے مرکز ثقل کو اس کے وسطی نقطہ پر فرض کریں تو مرکز ثقل کے محدود جن کی پیمائش اڑپہیہ کے محور سے ہوئی ہو حسب ذیل ہیں:

$$افقی : ۱ جم طہ + \frac{۱}{۲} ب جم کہ$$

انتصابی :  $\frac{1}{p}$  ب جب کہ



اس طہ ڈنڈے کے مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں :  
(۱) جب طہ  $\times$  طہ +  $\frac{1}{p}$  ب جب کہ  $\times$  کہ (۲) افقاً  
(۳۳۸) انتصاباً  $\frac{1}{p}$  ب جم کہ  $\times$  کہ

اس لئے ڈنڈے کے مرکز ثقل کی پوری رفتار وہ  
و = (۱) جب طہ  $\times$  طہ +  $\frac{1}{p}$  ب جب کہ  $\times$  کہ + (۲)  $\frac{1}{p}$  ب جم کہ  $\times$  کہ  
= (۱) جب طہ  $\times$  طہ + (۲) ب جب طہ جب کہ  $\times$  طہ کہ +  $\frac{1}{p}$  ب کہ  
سے حاصل ہوگی۔ ڈنڈے کی زاویائی رفتار کہ ہے اور اس کے گھماؤ کا نصف قطر  
گ

$$گ = \frac{1}{3} \left( \frac{ب}{p} \right) = \frac{1}{12} ب$$

سے حاصل ہوگا۔

پس اگر ڈنڈے کی کمیت ک ہے تو اس کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} ک (و + گ)^۲ = \frac{1}{2} ک (و جب طہ جب کہ \times طہ + \frac{1}{p} ب کہ)^۲ + \frac{1}{2} ک \left( \frac{1}{3} \left( \frac{ب}{p} \right) \right)^۲$$

۴۔

بالآخر، اٹھ بیہ کے مرکز سے فتاری ڈنڈے کے سرے کا افقی فاصلہ

۱ حجم طہ + ب حجم کہ ہے اور اس لیے فشارہ اور فشاری ڈنڈے کی رفتار ہے  
 - ۱ جب طہ x طہ - ب جب کہ x کہ  
 اگر فشارہ اور اس کے ڈنڈے کی کمیت گ ہو تو انجن کے اس حصہ کی  
 توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} g (1 \text{ جب طہ } x \text{ طہ } + \text{ ب جب کہ } x \text{ کہ})^2$$

ہے -

اب پوری توانائی بالحرکت ت کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$2 \text{ ت} = \text{ع طہ} + \text{ک} (1 \text{ جب } 2 \text{ طہ } x \text{ طہ} + 1 \text{ ب جب طہ جب کہ } x \text{ کہ طہ})$$

$$+ \frac{1}{2} \text{ ب } 2 \text{ کہ} (1 \text{ ک} + 1 \text{ جب طہ } x \text{ طہ} + \text{ ب جب کہ } x \text{ کہ})^2$$

(۱)  
 توانائی بالقوہ جس کی پیمائش معیاری تشکیل طہ = کہ = سے ہوئی ہو

م = - (ک ج = جب (طہ + م) - ۱ ک ج ب جب کہ (ب)  
 ہے جہاں ک اڑ پھیلا اور کرنیک کی کل کمیت ہے اور اس کے مرکز ثقل کے  
 قطبی محدود م = م ہیں جبکہ طہ = -

طہ اور کہ کی تبدیلیاں غیر تابع نہیں ہیں۔ شکل پر سرسری نظر ڈالنے  
 سے یہ معلوم ہو گا کہ رشتہ

$$(ج) \quad 1 \text{ جب طہ} = \text{ب جب کہ}$$

ہمیشہ قائم رہنا چاہئے اور اس کو تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ اور کہ  
 کو تقسیمی محدودوں کے طور پر لیا جائے تو ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ وہ رشتہ  
 ۱ حجم طہ مف طہ - ب حجم کہ مف کہ =

کے ذریعہ مربوط ہیں -

اس طرح لگرائج کی مساواتیں ہونگی :

$$(د) \quad \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} = \left( \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ ۱ حجم طہ} = 0$$



$$\text{فرز} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف کر}} \right) - \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف کر}} \right) - \text{لہ ب جم کہ} = ۰ \quad (ع)$$

(۳۳۹)

ان مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ب جم کہ} \left[ \text{فرز} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) \right]$$

$$+ \text{لہ جم طہ} \left[ \text{فرز} \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف کر}} \right) - \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف کر}} \right) \right] = ۰$$

اور لی کی بجائے مساواتوں (۱) اور (ب) سے اس کی قیمت درج کرنے سے یہ مساوات طہ اور کہ کے اور ان کے تفرقی سروں (بلحاظ وقت) کے درمیان ایک مساوات ہو جاتی ہے۔ اس مساوات اور ہندسی ربط (ج)

(ف)  $\text{لہ جب طہ} = \text{ب جب کہ}$  سے ہم طہ اور کہ کو وقت کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔

مساوات (ف) استعمال کر کے ہم مساوات (ب) کو  $\text{م} = \text{لہ ج} = \text{ب جب} (\text{طہ} + \text{صہ}) - \frac{۱}{۴} \text{ک ج} \text{ لہ جب طہ}$  میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

اگر پیہ پر مناسب اوزان کو اس طریقہ پر رکھا جاسکتا ہے کہ

$$\text{صہ} = \text{لہ ج} + \frac{۱}{۴} \text{ک ج} = ۰$$

اور اگر ایسا ہو جائے تو مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی ارتفاع پر رہے گا۔ اسے انجن کو متوازن کرنا کہتے ہیں۔

اگر ہم یہ فرض کر لیں کہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا جا چکا ہے تو

$\text{م} = ۰$  اور اس لیے  $\text{لہ ج} = \text{ت}$ ۔ لیکن ہم لگرائج کی مساواتیں استعمال

کئے بغیر حرکت کو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ ت کو کل حرکت کی اثناء میں مستقل رہنا چاہئے اور مساوات (ف) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لہ جم طہ} \times \text{طہ} = \text{ب جم کہ} \times \text{کہ}$$

اور اس لیے ہم مساوات (۱) کی بجائے رکھ سکتے ہیں  

$$۲ت = ع ط^۱ + ک (اُجب ط^۱ ط^۱ \times ط^۱ + اُجب ط^۱ ط^۱ مس کہ \times ط^۱$$

$$+ \frac{۱}{۲} اُجب ط^۱ ق^۱ کہ \times ط^۱) + ک (اُجب ط^۱ ط^۱ \times ط^۱ + اُجب ط^۱ مس کہ \times ط^۱)$$

$$= ط^۱ [ ع + ک اُجب ط^۱ جب (ط^۱ + ک) ق^۱ کہ + \frac{۱}{۲} ک اُجب ط^۱ ق^۱ کہ$$

$$+ ک اُجب ط^۱ (ط^۱ + ک) ق^۱ کہ ]$$

یہ کل حرکت میں مستقل ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے نتیجہ نہیں نکلتا  
 کہ ط^۱ مستقل ہے۔ پس اگرچہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا گیا ہو کہ وہ کسی محل  
 میں ساکن رہ سکے تاہم اس کا یکساں حرکت کرنا ضروری نہیں ہے اگر اسے حرکت  
 میں لایا جائے۔

## غیر ثباتی نظامات کے لیے لگرنج کی مساواتیں

۲۷۳۔ غیر ثباتی نظاموں کے لیے دفعہ (۲۶۸) میں بتایا جا چکا ہے  
 کہ مساوات (۱۵۶)

$$مک^۱ مف لی فرت = ۰ \quad (۱۷۲)$$

کی بجائے مساوات

$$مک^۱ [ مف ت + ج (لا مف لا + ما مف ما$$

$$+ ع مف ی) ] فرت = ۰ \quad (۱۷۳)$$

رکھی جانی چاہئے۔

اب چونکہ حسب مساوات (۱۵۸)

$$لا = ف (ط^۱، ط^۱، ...، ط^۱، ط^۱)$$

اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$مف لا = لا - لا$$

(۳۴۰)

$$= \text{ف} (\text{ط} + \text{مف} \text{ط} + \text{ط} + \text{مف} \text{ط} + \dots) - \text{ف} (\text{ط} + \text{مف} \text{ط} + \dots)$$

$$= \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}} + \frac{\text{مف ط}}{\text{جف ط}} + \dots$$

جہاں دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداریں نظر انداز کی گئی ہیں۔  
اس طرح

$$\text{ح} (\text{لا مف لا} + \text{ما مف ما} + \text{ے مف ی}) = \text{طا مف ط}$$

$$+ \text{طا مف ط} + \dots + \text{طا مف ط}$$

جہاں 'طا'، 'طا'، 'طا'، 'طا'، 'طا'، 'طا' کی شکل پر منحصر ہیں اور اس لیے وہ  
صرف 'طا'، 'طا'، 'طا'، 'طا' کے تفاعل ہیں۔

مساوات (۱۷۳) اب ہو جاتی ہے

$$\text{گت مف ت فرت} + \text{گت} (\text{طا مف ط} + \text{طا مف ط} + \dots)$$

$$+ \dots + \text{طا مف ط} (\text{فرت} = \dots) \quad (۱۷۴)$$

جس طرح دفعہ (۲۷۰) میں ہم نے معلوم کیا تھا کہ

$$\text{گت مف ل فرت}$$

$$\text{گت} \left\{ \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{فرت}}{\text{جف ط}} \right\} \text{گت} \left\{ \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{فرت}}{\text{جف ط}} \right\} \text{گت} \left\{ \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{فرت}}{\text{جف ط}} \right\}$$

میں مستعمل کیا جاسکتا ہے عین اسی طرح مساوات (۱۷۴) کی پہلی رقم کو

$$\text{گت} \left\{ \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{فرت}}{\text{جف ط}} \right\} \text{گت} \left\{ \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{فرت}}{\text{جف ط}} \right\} \text{گت} \left\{ \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{فرت}}{\text{جف ط}} \right\}$$

میں مستعمل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو درج کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

(۳۴۱) اب چونکہ یہ وقت کی تمام ممکن ساعتوں کے لیے درست ہے اس لیے ہر لمحہ پر حاصل ہونا چاہئے

حجۃ مفطم  $\left[ \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} - \frac{\text{فر}}{\text{فر (جفت طہ)}} + \text{طاہ} \right] = ۰$  (۱۴۵)  
 اگر مختلف طہ بغیر کسی قید کے متغیر ہو سکتے ہیں یعنی اگر مفطم طہ،  
 مفطم طہ، ...، مفطم طہ کو ہم جو چاہیں قیمتیں دے سکیں تو ہر سر کو معدوم  
 ہونا چاہئے اور اس صورت میں مساواتوں کا نظام ہوگا

$$\text{فر} \left( \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} - \text{طاہ} = ۰ \quad (۱۴۶)$$

لیکن اگر مفطم طہ، مفطم طہ، ...، مفطم طہ ان قیود کے پابند ہوں جو  
 مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... میں ظاہر کئے گئے ہیں تو حسب دفعہ  
 ۲۷۲ ہم معلوم کرتے ہیں کہ مساواتوں کے اس نظام کی بجائے نظام

$$\text{فر} \left( \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} - \text{طاہ} + \text{لہ} + \text{مہ} + \text{بہ} + \dots = ۰$$

(۱۴۷)

کو رکھنا چاہئے۔

۲۷۴ — مساواتوں کے یہ نظام ان نظاموں میں تحویل ہوتے ہیں جو  
 بقائی قوتوں کی خاص صورت میں قبل ازیں حاصل کئے جا چکے ہیں۔  
 کیونکہ اس صورت میں اس کام پر غور کرو جو ایک خفیف ہٹاؤ میں جس میں  
 صرف طہ، بد لکر طہ، + مفطم طہ ہو جاتا ہے انجام پاتا ہے۔ یہ کام  
 طاہ مفطم طہ اور نیز وہ -  $\frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}}$  مفطم طہ ہے اور اس لیے

$$\text{طا} = - \frac{\text{جف م}}{\text{جف ط}}$$

$$\text{اس طرح جفت} = \text{طا} = \frac{\text{جفت}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جفل}}{\text{جف ط}}$$

$$\text{اور جفت} = \frac{\text{جف (ل + م)}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جفل}}{\text{جف ط}}$$

کیونکہ م میں ط شامل نہیں ہوتا۔ اس طرح مساوات (۱۷۵) حسب سابق

$$\text{فرز} = \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جف ط}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف ط}} = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اسی طریقہ پر مساواتیں (۱۷۷) ... ان مساواتوں میں سیکھ ہو سکتی ہیں جو دونوں ۲ میں حاصل ہو چکی ہیں۔

(۳۴۲) لگراج کی مساواتوں کو راست استحالہ سے حاصل کرنا  
۲۷۵۔ لگراج کی مساواتوں کو مساوات (۱۵۶) سے اخذ کرنے کی بجائے انہیں حرکت کی مساواتوں کے استحالہ سے راست حاصل کیا جاسکتا ہے۔

حسب سابق

$$\text{لا} = \text{ف (ط، ط، ...، ط)}$$

اور اس لیے تفرق کرنے پر

$$\text{فر لا} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{فرز}} + \frac{\text{فر ط}}{\text{جف ط}} + \dots$$

$$\text{یا لا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} + \dots (۱۷۸)$$

اس طرح لا، ایک خطی تعامل ہے ط، ط، ط، ... کا اور

$$(۱۷۹) \quad \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$$

نیز چونکہ

$$ت = \frac{۱}{۴} \times ک (لا + ما + نی)$$

اس لیے ت حسب سابق طہ، طہ، ... کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس میں طہ، طہ، ... بھی شامل ہیں۔ تفرق سے

$$\text{جف ت} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \times ک (لا \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + ما \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + نی \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}})$$

یا مساوات (۱۷۹) سے

$$\text{جف ت} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \times ک (لا \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + ما \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + نی \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}})$$

اس طرح

$$\text{فر} = \frac{(\text{جف ت})}{(\text{جف طہ})} = \frac{ک (لا \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + فر \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + فر \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + فر \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}})}{}$$

$$+ \frac{فر \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}}}{}$$

$$+ ک [لا \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + فر \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + فر \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + فر \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}}]$$

$$+ نی \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}}] \dots \dots (۱۸۰)$$

چونکہ  $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$  ایک تفاعل ہے طہ، طہ، ... کا اس لیے

(۳۴۳)

$$\text{فر} = \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}}$$

$$+ \dots \dots (۱۸۱)$$

لیکن مساوات (۱۷۸) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} = \frac{\text{جف لا طم}}{\text{جف طم}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} + \dots + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} \quad (۱۸۲)$$

مساواتوں (۱۸۱) اور (۱۸۲) کے بائیں جانبی ارکان مماثل ہیں

اس لیے

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} = \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}$$

اور مساوات (۱۸۰) کی آخری سطر

$$\text{ک} = \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طم}} + \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طم}} \right)$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس کی قیمت

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف طم}} \text{ ک} = \left[ \frac{1}{\text{فر}} (\text{لا} + \text{ما} + \text{نی}) \right]$$

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم}}$$

ہے یا

اب مساوات (۱۸۰) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \left( \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم}} \right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم}}$$

$$= \text{ک} = \left( \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طم}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طم}} \right)$$

$$+ \frac{\text{فر نی}}{\text{فر ت}} \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طم}}$$

لیکن حرکت کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ک} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \text{ لا وغیرہ}$$

اس لیے مساوات مندرجہ بالا ہو جاتی ہے

$$\Sigma (\frac{\text{جفت لا}}{\text{جفت طه}}) = \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طه}} - (\frac{\text{جفت}}{\text{جفت طه}}) \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$$



اور مساوات

$$۳ \text{ مف طم } = \left[ \text{فرت} \left( \frac{\text{جفت طم}}{\text{جفت طم}} \right) - \frac{\text{جفت طم}}{\text{جفت طم}} - \text{طا} \right] = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

یہ مساوات وہی ہے جو (۱۷۵) ہے اور لکرائج کی مساواتوں کی مختلف شطیں حسب سابق افذ کی جاسکتی ہیں۔

## دوہکے والی قوتوں کے لیے لکرائج کی مساواتیں

۲۷۶۔ فرض کرو کہ دہکوں کا ایک نظام چھوٹے وقفہ ت = ت<sub>۱</sub> تا ت = ت<sub>۲</sub> عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ طم، طم، طم، ...، طم غیر تابع عدد ہیں اور اس لیے لکرائج کی مساواتیں ہیں:

$$\text{فرت} \left( \frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}} \right) - \frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}} = \text{طا، وغیرہ}$$

اگر ہم اس مساوات کو فرت سے ضرب دیں اور ت = ت<sub>۱</sub> سے ت = ت<sub>۲</sub> تک تکمیل کریں تو

$$\text{م}^۲ \text{ فرت} \left( \frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}} \right) - \text{م}^۲ \frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}} = \text{م}^۲ \text{ طا فرت}$$

پہلی رقم کی قیمت ہے

$$\left( \frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}} \right) - \left( \frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}} \right) = \text{ت} = \text{ت}$$

اور جب وقفہ ت<sub>۱</sub> تا ت<sub>۲</sub> کو انتہائی چھوٹا کیا جاتا ہے تو جملہ بالا صرف

اُس تبدیلی کی پیمائش کرتا ہے جو دوہکے نے  $\frac{\text{جفت ت}}{\text{جفت طم}}$  میں پیدا (۳۴۵) کی ہے۔

دوسری رقم  $\frac{جفت}{جفت}$  فرت میں تکمل  $\frac{جفت}{جفت}$  محدود ہے  
 اور اس لیے جب وقت کے وقفہ کو لا انتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو  
 یہ رقم بھی وقت کے ساتھ معدوم ہوگی۔ اس طرح مساوات ہو جاتی ہے:  
 $\frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت} = 1$  (۱۸۳) طا فرت  
 ۲۷۷۔ اگر ف معمولی قوت ہو جو وقفہ ست تا ست میں دہکے کی طرح  
 عمل کرے تو ہم  $\frac{جفت}{جفت}$  فرت کو دہکے کہتے ہیں۔ تعمیم شدہ محدود  $\frac{جفت}{جفت}$  کے  
 جواب میں

$\frac{جفت}{جفت}$  طا فرت

کو تعمیم شدہ دہکے کہا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات (۱۸۳) شکل

$\frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت}$  میں تبدیلی = تعمیم شدہ دہکے  
 میں حاصل ہوتی ہے۔  
 رشتہ

کسی ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی = ذرہ پر دہکے  
 کے ساتھ مساوات بالائی مشابہت ہونے کی وجہ سے  $\frac{جفت}{جفت}$  کو تعمیم شدہ  
 معیار حرکت کہتے ہیں جو محدود  $\frac{جفت}{جفت}$  کے متناظر ہے۔ پس اصطلاحات  
 ”دہکے“ اور ”معیار حرکت“ کے ان معنوں کے ساتھ رشتہ  
 معیار حرکت کی تبدیلی = دہکے  
 تعمیم شدہ محدود میں بھی درست ہے۔

جب ہمارے محدود لا، ما، ی ہوں جو فضا میں ایک متحرک ذرہ کے محدود ہیں تو تعمیم شدہ معیار حرکت بلاشبہ معیار حرکت کے معمولی اجزائے ترکیبی کے حاصل ہو جائیں گے۔ چنانچہ

$$\text{ت} = \frac{1}{\text{ک}} (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})$$

$$\frac{\text{جفت}}{\text{جفت لا}} = \text{ک لا، وغیرہ}$$

اس لیے

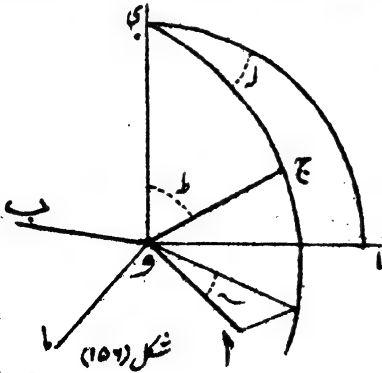
## استوار جسم کے لیے یو لر کی مساواتیں

(۳۴۶)

۲۷۸ — یو لر کی مساواتیں (دفعہ ۲۵۳) لگرائج کی مساواتوں سے اخذ کیجا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک استوار جسم ہے جس میں نقطہ و ثابت ہے اور نیز یہ نقطہ فضا میں ثابت ہے یا وہ جسم کا مرکز ثقل ہے۔ فرض کرو کہ اس استوار جسم کے معیار نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کے گرد (ا، ب، ج) ہیں۔ تب اگر ان محدودوں کے گرد گردش کے اجزائے ترکیبی  $\text{س}^1، \text{س}^2، \text{س}^3$  ہوں تو حسب دفعہ ۲۴۸ حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ت} = \frac{1}{\text{ک}} (\text{ا}^1 \text{س}^1 + \text{ب}^2 \text{س}^2 + \text{ج}^3 \text{س}^3) \quad (۱۸۴)$$



لگرائجی محدودوں کے طور پر  
فرض کرو کہ جسم کے تیسرے محور  
و ج کے گردی قطبی محدودہ لہ ہیں  
اور ایک تیسرا محدود سہ جسم کے  
محور اول و ا اور اس مستوی کا  
درمیانی زاویہ ہے جو و ج اور  
محور طہ = ۰ میں سے گذرتا ہے  
یعنی مستوی ج و ی۔

ہیں اول سہ، سہ، سہ کو طہ، لہ، سہ کی رقوم میں معلوم کرنا ہے تاکہ ۲ قوت، ان محدودوں کے تفاعل کے طور پر بیان ہو سکے۔ جسم کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے یعنی وہ حرکت جو مستوی ج وی کے لحاظ سے ہے اور وہ حرکت جو مستوی ج وی کی بلحاظ ثابت محوروں کے ہے۔ اول الذکر حرکت، وج کے گرد گردش سنہ پر مشتمل ہے اور اگر اس کو محوروں و ا، و ب، وج پر تحلیل کیا جائے تو اس کے اجزائے ترکیبی

، ، ، سنہ

ہیں۔

مستوی ج وی کی حرکت دو گردشوں یعنی (ا) گردش طہ جو مستوی ج وی کے علی القوائم محور کے گرد ہے، (ب) گردش لہ جو محور طہ = کے گرد ہے سے مرکب ہے۔

اگر ان گردشوں کو محاور و ا، و ب، وج کی سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو پہلے حصہ کے اجزائے ترکیبی طہ جب سہ، طہ جم سہ، اور دوسرے کے اجزائے ترکیبی

(۳۴۷)

۔ لہ جب طہ جم سہ، لہ جب طہ جب سہ، لہ جم طہ

ہیں۔

ان حرکتوں کو مرکب کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\begin{cases} \text{سہ} = \text{طہ جب سہ} - \text{لہ جب طہ جم سہ} \\ \text{سہ} = \text{طہ جب سہ} + \text{لہ جب طہ جب سہ} \\ \text{سہ} = \text{سہ} + \text{لہ جم طہ} \end{cases}$$

(۱۸۵)

فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام طامف طہ + لامف لہ + سامف سہ

ہے۔ تب محدود سا کے لیے لگراج کی مساوات ہے:

$$(۱۸۶) \quad \frac{\text{جف}}{\text{جف ت}} - \left( \frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}} \right) = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}} \text{ سا}$$

مساوات (۱۸۴) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}} = \left( \frac{\text{جف سہ}}{\text{جف ت}} + \frac{\text{جف سہ}}{\text{جف سہ}} + \frac{\text{ج سہ}}{\text{جف سہ}} \right) = \frac{\text{ج سہ}}{\text{جف سہ}} \text{ مساواتوں (۱۸۵) سے اندراج کرنے پر۔}$$

نیز

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}} = \left( \frac{\text{جف سہ}}{\text{جف ت}} + \frac{\text{جف سہ}}{\text{جف سہ}} + \frac{\text{ج سہ}}{\text{جف سہ}} \right)$$

$$= \left( \frac{\text{طہ جم سہ}}{\text{طہ جب سہ}} + \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} + \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} \right)$$

$$+ \left( \frac{\text{ب سہ}}{\text{ب سہ}} - \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} + \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} \right)$$

$$= \left( \frac{\text{ب سہ}}{\text{ب سہ}} - \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} + \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} \right)$$

بالآخر سامف سہ وہ کام ہے جو بیرونی قوتیں چھوٹی گردش مف سہ میں انجام دیتی ہیں اور اس لیے بموجب دفعہ (۱۲۱) سا، محور و ج کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ ن کے مساوی ہے۔

ان تمام اندراجات کو عمل میں لانے پر مساوات (۱۸۶) ہو جاتی ہے: (۳۲۸)

$$\text{ج فرسہ} - \left( \frac{\text{ب سہ}}{\text{ب سہ}} - \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} + \frac{\text{طہ جب سہ}}{\text{طہ جب سہ}} \right) = \text{ن}$$

جو یو لکری تیسری مساوات ہے اور دوسری دو مساواتوں کو تشاکل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

چھوٹے اہتزاز

۲۷۹۔ فرض کرو کہ کسی نظام کے تعمیم شدہ محدود طہ، طہ، طہ، طہ، طہ، طہ ہیں اور فرض کرو کہ یہ تمام محدود غیر تابع ہیں اور اس لیے طہ، طہ، طہ، طہ، طہ، طہ کی

قیمتوں کے کسی جٹ سے نظام کی ایک ممکن تشکیل حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ تشکیل} \\ (۱۸۶) \quad \text{طہ} = \text{طہ}^۱, \text{طہ}^۲ = \text{طہ}^۳, \dots, \text{طہ}^۱ = \text{طہ}^۱$$

توازن کی تشکیل ہے۔ اب اگر

$$\text{لہ} = \text{طہ} - \text{طہ}^۱, \text{لہ}^۲ = \text{طہ}^۲ - \text{طہ}^۱, \dots, \text{لہ}^۱ = \text{طہ}^۱ - \text{طہ}^۱$$

تو مقداروں لہ، لہ<sup>۱</sup>، لہ<sup>۲</sup>، ...، لہ<sup>۱</sup> کو نظام کے تعمیم شدہ محدودوں کے طور پر لیا جاسکتا ہے اور یہ محدود توازن کے محل میں سب کے سب معدوم ہونگے۔ فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں توانائی بالقوہ کی قیمت گ ہے تبصرہ کی گئی ہے۔ کسی دوسری تشکیل میں توانائی بالقوہ کے جملہ کو ٹیلر کے مسئلہ سے شکل

$$گ = گ + لہ \frac{جف ک}{جف طہ} + لہ^۲ \frac{جف ک}{جف طہ} + \dots + لہ^۱ \frac{جف ک}{جف طہ}$$

$$+ \frac{۱}{۲} (لہ^۱ \frac{جف ک}{جف طہ} + لہ^۲ \frac{جف ک}{جف طہ} + \dots + لہ^۱ \frac{جف ک}{جف طہ})$$

میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرقی سروں کو توازن کے محل میں محسوب کیا گیا ہے۔ لیکن توازن کے اس محل میں دفعہ ۱۳۵ کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{جف ک}{جف طہ} = \frac{جف ک}{جف طہ} = \dots = \frac{جف ک}{جف طہ} =$$

اس لیے گ کی قیمت کو شکل (۳۲۹)

$$گ = گ + لہ^۱ + لہ^۲ + \dots + لہ^۱$$

میں لکھا جاسکتا ہے جس میں لہ، لہ<sup>۱</sup>، ... کی وہ قیمتیں جو دو سے بڑھیں

نظر انداز کر دی گئی ہیں کیونکہ ہم صرف ان حرکتوں پر توجہ محدود رکھتے ہیں جن میں  $ل^۱، ل^۲، ...$  سب کے سب چھوٹی مقدار میں ہیں۔  
توانائی بالحرکت حسب سابق (دفعۃً)  $ل^۱، ل^۲، ...$  نہ کا  
ایک دو درجی تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ

$$ت = ب^۱ ل^۱ + ب^۲ ل^۲ ل^۱ + ... + ب^n ل^n ل^۱ \quad (۱۸۹)$$

سر  $ب^۱، ب^۲، ...، ب^n$  فی الحقیقت طہ، طہ، ...، طہ کے  
تفاعلات ہیں لیکن ہم ان کی قیمتوں کو ان قیمتوں کے مساوی سمجھ سکتے ہیں  
جو توازن کی تشکیل میں حاصل ہوتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل مقداروں  
کے طور پر سمجھا جاسکتا ہے۔  
۲۸۰۔ اب ان متغیروں  $لا، لا، لا، ...، لان$  کے دو درجی دو تفاعلوں  
پر غور کرو جو حسب ذیل ہیں:

$$ف (لا، لا، ...، لان) = لا^۱ لا^۱ + لا^۲ لا^۱ لا^۱ + ... + لا^n لا^۱ لان$$

$$ف (لا، لا، لا، ...، لان) = ب^۱ لا^۱ + ب^۲ لا^۱ لا^۱ + ... + ب^n لان$$

چونکہ تفاعل  $ت$  جس کی تعریف مساوات (۱۸۹) سے کی گئی ہے  
بالضرور مثبت ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $ف (لا، لا، لا، ...، لان)$  کو  
 $لا، لا، لا، ...، لان$  کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہونا چاہئے۔ پس  
جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلہ سے ہم حسب ذیل نمونے کا ایک  
استعمال معلوم کر سکتے ہیں:

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = کہ^۱ ضا + کہ^۲ ضا + ... + کہ^n ضا \\ لا = کہ^۱ ضا + کہ^۲ ضا + ... + کہ^n ضا \end{array} \right. \quad (۱۹۰)$$

جس میں سرکہ وغیرہ حقیقی ہیں۔ یہ احتمالہ ایسا ہے کہ ف اور ف حسب ذیل نمونے کے جملوں میں مستحیل ہوتے ہیں:

$$ف(لا، لا، ...، لا) = عم ضا + عم ضا + ... + عم ضا$$

$$ف(لا، لا، لا، ...، لا) = بہ ضا + بہ ضا + ... + بہ ضا$$

اور تمام سر بہ، بہ، ...، بہ بن مثبت ہوں گے۔

اس مسئلہ کے جبریہ ثبوت علم التحلیل کے مقالات یا سامن کی ہائر الجبرا میں ملیں گے۔ یہ مسئلہ ایک ہندسی تعبیر جس میں متغیروں کی تعداد تین ہے غور کرنے سے فوراً سمجھ میں آجائے گا۔ متغیروں کو لا، ما، ی لینے سے مساواتیں

(۳۵۰)

$$ف(لا، ما، ی) = ا، ف(لا، ما، ی) = ا \quad (۱۹۱)$$

ہم مرکز دو درجیوں کی مساواتیں ہوں گی اور چونکہ لا، ما، ی کی تمام قیمتوں کے لیے ف مثبت ہے اس لیے دوسرا دو درجی ایک ناقص نما ہوگا۔ یہ معلوم ہے کہ اگر دو ہم مرکز دو درجیوں میں سے ایک ناقص نما ہو تو ایسے دو درجی، باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ اس نمونے کے احتمالہ سے جس کو مساوات (۱۹۲) سے بیان کیا گیا ہے ہم محددوں کے محوروں کو ان وتروں پر منتقل کر سکتے ہیں اور تب دو درجیوں کی مساواتیں مطلوبہ اشکال

$$عم ضا + عم ضا + عم ضا = ا، بہ ضا + بہ ضا + بہ ضا = ا \quad (۱۹۲)$$

میں حاصل ہوتی ہیں۔

[معمولی استدلال سے اس ہندسی مسئلہ کی صداقت ظاہر ہوگی کہ ایک ناقص نما اور ایک دوسرا دو درجی ہمیشہ باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ کیونکہ ایک حقیقی قطعی احتمالہ سے ناقص نما ایک کڑ میں مستحیل ہوگا اور دوسرا دو درجی ایک نئے لیکن تاہم حقیقی دو درجی میں مستحیل ہوگا۔ اب



اس حقیقی دو درجی کے صدر محور، کُرہ اور دو درجی کے لیے باہم مزدوج حقیقی قدریں اور الٹا استحالہ کرنے سے باہم مزدوج حقیقی وتر باہم مزدوج حقیقی وتر رہتے ہیں۔  
 اوپر ہم نے جبریہ طور پر ثابت کیا ہے کہ مساواتیں (۱۹۱) مساواتوں (۱۹۲) میں مستحیل ہو سکتی ہیں لیکن یہ ظاہر ہے کہ یہ جبریہ ثبوت صرف تین متغیروں کی صورت پر محدود نہیں ہے اس لیے مسئلہ بالا متغیروں کی کسی تعداد کے لیے درست ہونا چاہئے۔

۲۸۱۔ اس مسئلہ سے ثابت ہوتا ہے کہ ہم نئے محدود سہ، سہ، سہ، سہ معلوم کر سکتے ہیں جو محدودوں لہ، لہ، لہ، لہ سے رشتوں

$$لہ = کہ سہ + کہ سہ + ..... + کہ سہ \quad (۱۹۳)$$

$$لہ = کہ سہ + کہ سہ + ..... + کہ سہ \quad (۱۹۴)$$

کے ذریعہ مربوط ہوں اس طور پر کہ اگر ان محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت حسب ذیل اشکال اختیار کریں:

$$گ = گ + عم سہ + عم سہ + ..... + عم سہ \quad (۱۹۵)$$

$$ت = تہ سہ + تہ سہ + ..... + تہ سہ \quad (۱۹۶)$$

محدودوں سہ، سہ، سہ، سہ، سہ کو نظام کے صدر محدود کہا جاتا ہے، بعض مصنف ان کو طبعی محدود بھی کہتے ہیں۔  
 ان محدودوں کی رقوم میں لگراج کی مساواتیں ہیں:

(۲۵۱)

$$\frac{فر}{فر} = \left( \frac{جفت}{جفت سہ} \right) - \left( \frac{جفت}{جفت سہ} \right) = - \frac{جفت}{جفت سہ} \quad \text{و غیرہ}$$

ہیں اور یہ مساواتیں

$$تہ = \frac{فر}{فر} - عم سہ \quad \text{و غیرہ}$$

ہو جاتی ہیں -

## قائم توازن

۲۸۲ - اگر ہم مثبت ہے تو فرض کر دو کہ ہم  $\frac{1}{2} = 1$  کہہ رہے ہیں اور اس لیے کہ حقیقی ہوگا - مساوات اب ہے

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

اور اس کا حل ہے

۱۹۸ (۱۹۸)  $\frac{1}{2} = 1$  جم (کہ ت - صہ) جو دفعہ (۲۰۸) کے مطابق ہے - اس طرح حرکت تعداد کی سادہ ہوگی حرکت ہے - اگر تمام سرعہ، عم، ....، عن مثبت ہوں تو مساواتوں کے مکمل حل کی شکل

$\frac{1}{2} = 1$  جم (کہ ت - صہ) ہوگی اور کسی ذرہ کا محدود جس کی قیمت توازن کے محل میں لا ہے حسب ذیل ہوگی :

$$لا = لا + (طہ - طہ) \frac{جف لا}{جف طہ} + (طہ - طہ) \frac{جف لا}{جف طہ} + \dots$$

$$= لا + لا + لا + \dots + \frac{جف لا}{جف طہ} + \frac{جف لا}{جف طہ} + \dots$$

$لا + لا + لا + \dots$  جم (کہ ت - صہ) + جم (کہ ت - صہ) + ... جہاں  $لا + لا + لا + \dots$  منے مستقلات ہیں - پس کسی واحد ذرہ کی حرکت وہ حرکت ہوگی جو متعدد سادہ موسیقی

حرکتوں سے مرکب ہوگی۔

۲۸۳۔ کسی صدر محدس کے جواب میں توانائی بالقوہ عم<sup>۱</sup> سے<sup>۲</sup> ہے یا اگر ہم سم کو مساوات (۱۹۸) سے حاصل کریں تو یہ توانائی بالقوہ عم<sup>۱</sup> (مجم<sup>۲</sup> کہ ت - ص) ہے۔

اسی طرح اس صدر ارتعاش کے جواب میں توانائی بالحرکت عم<sup>۱</sup> یا

عم<sup>۱</sup> کم<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> (کہ ت - ص)

ہے۔ اگر ایک طویل وقت کے لیے اوسط لیا جائے تو جم<sup>۲</sup> (کہ ت - ص) اور جب<sup>۲</sup> (کہ ت - ص) کی اوسط قیمتیں  $\frac{1}{2}$  ہیں اور اس لیے اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت علی الترتیب  $\frac{1}{2}$  عم<sup>۱</sup>،  $\frac{1}{2}$  یہ<sup>۲</sup> کم<sup>۲</sup>

ہیں اور یہ مساوی ہیں کیونکہ کم<sup>۲</sup> = عم<sup>۱</sup>۔ پس کسی ارتعاش میں اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت مساوی ہوتی ہیں۔

### غیر قائم توازن

۲۸۴۔ فرض کرو کہ مساوات (۱۹۵) کے سروں میں سے کوئی ایک سر (فرض کرو عم) منفی ہے۔ فرض کرو کہ ہم  $\frac{1}{2}$  = کم<sup>۲</sup> رکھتے ہیں تو کہ حقیقی ہوگا۔ اب مساوات (۱۹۷) شکل

$$\frac{1}{2} \text{ فرس} = \text{کم}^2$$

اختیار کرتی ہے اور اس کا مل ہے

$$S = A + B + C$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہم وقت کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور قیمت ہم  $\propto$  کے گرد امتیاز نہیں کرتا۔ اس طرح حرکت غیر قائم ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت صرف اس وقت قائم ہو سکتی ہے جبکہ سہروں  $e_1, e_2, \dots, e_n$  میں سے سب سر مثبت ہوں۔ بالفاظ دیگر

دیکھ  
 قائم توازن کے لیے توانائی بالقوہ توازن کی تشکیل میں  
 مطلقاً اقل ہونی چاہئے۔  
 یہ وہ نتیجہ ہے جس کو بغیر ثبوت کے دفعہ ۱۵۳ میں بیان کیا جا چکا ہے۔

قصری ارتعاش

۲۸۵۔ وہ اہتزاز جن پر ہم اب تک غور کرتے رہے ہیں اس نمونے کے ہیں جو آزاد ارتعاش کے طور پر مشہور ہیں یعنی کل عالم قوتیں خود نظام کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن اہنتراز کا ایک اور نمونہ پیش ہوتا ہے جبکہ نظام پر ان قوتوں کے علاوہ جو خود انہیں کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں بیرونی جانب سے دوسری قوتیں بھی عمل کر رہی ہوں۔ ان اہنترازوں کو قسری اہنتراز کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت علی الترتیب مساواتوں (۱۹۵) اور (۱۹۶) سے حاصل ہوئی ہیں اور یہ کہ کسی لمحہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا نظام ایسا ہے کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہو اکام

سایف سه + سایف سه + ...

ہے۔

اب اس نظام کے لیے لکرائج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فریت}}{\text{جفت}} - \left( \frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} = - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} + \text{سا} + \text{وغیرہ}$$

یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$۲ \text{ بہ} \frac{\text{فریت}}{\text{جفت}} = - ۲ \text{ عم} \frac{\text{سا}}{\text{جفت}} + \text{سا} \quad (۱۹۹)$$

جس میں سا اب وقت کا ایک تفاعل ہے۔ اس مساوات کو ان قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جاسکتا ہے جو تفرقی مساواتوں کی کسی کتاب میں مذکور ہوتے ہیں۔ اگر حسب سابق کہ  $\frac{۱}{\text{بہ}} = \frac{۱}{\text{عم}}$  لیا جائے تو عام حل ہے:

$$\text{سا} = \text{جم} (\text{کہ ت} - \text{صہ}) + \frac{۱}{\text{عم} \text{ بہ} \text{ ت} - \text{ت}} \int \frac{۱}{\text{سا}} \text{ جب کہ } (\text{ت} - \text{ت}) \text{ فریت}$$

تکمل کی پمیل حد یا تو  $\infty$  ہے یا وہ لمحہ ہے جس پر بیرونی قوتوں نے اولاً عمل کرنا شروع کیا تھا۔

۲۸۶ - ایک بہت اہم صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ سا صرف وقت کے لحاظ سے دوری ہو فرض کرو

$$\text{سا} = \text{ع} \text{ جم} (\text{ش ت} - \text{جہ})$$

اب حل ہے

$$\text{سا} = \text{جم} (\text{کہ ت} - \text{صہ}) + \frac{\text{ع}}{\text{عم} \text{ بہ} \text{ ت} - \text{ت}} \text{ جم} (\text{ش ت} - \text{جہ}) \quad (۳۵۴)$$

لیکن چونکہ  $\text{عم} = \text{بہ}$  کہ اس لیے

$$\text{سا} = \text{جم} (\text{کہ ت} - \text{صہ}) + \frac{\text{ع}}{\text{عم} (۱ - \frac{\text{ش ت}}{\text{ت}})} \text{ جم} (\text{ش ت} - \text{جہ})$$

اس طرح اب سا میں 'تقسیم' 'تعدد' کی سادہ موسیقی حرکت اور نیز تعدد ث کی سادہ موسیقی حرکت سے مرکب ہے جہاں ث قوت عاملہ کا تعدد ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ث، کہ سے بہت ہی قریب ہو تو یہ دورا ارتعاش بہت بڑے حیطہ کا ہے۔ انتہائی صورت ث، کہ میں دو سر ارتعاش کا حیطہ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اب یہ دورا ارتعاش ایک ہی دور کے ہوتے ہیں اور اس لیے ان کو مرکب کیا جاسکتا ہے۔ ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ارتعاش لامتناہی حیطہ کا ہو گا کیونکہ ث، اور صہ کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں اور یہ عین ایسی ہو سکتی ہیں کہ دوسری رقم کے لامتناہی حیطہ کو برباد کر دیں۔ حاصل شدہ نتیجہ حسب ذیل شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے جب کسی نظام پر ایک دوری قوت عمل کرے جس کا تعدد نظام کے صدر ارتعاشات میں سے ایک کے تعدد کے بہت ہی قریب ہو تو قسری ارتعاشات بہت بڑے حیطہ کے ہوں گے۔

اس کو گھٹک کا اصول کہتے ہیں۔

یہ اصول ایسا ہے جس کے متعدد اطلاقات فطرت میں نظر آتے ہیں مثلاً ایک پل کو جو مطلقاً استوار نہیں ہوتا ایک ایسا نظام سمجھا جاسکتا ہے جس میں متعدد آزاد ارتعاش ہیں۔ اگر آدمیوں کی ایک جماعت قدم میں قدم ملاتے ہوئے باقاعدہ پل پر سے گزرے تو وہ پل پر ایک دوری قوت لگائیں گے اور اگر ان کے قدم کا دور پل کے آزاد دوروں میں سے کسی ایک پر تقریباً منطبق ہو جائے تو پل میں قسری ارتعاشات کا حیطہ اس قدر بڑا ہو سکتا ہے کہ پل پر خطر ہو جائے۔ یہی سبب ہے کہ جب فوج پل کو عبور کرنا شروع کرتی ہے تو اس کو مٹے قاعدہ قدموں میں چلنے کا حکم دیا جاتا ہے۔

دوسری مثال ایک جہاز کی ہو سکتی ہے، جہاز کا بل طور پر استوار نہیں ہوتا اور اس لیے اس میں متعدد آزاد ارتعاش ہوں گے۔ اس کے انجنوں کی حرکت ایک دوری قوت لگائے گی جس کا دور اس کی گردش کے مساوی ہو گا اور اگر وہ

دو جہاز کے آزاد ارتعاشات میں سے کسی پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت بُری طرح نیچے اوپر ہونا شروع کرے گا۔ اس کا علاج انجن کی چال کو بدلتا کر کیا جاسکتا ہے تا آنکہ وہ جہاز کے آزاد ارتعاش کے ساتھ گمک میں نہ ہو۔

(۳۵۵) آخری مثال کے طور پر یہ بتایا جاسکتا ہے کہ کوئی جہاز اپنے انتہائی محل کے گرد لڑکتے کا ایک آزاد دور رکھے گا۔ اگر جہاز سمندر کے اندر بہنور میں ہو تو اس سے ٹکرانے والی موجیں بیرونی قوتیں لگائیں گی جن کو تقریباً دوری سمجھا جاسکتا ہے۔ اگر موجوں کا دور جہاز کے دور پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت زیادہ لڑکتے لگیگا اگرچہ موجیں مقابلتہ جھوٹی ہوں۔ اس خطرہ کا علاج جہاز کے راستہ کو بدل کر کیا جاسکتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ موجیں اب مختلف وقفہ پر جہاز سے ٹکرائیں گی۔ دو سراطریقہ بادبان پھیلا کر جہاز کے میلان کو بدلنے کا ہے، اس کی وجہ سے جہاز توازن کے ایک مختلف محل کے گرد اہترزاز کرے گا اور اس کے گرد آزاد ارتعاشات مختلف ہوں گے۔

## آئینی مساواتیں

۲۸۷۔ اگر ط، ط، ... کسی نظام کے لگرائی محدود ہوں تو توانائی بالحرکت ت ایک دو درجی تفاعل ہے ط، ط، ط، ... کا۔  
فرض کرو کہ متناظر معیار ع، ع، ...، ع میں جو مساواتوں

$$۱ = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}}، \text{ وغیرہ} \quad (۳۰۰)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔  
اب فرض کرو کہ ہم ایک تفاعل ت شریک کرتے ہیں جہاں  
ت = ع ط + ع ط + ... - ت

اس طرح ت ایک تفاعل ہے ع، ع، ...، ع ط، ط، ... کا۔  
نیز یہ ظاہر ہے کہ ع، ع، ... تفاعلات ہیں ط، ط، ...، ط، ط، ... کے۔

ت کو تفرق کرنے پر مائل ہوتا ہے

$$\text{فرت} = \text{ع} \text{ فرطہ} + \text{ع} \text{ فرطہ} + \dots$$

$$+ \text{طہ} \text{ فرع} + \text{طہ} \text{ فرع} + \dots$$

$$- \frac{\text{جفت} \text{ فرطہ}}{\text{جفت} \text{ طہ}} - \frac{\text{جفت} \text{ فرطہ}}{\text{جفت} \text{ طہ}} - \dots$$

$$- \frac{\text{جفت} \text{ فرطہ}}{\text{جفت} \text{ طہ}} - \frac{\text{جفت} \text{ فرطہ}}{\text{جفت} \text{ طہ}} - \dots$$

اور یہ، مساوات (۲۰۰) کی رو سے

$$\text{فرت} = \text{طہ} \text{ فرع} + \text{طہ} \text{ فرع} + \dots - \frac{\text{جفت} \text{ فرطہ}}{\text{جفت} \text{ طہ}} - \frac{\text{جفت} \text{ فرطہ}}{\text{جفت} \text{ طہ}} - \dots$$

(۲۰۱)

میں تحویل ہوتی ہے۔

اب چونکہ تفرقی فرطہ، فرطہ، ..... اس مساوات میں شریک

(۳۵۶)

نہیں ہیں اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ت کو صرف ع، ع، .....،

طہ، طہ، ..... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم

آسانی سے اس کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{ع} \text{ طہ} + \text{ع} \text{ طہ} + \dots + \text{ع} \text{ طہ}$$

$$= \frac{\text{طہ} \text{ جفت} \text{ ت}}{\text{جفت} \text{ طہ}} + \frac{\text{طہ} \text{ جفت} \text{ ت}}{\text{جفت} \text{ طہ}} + \dots + \frac{\text{طہ} \text{ جفت} \text{ ت}}{\text{جفت} \text{ طہ}}$$

$$= ۲ \text{ ت} \text{ کیونکہ ت ایک متجانس دو درجی تفاعل ہے طہ، طہ،}$$

..... کا۔

$$\text{ت} = ۲ \text{ ت} - \text{ت} = \text{ت}$$

اس طرح جس سے یہ ثابت ہے کہ ت، ت کے مساوی ہے لیکن وہ ع، ع،

.....، طہ، طہ، ..... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان ہوا ہے۔

اس لیے



$$ت = \frac{۱}{۲} = (ع, ط, ۱ + ع, ط, ۲ + ..... + ع, ط, ۶) \\ \text{تمثیلاً فرض کرو کہ } ت = ۱ ط, ۱ + ۲ ط, ۱ ط, ۲ + ب ط, ۱ ط, ۲$$

$$ت = ۱ ط, ۲ = (۱ ط, ۱ + ۲ ط, ۱) ع, ۲ = (۲ ط, ۱ + ب ط, ۱ ط, ۲) \\ \text{اب تعریف کی رو سے}$$

$$ت = ع, ۱ ط, ۲ + ع, ۲ ط, ۱ + ..... - ت \\ ۲ ط, ۱ = (۱ ط, ۱ + ۲ ط, ۱ ط, ۲) + ۲ ط, ۱ ط, ۲ (ب ط, ۱ ط, ۲) - ت \\ ت = \frac{۱}{۲} ع, ۱ ط, ۲ + \frac{۱}{۲} ع, ۲ ط, ۱ \\ \text{مساوات (۲۰۱) سے حاصل ہوتا ہے}$$

$$\frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ط, ۱} \\ \text{جف } ت = \frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ع, ۱} \\ \text{لگرانج کی مساواتوں}$$

$$\frac{\text{فر } ت}{\text{جف } ط, ۱} = \left( \frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ط, ۱} \right) - \frac{\text{جف } ل}{\text{جف } ط, ۱} =$$

میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف } ل}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } (ت - ک)}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ط, ۱} = ع, ۱$$

(۲۵۴)

اس طرح لگرانج کی مساواتیں شکل

$$\frac{\text{فر } ل}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } ل}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } (ت - ک)}{\text{جف } ط, ۱} = \frac{\text{جف } (ت + ک)}{\text{جف } ط, ۱}$$

میں لکھی جاسکتی ہیں، اور مساوات (۲۰۲) کی رو سے

$$\frac{\text{فر } ط, ۱}{\text{جف } ت} = \frac{\text{جف } ت}{\text{جف } ع, ۱}$$

اگر ہم لکھیں  $\text{ت} + \text{ک} = \text{تو}$  یہ مساواتیں شکل ذیل اختیار کرتی ہیں:

$$\frac{\text{فرطه}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ۵}}{\text{جف ۶}}$$

$$\frac{\text{فراء}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ص}}{\text{جف ط}} ، \text{ وغيره}$$

۲۸۸ - اس کو حرکتی مساواتوں کی آئینی شکل کہا جاتا ہے۔ تفاعل  
 مہ کو ہیلٹونی تفاعل کہتے ہیں اور چونکہ  $m = \frac{1}{2} + k$  اس لیے ہم  
 دیکھتے ہیں کہ  $m$  کل توانائی ہے جو محدود طہ، طہ، ...، طہ اور  
 معیاروں  $E_1, E_2, \dots, E_n$  کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کی گئی ہے  
 یہ آئینی شکل سادہ ترین اور کامل ترین شکل ہے جس میں تعمیم شدہ  
 حرکتی مساواتیں بیان کی جاسکتی ہیں۔ اسی سبب سے مساواتوں کی یہ  
 آئینی شکل حرکتی اعلیٰ، ریاضیاتی طبیعیات، اور ریاضیاتی ہیئت کی بہت  
 سی تحقیقاتوں میں ابتداء استعمال کی جاتی ہے۔

۲۸۹۔ ہم اس کتاب کو تقسیم شدہ محدودوں کے استعمال کی دو مثالیں دے کر ختم کریں گے، یہ مثالیں ریاضیاتی طبیعیات کی دو شاخوں سے لگی ہیں۔

**مثال ۱** محرکیات سے۔ فرض کرو کہ کسی شکل کا ایک ٹھوس جسم

ایک ندی میں ہے جو یکساں رفتار و سہ بہہ رہی ہے۔ اگر جسم پانی کی سطح کے نیچے کافی گہرائی پر ہو تو اس کی موجودگی سے سطح پر کے بہاؤ میں کوئی خلل نہیں ہوگا اور صرف جسم کے قرب میں پانی کے بہاؤ میں خلل پڑے گا۔ ابتدائی ماحولیاتی اصولوں سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ صرف ایک طریقہ ہے جس میں پانی جسم پر سے گذر کر بہہ سکتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پانی کے بہاؤ کی توانائی بالحرکت مساوات

$$ت = ت + ع + و$$

(۳۵) سے حاصل ہوتی ہے جہاں ت وہ قیمت ہے جو توانائی بالحرکت کی ہوگی اگر جسم کو پانی سے نکال لیا جائے۔ فرض کرو کہ جسم پر پانی کے دباؤ کے علاوہ بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کسی محور کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ط ہے اور فرض کرو کہ طہ ایک مجدد ہے جس سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم اس محور کے گرد گھومتا ہے۔ تب مجدد طہ کے جواب میں لگراج کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\left(\frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}}\right)} - \frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}} = \text{طا}$$

اگر بیرونی قوتیں جسم کو پانی میں ساکن رکھنے کے لیے عین کافی ہوں تو فرت  $\left(\frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}}\right) = ۰$  اور اس لیے

$$\text{طا} = - \frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}} = - \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف طہ}} \text{ و } ۲$$

پس پانی کے دباؤ کے معیاروں کا مجموعہ۔ طا ہونا چاہئے یا

$$\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف طہ}} \text{ و } ۲$$

ہم عہ کو جسم کی شکل سے محسوب کر سکتے ہیں اور اس طرح جسم پر عمل کرنے والے جفتوں کا علم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال برق مقناطیسیت سے۔ وہ توانائی جو طاقتوں طہ طہ کی برق کی دو یکساں روؤں کے بہاؤ کو دو معلومہ بند دوروں میں جادی کر نیکیے لیے مطلوب ہوتی ہے شکل

$$ع = \frac{۱}{۲} ل ط + م ط ط + \frac{۱}{۲} ن ط$$

میں معلوم ہے جہاں ل اور ن علی الترتیب پہلے اور دوسرے دوروں کی شکل پر منحصر ہیں اور م دونوں دوروں کی شکل پر اور نیز ایک دوسرے کے لحاظ سے ان کے محلوں پر منحصر ہے۔

فرض کرو کہ دو سرادور پہلے دور کی جانب کسی خط پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔  
فرض کرو کہ لا ایک محدود ہے جو اس خط پر پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس  
سمت میں جس میں لا کی پیمائش ہوئی ہے وہ قوت جو دوسرے دور کو ساکن  
رکھنے کے لیے مطلوب ہے لا ہے۔

فرض کرو کہ ل سے حسب معمول تفاعل ت۔ گ تبغیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ  
دوسرے دور پر ایک بیرونی قوت عاملہ لا عمل کرتی ہے۔ اب محدود لا کے لیے  
گراہج کی مساوات ہے:

$$\text{فر} - \left( \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = \gamma$$

اور چونکہ کوئی اسراع نہیں ہے اس لیے

$$\gamma = - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}$$

تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ

$$\gamma = - \frac{\text{ط ط}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{جف م}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اگر دو روؤں کی توانائی توانائی بالقوہ ہوتی تو حاصل ہونا چاہئے

$$- \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = + \frac{\text{جف گ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{جف گ}}{\text{جف لا}}$$

یعنی قوت لا مشاہدہ کردہ قوت کے ٹھیک مخالف ہوئی۔

اس کے برخلاف اگر توانائی توانائی بالحرکت ہے تو

$$- \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اور اس لیے لا کی قیمت مشاہدہ کے مطابق ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچے ہیں کہ کسی برقی رو کی توانائی کلا توانائی بالحرکت  
ہوتی ہے۔

## عام مثالیں

۱۔ ایک انجن کی رگڑ ایسی ہے کہ ایک اسپر طاقت سے وہ ۲۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرنے لگتا ہے جبکہ کوئی بیرونی کام انجام نہیں دیتا۔ اس کے متحرک حصوں کا جمود ایسا ہے کہ جب انجن ۱۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرتا ہے اور اس پر ایک اسپر طاقت عمل کرتی ہے تو اس کی چال میں ۱۰ گردشوں فی ثانیہ کا اسراع پیدا ہوتا ہے۔ اگر انجن کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے جبکہ وہ اپنی پوری چال ۲۵۰ گردشوں فی ثانیہ سے حرکت کر رہا ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی گردشیں کرے گا۔

۲۔ ایک مربع ایک وتر کے گرد زاوی رقرار سے آزادانہ حرکت کر رہا ہے کہ اچانک ایک راس جو اس وتر میں نہیں ہے ثابت ہو جاتا ہے۔ اس ثابت نقطہ پر دھکے کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نئی زاوی رقرار پر اسے ہوگی۔

۳۔ چار مساوی ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ۱۲ اور کمیت ک ہے ایک معین کی شکل میں آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ یہ نظام سکون سے انتصابی وتر کے ساتھ گرتا ہے اور ایک ثابت افقی بے پچک مستوی سے ٹکراتا ہے۔ دھکے اور اس کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۴۔ دو ذرے جو ایک استوار ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہیں ایک چکنے انتصابی دائرہ پر حرکت کرتے ہیں۔ چھوٹے اہتزاز کا وقت معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول  $l$  ہے اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ  $h$  پر کے دو نقطوں سے مساوی دوریاں باندھی گئی ہیں اور ان دوریوں کے دوسرے سرے دو ثابت نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ  $2h$  ہے باندھے گئے ہیں یہ ثابت نقطے ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔

صدر محدد اور ارتعاش کے متناظر دور معلوم کرو۔

۶۔ اگر پچھلی مثال کے ڈنڈے کے ایک سرے پر دہرے کی ایک افقی ضرب اس کے طول کے علی القوائم پڑے تو دہرے کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۷۔ نصف قطر کا ایک کھردرا ایکساں اسطوانہ ہے اور اس کی مرکزی تراش کے گرد ایک نا امتداد پذیر دوری پٹی ہوئی ہے۔ دوری کا ایک سر ایک ثابت نقطہ ف سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گھماتے ہوئے دوری کو اس پر لپیٹا گیا ہے یہاں تک کہ وہ نقطہ ف کو مس کرتا ہے اور ف پر اسطوانہ کا تماس انتصابی ہے۔ تب اسطوانہ کو چھوڑ دیا گیا ہے حرکت معلوم کرو۔

۸۔ پچھلی مثال میں اگر ف پر کا تماس اسطوانہ کے محور پر عمود ہو لیکن ٹھیک انتصابی نہ ہو تو حرکت معلوم کرو۔

۹۔ کروی قطبی محددوں میں ثابت کرو کہ اکائی کمیت کے ایک متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$ت = \frac{1}{4} (ز^۲ + ر^۲ ط^۲ + ر^۲ جب^۲ ل^۲)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ پس ثابت کرو کہ ذرہ کے اسراع کے اجزائے ترکیبی، ر، ط، لہ کی بڑھتی ہوئی سمتوں میں حسب ذیل مقداروں کے ہیں:

$$\frac{فر}{فرت} \left( \frac{جفت}{ز} \right) - \frac{جفت}{ر} \left( \frac{فر}{رت} \right) \left[ \frac{فر}{رت} \left( \frac{جفت}{ط} \right) - \frac{جفت}{ط} \right]$$

$$\frac{ا}{رجب ط} \frac{فر}{رت} \left( \frac{جفت}{ل} \right)$$

ثابت کرو کہ ان اسراعوں کی اصلی قیمتیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{فر^۲}{رت} - ر ط^۲ - ر جب^۲ ل^۲, \frac{ا}{ر} \frac{فر}{رت} (ر ط^۲) - ر جب ط^۲ جم ط^۲ ل^۲,$$

۱۔  $\frac{ا}{ر}$  جب طہ فرت (ر جب طہ لہ)

۱۰۔ یہ معلوم ہوا کہ ایک ذرہ کی رفتار اس کے مدار میں اس فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے جو اس کو ایک ثابت نقطہ سے ہے۔ اس کا مدار معلوم کرنے میں اسل ترین عمل کا اصول استعمال کرو اور اس سے کشش کا قانون دریافت کرو۔

یہی نتیجے توانائی کے قانون بقا سے اخذ کرو۔

۱۱۔ فرض کرو کہ کائنات کی تمام قوتیں نابود کر دی گئی ہیں اور یہ کہ ایک مخفی میکا نیٹ ہے جو توانائی بالحرکت کی حامل ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ اس توانائی بالحرکت کی مقدار صرف کائنات کے مادی اجسام کے محلوں پر منحصر ہے اور اگر کائنات کی قوتیں نابود نہ ہوتیں تو مذکورہ بالا توانائی بالحرکت مقدار میں صرف ایک مستقل اور علامت کے اختلاف کے ساتھ نظام کی توانائی بالقوہ کے مساوی ہوتی۔

ثابت کرو کہ اس قسم کی کائنات کے حرکیاتی مظاہر اس کائنات کے حرکیاتی مظاہر کے مماثل ہوں گے جس میں دونوں قوتیں اور توانائی بالحرکت موجود ہوں جہاں غفلت الذکر کائنات کی تبدیلیاں نیوٹن کے قوانین حرکت سے متعین کی گئی ہوں۔

۱۲۔ متعدد بے کمیت کڑے جن کے نصف قطر 'ا' ب' ج' ...

ہیں کثافت 'ن' کے ایک لامتناہی سمندر میں ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں 'ان' کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے 'ا' ب' ج' ...

ہیں اور ان کی رفتاریں 'و' 'و' 'و' ... ہیں۔ جب 'ا' ب' ج' ...

بمقابلہ 'و' 'و' 'و' ... کے چھوٹے ہوتے ہیں تو سمندر کی حرکت

کی توانائی بالحرکت

$$\text{نت} = \frac{۲}{۳} \pi \text{ نہ } \omega_1^3 + \dots + \pi ۲ \text{ نہ } \frac{\omega_2^3}{r_2} \text{ و } \omega_1 + \dots$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

ثابت کرو کہ کسی مُشاہد کو جو سمندر کی موجودگی سے بے خبر ہو کر ہے  
اس طرح حرکت کرتے نظر آئیں گے گویا کہ ان کمیتیں  $\frac{۲}{۳} \pi \text{ نہ } \omega_1^3$

$\frac{۲}{۳} \pi \text{ نہ } \omega_2^3$  ہیں اور گویا کہ وہ قوتیں جو کرؤں کے ہر زوج کے

درمیان عمل کرتی ہیں ان کی ان کمیتوں کے حاصل ضرب کے اور  
ان کی رفتاروں کے حاصل ضرب کے متناسب ہیں اور نیز ان کے  
درمیانی فاصلے کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہیں۔

نت



# اشاریہ

## نظری علم الحیئل

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

- ۱۸، ابطاء  
 آثار، سرچ ترین کا خط، ۲۷۹  
 ارتعاش، ۵۰۱، ۵۰۸  
 آزادی کے درجوں کی تعداد، ۲۶۶، ۲۷۹  
 اسپر طاقت، ۲۱۰  
 استواری، ۱۳۱  
 اسراع، ۱۷  
 متواری الاضلاع، ۱۹  
 کراواتری حرکت میں، ۲۱، ۲۸  
 اصول، اقل عمل کا، ۲۷۳  
 ہمیلٹن کا، ۲۷۶  
 اضافی حرکت، ۵  
 اقل ترین عمل، ۲۷۲  
 کائی، رفتار کی، ۹  
 سر قوت کی، ۲۵

- کام کی '۲۱۰  
 انتقال پذیری، قوت کی '۱۳۶  
 اہترزاز، ایک رقا ص کے '۴۳۱  
 چھوٹے، عام حرکیاتی نظام کے '۵۰۱  
 قسری '۵۰۸  
 اوسط رفتار '۹  
 ایکسانیت فطرت کی '۱  
 آئینی مساواتیں '۵۱۱  
 بقا، توانائی کا '۲۴۸  
 خطی معیار حرکت کا '۳۲۳  
 زاویائی معیار حرکت کا '۴۲۹  
 پترے کا مرکز ثقل '۱۷۶، ۱۹۵  
 پیکل، بٹ سے بڑا، معیار '۳۴۵  
 بیسی، گروی، مرکز ثقل '۱۹۰  
 پینالٹش، رفتار کی '۹  
 اسراع کی '۱۸  
 کمیت کی '۴۴  
 قوت کی '۴۵  
 کام کی '۲۰۹  
 اسراع بوجہ جاذبہ کی '۲۷۳  
 دھکے کی '۳۳۹  
 تجاذب کا قانون '۴۰۳  
 تحفظی یا بقائی نظام، قوتوں کا '۲۳۷  
 تدویری رقا ص '۳۸۴  
 ترکیب، حرکتوں کی '۶

- ترکیب، رفتاروں کی، ۱۰ ✓  
 اسراروں کی، ۱۹ ✓  
 ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کی، ۵۴ ✓  
 ایک مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کی، ۱۳۸ ✓  
 متوازی قوتوں کی، ۱۴۴ ✓  
 جفتوں کی، ۱۵۲ ✓  
 گردشوں کی، ۴۱۴ ✓  
 تصادم، ۳۴۵ ✓  
 ذرہ کا ثابت سطح پر، ۳۴۹ ✓  
 کسی دو متحرک اجسام کا، ۳۵۲ ✓  
 دو چکنے کروں کا، ۳۵۶ ✓  
 تعامل، ۴۶ ✓  
 رگڑ کا، ساکن اجسام کے درمیان، ۶۸ ✓  
 متحرک اجسام کے درمیان، ۲۹۰ ✓  
 تعدد، ارتعاش کا، ۳۸۱ ✓  
 تعدیلی توازن، ۲۶۴ ✓  
 تفسیمی محدود، ۴۶۳ ✓  
 دھکے، ۴۹۸ ✓  
 معیار حرکت، ۴۹۸ ✓  
 تغیر، ج کی قیمت میں، ۲۸۹ ✓  
 ارضی عرض بلد کا، ۴۴۸ ✓  
 تفرقی مساواتیں، مداروں کی، ۳۹۷ ✓  
 تناؤ، ڈوری کا، ۶۲، ۱۱۱ ✓  
 توازن، ذرہ کا، ۵۶، ۶۰ ✓  
 ذروں کے نظام کا، ۹۴ ✓

- توازن، استوار جسم کا، ۱۳۴
- کی قائمیت اور غیر قائمیت، ۲۵۳، ۵۰۶، ۵۰۷
- توانائی، بالقوہ، ۲۳۶
- یا حرکت، ۲۳۳، ۳۳۰
- کل، ۲۳۸
- بقا، ۲۳۸
- ایک نظام کے حرکت کی، ۳۳۲
- استوار جسم کی، ۴۱۸
- توانائی یا حرکت، ۲۳۳
- ذروں کے نظام کی، ۳۳۰
- گردش کی، ۴۱۷
- استوار جسم کی، ۴۱۸
- توانائی بالقوہ، ۲۳۶
- توسیع پذیری، ڈویوں کی، ۶۶
- ٹپہ، مرنی کا، ۳۰۲
- جاذبہ ارض، اس کے خلاف کام، ۲۲۰
- اس کے تحت کرنے میں حرکت، ۲۷۴
- عرض بلد کے ساتھ تغیر، ۲۸۹
- جفت، ۱۴۷
- متوازی مستویوں میں، ۱۵۰
- ان کی ترکیب، ۱۵۲
- ان کے خلاف کام، ۲۲۱
- جمود کا معیار، ۴۱۸
- کے سر اور حاصل ضرب، ۴۳۷، ۴۳۸
- کا ناقص نما، ۴۳۸

۴۳۹ کے صدر محور

جمود کے محور ۴۳۹

جھوک ڈوری کا ۱۴۴

جھولا پل ۱۱۲

چرخ اور محور ۹۵

چرخوں کے نظام ۲۲۶

حاصل ضرب، جمود کے ۴۳۸

حرکت، حوالے کے فریم کے حوالے سے ۵

استوار جسم کی ۱۳۳، ۴۱۳

متحرک حوالے کے فریم کے حوالے سے ۲۸۵

ذروں کے نظام کی ۳۱۹

کسی نظام کے مرکز ثقل کی ۳۲۲

سادہ موسیقی ۳۷۷

قوت کے مرکز کے گرد ذرہ کی ۳۸۸

معکوس مربع کے قانون کے تحت ذرہ کی ۳۹۹

حوالے کا فریم ۴۹، ۵

متحرک کے حوالے سے حرکت ۲۸۵

متحرک کے حوالے سے توانائی بالحرکت ۳۳۰

حیطہ، رفاص کا ۳۷۶

سادہ موسیقی حرکت کا ۳۸۳

خط عمل، قوت کا ۸۹

دائری قوس، مرکز ثقل ۱۸۲

دھکے ۳۳۷

پچکاؤ کا ۳۴۷

نقیسی ۴۹۷

دھکے والی قوتیں، ۳۳۷، ۴۹۷

دور، ارتعاش کا، ۳۷۷

سادہ موسیقی حرکت کا، ۳۸۳

دوہرے تارے، ۴۰۴

دوری، کاتناؤ، ۶۲

کی ملائیت، ۶۳

کی توسیع پذیری، ۶۵

سطح پر، ۱۱۰

کا جھونک، ۱۲۴

تناؤ میں کام، ۲۱۶

ذروں کا نظام، سکون، ۸۸

حرکت، ۳۱۹

توانائی یا حرکت، ۳۳۰

رفتار، ایکساں اور متغیر، ۸

اوسط، ۹

ترکیب، ۱۰

کا معیار، ۳۹۵

زاوی، ۴۱۳

رقاص، سادہ، ۳۷۴

ثانیوں کا، ۳۷۸

کی عام حرکت، ۴۳۱

رگڑ، ۶۸

کی قدر، ۶۹

متحرک کھردرے اجسام کے درمیان تعامل، ۲۹۰

رگڑ کا زاویہ، ۶۹

- رنج، ۱۵۶  
 زاویہ، رگڑکا، ۶۹  
 زاوی، رفتار، ۴۱۳  
 اس کی ترکیب، ۴۱۴  
 زاوی، معیار حرکت، ۴۲۹  
 کابقا، ۴۲۹  
 زمین کی گردش، ۲۸۷، ۴۴۸  
 زنجیرہ، ۱۱۸  
 کاسادہ موسیقی حرکت، ۳۷۶  
 ستارے، دوہرے، مدار، ۴۰۴  
 سر، جمود کے، ۴۳۷  
 سریع ترین اتار کا خط، ۲۷۹  
 مسکون، ۴  
 سمتی، ۲۳۳  
 ایک مستوی میں، ۲۴۴  
 فضا میں، ۲۹  
 ستارہ کی گردش، ۴۴۷  
 صدر محدود، ۵۰۵  
 صدر محور، جمود کے، ۴۳۹  
 عرض بلد کے تغیر کے ساتھ جاذبہ کا تغیر، ۲۸۹  
 ارضی عرض بلد کا تغیر، ۴۴۸  
 عمل، ۴۷۲  
 اقل ترین عمل کا اصول، ۲۷۳  
 عود کا دھکے، ۳۴۵  
 فاصل توازن، ۲۶۴

- فریم، حوالے کا، ۴۹، ۵
- متحرک کے حوالے سے حرکت، ۲۸۵
- متحرک کے حوالے سے توانائی، بالحرکت، ۳۳۰
- قابلیت اور غیر قابلیت توازن کی، ۵۰۶، ۲۵۳
- قدر، مرکز کی، ۶۹
- چلک کی، ۳۴۸
- قصری، اہتراز، ۵۰۸
- قطاع، دائرہ کا، مرکز ثقل، ۱۸۶
- سکڑہ کا، مرکز ثقل، ۱۹۳
- قطعہ، دائرہ کا، مرکز ثقل، ۱۸۵
- قوانین، فطرت کے، ۱
- حرکت کے، ۳۹
- قوت، ۳۹
- کی پیمائش، ۴۵
- کی انتقال پذیری، ۱۳۶
- قوتیں، ترکیب اور تحلیل، ۵۵
- ایک مستوی میں، ۱۳۸، ۹۸
- متوازی، ۱۳۹، ۱۴۴
- فضاء میں، ۱۵۴
- دھکے والی، ۳۳۷
- قوس، دائری، مرکز ثقل، ۱۸۲
- کام، پیمائش، ۲۰۹
- متغیر قوت کے خلاف، ۲۱۳
- دوری کے تنانے میں، ۲۱۴
- رقبہ سے تعبیر، ۲۱۶



- کام، مائل قوت کے خلاف، ۲۱۸  
 باذہب کے خلاف، ۲۲۱  
 جفت کا، ۲۲۱  
 موبہوم، اسول، ۲۲۲  
 دھکے کا، ۳۴۰  
 کیلر کے قوانین، ۳۰-۳  
 کردی ٹوپی، مرکز قتل، ۱۸۸  
 کیت، پیائش، ۲۲۲  
 گردش کا محور، ۱۳۴  
 زمین کی، ۲۸۷  
 استوار جسم کی، توانائی بالحرکت، ۴۱۸  
 سیارہ کی، ۴۴۷  
 گردش کا محور، ۱۳۴  
 گنگ کا اسول، ۵۱۰  
 گھاؤ کا نصف قطر، ۴۱۸  
 لٹو کی حرکت، ۴۴۹  
 لچک، دوری کی، ۴۴۹  
 کا مقیاس، ۶۶  
 ٹھوس جسم کی، ۳۴۵  
 کی قدر، ۳۴۸  
 نفاذ، مربیوں کے راستوں کا، ۳۰۵  
 لگراج کی مساواتیں، ۴۷۴  
 دھکے والی قوتوں کے لیے، ۴۹۷  
 غیر تھائی نظامات کے لیے، ۴۹۰  
 مائل مستوی پر ذرہ کی حرکت، ۲۷۸

متوازی الاضلاع کا قانون، 'رفقاریں' ۱۳  
 'اسراع' ۱۹  
 'توتیں' ۵۵  
 'جفت' ۱۵۲  
 'زاویاتی رفتار' ۳۱۴

متوازن کرنا، 'انجن کو' ۴۸۹  
 متوازی قوتیں، '۱۳۹' ۱۴۴  
 مثلث، 'رفقاریوں کا' ۱۵  
 مثلثی پیرا، 'مرکز ثقل' ۱۷۶  
 عدد 'تیمی' ۴۶۳

سدر ۵۰۵

محور، 'جمود کے' ۴۳۹  
 محور، 'گردش کے' ۱۳۴  
 مخروط مضلع، 'مرکز ثقل' ۱۹۱  
 مخروطی رفاص، '۳۹۳'  
 مدار، 'عام نظریہ' ۳۹۴

کی تغیراتی مساوات، '۳۹۷'  
 مدار، 'ایک ذرہ کا' راست فاصلہ کا قانون، '۳۸۸'  
 فاصلہ کے معکوس مربع کا قانون، '۳۹۹'

مرکز ثقل، '۱۷۱'

پیرے کا، '۱۷۶' ۱۹۵  
 'محوس جسم کا' ۱۹۰، '۱۹۶'  
 مثلث کا، '۱۷۶'  
 مخروط مضلع کا، '۱۹۱'  
 دائری قوس کا، '۱۸۲'

- مرکز نقل، قطعہ دائرہ کا، ۱۸۵  
 قطاع دائرہ کا، ۱۸۶  
 کروی ٹوپی کا، ۱۸۸  
 کروی بیٹی کا، ۱۹۰  
 کی حرکت، ۳۲۴  
 مرکزی محور، قوتوں کے نظام کا، ۱۵۶  
 مرکز ہندسی، ۳۱  
 حرعی، ۲۹۷  
 افقی مستوی پر بیٹھ، ۳۰۲  
 ماہل مستوی پر بیٹھ، ۳۰۳  
 راستوں کا لفاف، ۳۰۵  
 مسادات، توانائی کی، ۲۴۷، ۳۷۲  
 ایک ذرہ کی حرکت کی، ۳۶۸  
 ایک ذرہ کے مدار کی، ۳۹۷  
 ایک استوار جسم کی، ۴۴۰  
 مساداتیں، یولر کی، ۴۴۴، ۴۹۹  
 لگراج کی، ۴۷۳، ۴۹۳  
 آئینی، ۵۱۱  
 مستوی، قوتوں کی ترکیب ایک مستوی میں، ۱۳۸  
 ایک قوت کے گرد مدار کا ایک مستوی میں ہونا، ۳۹۵  
 مطلق ایکائیاں، قوت کی، ۴۵  
 کام کی، ۲۱۱  
 نظائر نقشہ، ۴۳۸  
 معلوم مربع کا قانون، ۳۹۹  
 معیار، قوت کا، ۹۰

- معیار، رفتار کا، ۳۹۵  
 جمود کا، ۴۱۸  
 معیار حرکت کا، ۴۲۷  
 بڑے سے بڑے پچکاؤ کا، ۳۴۵  
 معیار، صدر، جمود کے، ۴۳۷  
 معیار حرکت، ۴۳  
 خطی کا بقا، ۳۲۳  
 کا معیار، ۴۲۷  
 زاویائی کا بقا، ۴۲۹  
 تقیسی، ۴۹۸  
 مقیاس، لمبک کا، ۶۶  
 ملائمت، دوریوں کی، ۶۳  
 موسیقی حرکت، سادہ، ۳۷۶  
 موہوم کام کا اصول، ۲۲۳  
 ناقص نما، جمود کا، ۴۳۸  
 نصف قطر گھاؤ کا، ۴۱۸  
 نظام، چرخوں کا، ۲۲۶  
 تحفظی قوتوں کا، ۲۳۷  
 نقشہ، منہار، ۲۱۷  
 نقطہ عمل، قوت کا، ۱۳۶، ۸۹  
 میوٹن کے قوانین حرکت، ۳۹  
 ایک کا قانون، ۶۶  
 ہلیٹن کا اصول، ۴۶۷  
 وزن، ایک ذرہ کا، ۶۲  
 ذروں کے نظام کا، ۱۷۲  
 یولر کی مساویات، ۴۴۳، ۴۹۹

# اصطلاحات

## نظری علم الجہل

Acceleration

اسراع

Action

عمل

Amplitude

خطہ

Automobile

آٹوموبیل

Bob

لنگر

Buoyancy

تیراؤ اچھال

Capstan

لنگر خرج

Canonical equations

آئینی مساواتیں

Catenary

زنجیرہ

Centroid

مرکز ہندسی

Circuit

دور

Coefficient of friction

رگڑ کی قدر

Coefficients of Inertia

جمود کے سر

Compression

پیکاؤ

Conservation (of energy)

تحفظ (توانائی کا)

Conservative (system of forces)

تحفظی یا بقائی (قوتوں کا نظام)

Contact	تماس
Couple	جفت
Couplings	جوڑک
Crane	حالمہ
Crank	کرینک، گردونہ
Cycloid	خط تدویر
Cycloidal pendulum	تدویری قاصص
Dip	میلان
Driving wheels	چلاؤ پہنئے
Equilibrium	توازن
Elasticity	لیجک
Electromagnetism	برق مقناطیسیت
Ellipse	ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Envelope	نفاف
Experimental science	تجربی سائنس
Extensible	استداد پذیر
Extensibility	توسیع پذیری
Extension	توسیع
External forces	بیرونی قوتیں
Flanges	کوریں
Flexibility	ملائمت
Forced oscillation	قسری اہتزاز
Fork	دو شاخہ
Frame of reference	حوالے کا فریم

Frequency	تقد
Friction	رگڑ
Gearing	گیرائی
Galvanometer	برقی روپیما
Generalized coordinates	تعمیمی محدود
Harmonic	موسیقی
Hold (of a ship)	پیٹیا (جہاز کا)
Horse-power	اسبی طاقت
Hub	ناف
Hydrodynamics	ماحرکیات
Hyperbola	قطع زائد
Impact	تصادم
Impulse	دھک
Inclined plane	مائل مستوی
Indicator diagram	منظہار نقشہ
Inertia	جمود
Inextensible	نا امتداد پذیر
Internal forces	بیرونی قوتیں
Kinetic Energy	توانائی بالحکمت
Lamina	پترا
Law of inverse square	معکوس مربع کا قانون
Line of action	خط عمل
Line of quickest descent	سریع ترین اتار کا خط
Lockgate	تفلی گیٹ
Locomotive	لوکوموٹف، حراکہ

Mechanics

علم الجھیل

Modulus of Elasticity

لچک کی قدر

Moment

معیار

Momentum

معیار حرکت

Natural science

طبعی سائنس

Orbit

مدار

Oscillations

اوتھراز

Parabola

مکانی

Pedal

رکاب

Pendulum

رقاص

Period

دور

Pitch

گھائی

Piston

فشارہ

Pivot

چول

Point of inflection

نقطہ انعطاف

Potential energy

نوانالی بالقوہ

Poundal

پونڈل

Principal axes

صدر محاور

Projectile

مرمی

Range (of a projectile)

ٹپہ (مرمی کا)

Reaction

تفاعل

Reflection

انعکاس

Resilience

بازگشتگی

Resolution (of forces)

تخلیل (قوتوں کی)

Rest

مسکون



Restitution (impulse of)	عود (کاد صکھ)
Retardation	ابطاء
Rigidity	استواری
Roller	بیلین
Rolling friction	رولنگ فریکشن
Rotation	گردش
Sag	جھوک
Shell	خول
Simple harmonic motion	سادہ سیمیٹری حرکت
Skidding	گھسٹنا
Slack (couplings)	ڈھیلے (جوڑک)
Span	فصل
Spherical cap	کروی ٹوپی
Spokes	آرے
Strength	طاقت
Suspension bridge	جھولابیل
Tension	تیناؤ
Theoretical Science	نظری سائنس
Thrust	دھکیل
Tractive force	جبری قوت
Transformation	استحالہ
Translation (motion of)	(حرکت) انتقال
Transmissibility	انتقال پذیری
Uniformity of nature	فطرت کی ایکسانیت
Vectors	سمتی

Vibrations

Windlass

Windmill

Wheel and axle

Work

ارتعاش

ڈنڈا چرخ

ہوائی چکی

چرخ اور محور

کام

